

## **HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES**

Spécialité : Sciences et technologie de l'information et de la communication

Présentée par :

**Reda Boukezzoula**

Maître de Conférences à l'Université Savoie Mont Blanc – 61ème section  
Laboratoire d'Informatique, Systèmes, Traitement de l'Information et de la Connaissance (LISTIC)

### **Du contrôle flou conventionnel au contrôle graduel**

**Travaux présentés le 30 Juin 2016 devant la Commission d'Examen :**

<b>Didier Dubois</b>	Rapporteur, DR-CNRS, IRIT, Toulouse
<b>Luc Jaulin</b>	Rapporteur, Professeur, Lab-STICC, ENSTA Bretagne
<b>Ahmed El Hajjaji</b>	Rapporteur, Professeur, MIS - UPJV
<b>Thierry-Marie Guerra</b>	Président, Professeur, LAMIH – UVHC
<b>Laurent Foulloy</b>	Examineur, Professeur, LISTIC, USMB
<b>Sylvie Galichet</b>	Examinatrice, Professeur, LISTIC, USMB



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier :

- Monsieur Didier Dubois, Directeur de recherche au CNRS à l'IRIT de Toulouse,
- Monsieur Luc Jaulin, Professeur à l'ENSTA de Bretagne,
- Monsieur Ahmed El Hajjaji, Professeur à l'Université de Picardie Jules Verne,

pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de ce manuscrit et pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette HDR. Leurs remarques constructives ont contribué à améliorer ce document.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur Thierry-Marie Guerra, Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, qui m'a fait le grand plaisir d'être le président du jury.

Et enfin, je tiens à remercier chaleureusement et à exprimer ma profonde gratitude à mes parrains : Laurent Foulloy et Sylvie Galichet (Professeurs à l'Université Savoie Mont Blanc) pour avoir accepté de relire, de corriger et de donner leur avis sur ce travail.

Un très grand merci à tous les doctorants «anciens» et «actuels» avec qui j'ai eu le plaisir de travailler. Cette HDR leur doit énormément.

Mes sincères remerciements et ma reconnaissance vont également à mes collègues : Lamia, Gilles, Yves, Christelle et Didier, qui ont accepté «de si bonne grâce» de faire le travail «ingrat», mais absolument indispensable, de la relecture minutieuse de ce mémoire.

Merci également à mes collègues du département GEII de l'IUT d'Annecy, avec qui il est intéressant, plaisant et facile de travailler !

Je désire terminer en remerciant ma petite famille. Elle est pour moi une source de bonheur chaque jour. Un merci «particulier» à ma femme, qui sait à la fois m'encourager, me mettre la pression, m'équilibrer et me ramener à la réalité.



# Résumé

Depuis une quinzaine d'années, nos travaux de recherche ont porté sur la conception de modèles et/ou de contrôleurs dans des environnements imprécis et incertains. Notre philosophie s'appuie sur une vision originale qui s'écarte de la majorité des approches proposées au sein de la communauté «automaticienne floue» : le contrôle intelligent ne doit pas rester cantonné dans des considérations liées à la recherche de la performance numérique, mais il doit intégrer et manipuler l'imprécision et l'incertitude afin d'améliorer sa représentativité et son processus décisionnel. Nos réflexions et nos réserves concernant le contrôle flou conventionnel (approches directe et indirecte) ont placé les concepts relatifs à l'imperfection de l'information au cœur de notre problématique de recherche. Cette philosophie nous a conduits à abandonner l'approche de modélisation à bases de règles floues au profit des modèles régressifs à base d'intervalles graduels. Ces derniers, manipulables à travers les théories de mesures non additives, ont le mérite d'augmenter la spécificité des intervalles conventionnels et d'appréhender les concepts d'imprécision et d'incertitude dans un même formalisme. Des outils de manipulation, de propagation et d'identification de ces modèles graduels ont été proposés et analysés. L'applicabilité et les potentialités de l'approche proposée ont été validées dans la construction des contrôleurs directs et indirects.

# Abstract

Since about fifteen years, our research work is located in the field of models and/or controllers design in imprecise and uncertain environments. Our philosophy is based on an original vision which deviates from the majority of the approaches suggested in the fuzzy control community : intelligent control does not have to remain confined in considerations related to the research of numerical performances, but it must integrate and handle the imprecision and the uncertainty in order to improve its representativeness and its decision-making process. Our ideas and reserves concerning the fuzzy conventional control (direct and indirect approaches) placed the concepts related to the imperfection of information in the middle of our research concerns. This philosophy justified the abandonment of the conventional fuzzy rule base representation and supported an orientation towards interval gradual regressive models. The latter, which can be handled through non-additive measurement theories, have the merit to increase the specificity of the conventional intervals and to unify the imprecision and the uncertainty concepts in the same formalism. Propagation and identification tools of these gradual models have been proposed and analyzed. The applicability and the potential of the proposed approach have been validated in the construction of direct and indirect controllers.



# Table des matières

Remerciements .....	ii
Résumé .....	iv
Table des matières .....	vi
Avant-propos .....	1
<b>PARTIE A : Synthèse .....</b>	<b>3</b>
1. <i>Curriculum Vitae</i> .....	3
1.1. Situation administrative .....	3
1.2. Formation et diplômes .....	3
1.3. Parcours professionnel et emplois occupés.....	3
2. Activités d'enseignement.....	4
3. Responsabilités administratives.....	5
4. Activités d'encadrement .....	6
4.1. Co-encadrements de thèse.....	6
4.2. Encadrements de DEA et de Master II .....	7
5. Activités de recherche.....	7
5.1. Contrôle flou conventionnel .....	9
5.2. Outils de représentation et de propagation.....	10
5.3 Identification et contrôle graduels .....	11
5.4. Travaux en cours et perspectives .....	12
6. Rayonnement scientifique.....	14
6.1. Comités d'organisation des conférences.....	14

6.2. Comités de programme .....	14
6.3. Participations régulières à la relecture d'articles de revues .....	14
6.4. Relations internationales .....	14
7. Collaborations avec le secteur socio-économique .....	15
8. Publications.....	16
8.1. Articles dans des revues internationales : 21 (dont 2 Bookreviews) .....	16
8.2. Ouvrages collectifs : 4 .....	17
8.3. Communications dans des conférences internationales : 48.....	17
8.4. Communications dans des conférences nationales .....	21
8.5. Thèse de doctorat .....	22
<b>PARTIE B : Travaux de recherche.....</b>	<b>23</b>
<b>Introduction générale .....</b>	<b>25</b>
<b>Chapitre 1 : Contrôle flou conventionnel .....</b>	<b>29</b>
1.1 Introduction .....	29
1.2 Modèle de représentation : TSK à CC .....	31
1.3 Propagation et propagation inverse .....	32
1.3.1 Mécanisme de propagation .....	32
1.3.2 Mécanisme de propagation inverse.....	34
1.4 Contrôle flou conventionnel.....	36
1.4.1 Contrôle indirect .....	36
1.4.2 Contrôle direct .....	41
1.5 Conclusion.....	50
<b>Chapitre 2 : Outils de représentation et de propagation .....</b>	<b>51</b>
2.1 Introduction .....	51
2.2 Imprécisions et incertitudes.....	52
2.3 Modèle et outils de représentation .....	54
2.3.1 Structure du modèle .....	54

2.3.2	Paramètres et variables du modèle.....	55
2.4	Intervalles graduels <i>versus</i> intervalles flous.....	63
2.4.1	Sous-ensembles flous de "type-1" .....	63
2.4.2	Sous-ensembles flous de "type-2" .....	64
2.4.3	Intervalles graduels et intervalles flous.....	69
2.5	Intervalles graduels <i>versus</i> distributions de possibilité .....	72
2.6	Intervalles graduels <i>versus</i> fonctions de croyance .....	75
2.7	Intervalles graduels purs : interprétation et approximation.....	77
2.7.1	Approximation par des distributions de possibilité .....	79
2.7.2	Interprétation par des fonctions de croyance .....	80
2.8	Outils de propagation .....	81
2.8.1	Opérations arithmétiques élémentaires .....	82
2.8.2	Les opérateurs <i>min</i> et <i>max</i> graduels .....	87
2.9	Mécanismes et méthodologies de propagation.....	90
2.9.1	Application à la propagation inverse .....	90
2.9.2	Application à la propagation directe .....	91
2.10	Conclusion .....	93
<b>Chapitre 3 : Identification et Contrôle graduels.....</b>		<b>95</b>
3.1	Introduction .....	95
3.2	Régression à base d'intervalles conventionnels .....	96
3.2.1	Sémantique de la régression à base d'intervalles.....	97
3.2.2	Représentativité du modèle.....	100
3.2.3	Tendance du modèle .....	102
3.2.4	Approche possibiliste.....	104
3.2.5	Approche au sens des MC.....	105
3.2.6	Améliorations et extensions.....	106
3.3	Régression à base d'intervalles graduels.....	107
3.3.1	Régression possibiliste.....	108

3.3.2	Régression au sens des MC.....	109
3.4	Contrôle Graduel .....	110
3.4.1	Contrôle graduel indirect .....	110
3.4.2	Contrôle graduel direct .....	113
3.5	Conclusion.....	119
Conclusion générale.....		121
PARTIE C : Annexes.....		125
Annexe 1 : Illustrations du chapitre 1 .....		127
1.1	Illustration 1 : Décomposabilité d'un système TSK à CC .....	127
1.2	Illustration 2 : Principe de l'inversion à gauche.....	128
1.3	Illustration 3 : Principe de l'inversion à droite.....	129
1.4	Illustration 4 : Commande par "LES" .....	131
1.5	Illustration 5 : Commande par Modèle Interne "CMI" .....	133
1.6	Illustration 6 : Pilotage flou d'un système de production .....	135
1.7	Illustration 7 : Régulation de niveau pour le remplissage de moules.....	136
1.8	Illustration 8 : Contrôle flou pour la détection de la couleur .....	138
Annexe 2 : Illustrations du chapitre 2 .....		139
2.1	Illustration 1 : Equivalence entre intervalles flous et intervalles graduels.....	139
2.2	Illustration 2 : Calcul des degrés de possibilité et de nécessité.....	140
2.3	Illustration 3 : Manipulation des intervalles graduels .....	140
2.3.1	Exemple 1 .....	140
2.3.2	Exemple 2 .....	141
2.3.3	Exemple 3 .....	142
2.3.4	Exemple 4 .....	144
2.3.5	Exemple 5 .....	145
2.3.6	Exemple 6 .....	145
2.4	Illustration 4 : Opérations <i>min</i> et <i>max</i> entre intervalles triangulaires .....	146

2.5	Illustration 5 : Mécanisme calculatoire du <i>min</i> et du <i>max</i> .....	148
2.6	Illustration 6 : MGP – exemple 1 .....	149
2.7	Illustration 7 : MGP – Exemple 2 .....	151
2.8	Illustration 8 : Inversion graduelle à gauche .....	153
2.9	Illustration 9 : Intégrale de Choquet 2-additive .....	155
<b>Annexe 3 : Illustrations du chapitre 3 .....</b>		<b>157</b>
3.1	Illustration 1 : Régression possibiliste linéaire – Tendence du modèle .....	157
3.2	Illustration 2 : Régression possibiliste – Représentation MR .....	158
3.3	Illustration 3 : Régression possibiliste – Entrée/sortie précises .....	159
3.4	Illustration 4 : Régression possibiliste linéaire par morceaux.....	162
3.5	Illustration 5 : Régression possibiliste polynômiale .....	164
3.6	Illustration 6 : Régression polynômiale au sens des MC .....	164
3.7	Illustration 7 : Régression graduelle possibiliste – Données précises.....	165
3.8	Illustration 8 : Régression graduelle possibiliste – Données subjectives.....	169
3.9	Illustration 9 – Régression polynomiale au sens des MC – Données subjectives...	170
3.10	Illustration 10 : Applicabilité du contrôle graduel.....	171
3.11	Illustration 11 : Commande supervisée d’un système de production.....	174
3.12	Illustration 12 : Pilotage supervisé pour la détection de la couleur.....	174
<b>Bibliographie .....</b>		<b>177</b>



# Avant-propos

Les recherches présentées dans ce document s'inscrivent dans le domaine du contrôle intelligent. Plus précisément, dans le champ de conception de modèles et/ou de contrôleurs dans des environnements imprécis et incertains. La totalité des travaux a été réalisée en collaboration avec d'autres collègues enseignants-chercheurs. Dans toute la suite de ce manuscrit, j'utiliserai le "nous". Cela n'est pas une "figure de style" mais un sens illustratif d'un travail en commun. Ce document présente une grande partie de nos travaux de recherche qui ont comme dénominateur commun le contrôle des systèmes. Pour des raisons de cohérence scientifique, nous ne détaillerons pas les travaux que nous avons réalisés sur d'autres thématiques, telles que l'ordonnancement des systèmes de production, l'algèbre (max, +) [151][152] et la programmation dynamique floue [139].

Ce manuscrit est présenté en trois parties. La première correspond à un document de synthèse regroupant un *Curriculum vitae* fournissant une synthèse de mon parcours professionnel et des résumés succincts de mes activités d'enseignement et de recherche. Dans cette partie, j'ai également listé les encadrements dispensés et les publications nationales et internationales produites. Dans la seconde partie, j'ai regroupé l'ensemble des problématiques de recherche que j'ai eu l'occasion d'aborder durant mon parcours de chercheur au sein du laboratoire LISTIC (Laboratoire d'Informatique, Systèmes, Traitement de l'Information et de la Connaissance). Afin de rendre la lecture de cette partie plus intéressante, un fil d'Ariane a été tissé où les travaux ont été regroupés non pas par ordre purement chronologique mais par thèmes dans trois chapitres distincts. Dans la troisième partie, afin de ne pas couper le fil de synthèse tissé, toutes les illustrations et les applications relatives à chaque chapitre ont été regroupées dans une annexe spécifique portant le même numéro que le chapitre considéré.

La rédaction de ce manuscrit a été bénéfique et elle m'a permis de prendre le temps et le recul nécessaires pour synthétiser mes contributions et réfléchir sur leurs perspectives. J'ai voulu un document didactique, évitant ainsi de rentrer dans les détails techniques disponibles dans les publications et dans les manuscrits des thèses encadrées. Je remercie donc les personnes qui vont prendre le temps de lire ce document jusqu'au bout et j'espère que cette lecture sera fructueuse !

Je profite également de ce préambule pour témoigner ma considération envers les membres du jury et remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu le bonheur de travailler durant ces années de recherche au LISTIC.



# PARTIE A : Synthèse

## 1. Curriculum Vitae

### 1.1. Situation administrative

Nom : Boukezzoula.  
Prénom : Reda.  
Date de naissance : 30/08/1973 à Redjas – Algérie.  
Adresse : 72 Boulevard du Fier, 74000 Annecy.  
Fonction : Maître de conférences - classe normale.  
Date d'installation : 01/09/2001.  
Laboratoire : LISTIC - Laboratoire d'Informatique, Systèmes, Traitement de l'Information et de la Connaissance – Polytech Annecy-Chambéry – Université Savoie Mont Blanc.  
Etablissement : IUT d'Annecy – Département GEII – Université Savoie Mont Blanc.

### 1.2. Formation et diplômes

1995 : Ingénieur d'Etat en Automatique de l'Institut d'Electrotechnique de Sétif – Université de Sétif – Algérie.  
1996 : DEA en Automatique Industrielle de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon.  
2000 : Doctorat en Electronique, Electrotechnique, Automatique de l'Université de Savoie.  
Thèse préparée au sein du laboratoire LAMII (Laboratoire d'Automatique et de Micro-Informatique Industrielle).  
Jury de thèse : P. Borne (Président), A. Ollero (Rapporteur), C. Mélin (Rapporteur), A. Titli (Examineur), L. Foulloy (Directeur de thèse) et S. Galichet (co-directrice de thèse).

### 1.3. Parcours professionnel et emplois occupés

- 1996-1999 : Vacataire à l'ESIA (Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy) – Université de Savoie.
- 1999-2000 : ½ ATER à l'ESIA, Université de Savoie.
- 2000-2001 : ½ ATER à l'IUT d'Annecy – Département GEII, Université de Savoie.
- Depuis 2001: Maître de Conférences stagiaire puis titulaire en 61ème section à l'IUT d'Annecy, Département GEII – Université Savoie Mont Blanc.  
Chercheur au Laboratoire LISTIC – Université Savoie-Mont Blanc.

## 2. Activités d'enseignement

Mes activités d'enseignement ont débuté par des vacances, durant ma thèse, à l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy (ESIA), poursuivies par deux années d'ATER à mi-temps, successivement à l'ESIA et à l'IUT d'Annecy. Les enseignements réalisés se déclinaient en travaux dirigés (TD) et en travaux pratiques (TP). A l'ESIA, les enseignements dispensés aux élèves ingénieurs portaient sur l'automatique continue et discrète, l'informatique générale (Algorithme, langages Pascal et C) et l'informatique industrielle (Assembleur et micro-contrôleurs). A l'IUT d'Annecy, mes interventions auprès des élèves "DUT" ont concerné l'automatique échantillonnée, la commande distribuée sur automates programmables industriels et la supervision industrielle.

A cette expérience initiale a succédé mon intégration en tant que maître de conférences au sein du département GEII de l'IUT d'Annecy. Dès mon intégration au département, je me suis investi dans les enseignements des formations de DUT et de Licences Professionnelles (LP), dans les responsabilités administratives ainsi que dans le développement de plateformes techniques pour les travaux pratiques.

Mes investissements ont concerné plus particulièrement la 2<sup>ème</sup> année GEII et les licences professionnelles AII (Automatique et Informatique Industrielle) et MERE (Maitrise des Energies Electriques et Renouvelables), dispensées en formations initiale et en alternance. J'ai ainsi créé, rénové et assuré la responsabilité des modules suivants :

Commande des systèmes échantillonnés : 2 <sup>ème</sup> année DUT GEII (30h).	Réseaux de terrain et supervision : 2 <sup>ème</sup> année DUT et LP AII (30h et 40h)
Réseaux Locaux industriels : 2 <sup>ème</sup> année DUT GEII (30h)	Réseaux Informatiques : 2 <sup>ème</sup> année DUT (45h)
Régulation : LP Maitrise des Energies Electriques et Renouvelables – MERE (24h)	Ethernet et Télé-contrôle par Internet : 2 <sup>ème</sup> année DUT (30h)
Automates Programmables Industriels : LP Automatique et Informatique Industrielle - AII (30h)	Bases de données industrielles : LP Automatique et Informatique Industrielle - AII (24h)
Etudes et réalisations "pluritechnologiques" : 2 <sup>ème</sup> année DUT (60h)	Algèbre linéaire et ses Applications : 2 <sup>ème</sup> année DUT (30h)

L'enseignement dispensé dans chaque module se décline en cours magistraux (20% en moyenne), en travaux dirigés – TD (30% en moyenne) ainsi qu'en travaux pratiques – TP (50% en moyenne). La responsabilité de chaque enseignement implique l'animation pédagogique, la correction des copies d'examens, l'organisation et la mise en place des TD et des TP et l'encadrement d'au moins un groupe de TD et de TP. Un échange régulier avec mes collègues était nécessaire pour améliorer le contenu de mes enseignements. Cette méthodologie de travail m'a apporté un recul important que je n'aurais probablement pas acquis autrement.

En plus de la charge très lourde d'enseignement que j'ai assurée (plus de 450 h/an en moyenne), j'ai endossé la responsabilité d'une salle technique en GEII (salle "réseaux et informatique industrielle"). En effet, la politique organisationnelle du département GEII impose aux enseignants "du technique" de s'acquitter de la responsabilité d'une salle. Cette tâche implique la réalisation de "parties opératives" exploitées en TP, la maintenance matérielle et logicielle des équipements de la salle ainsi que son organisation technique. Pour information, au sein du département GEII de l'IUT d'Annecy,

nous réalisons nous-même nos "maquettes" de TP en cohérence avec nos objectifs pédagogiques et avec l'aide précieuse des techniciens du département.

Parallèlement à ces responsabilités et pour de raisons de cohérence pédagogique au sein de l'équipe GEII, j'ai assuré chaque année des TD et des TP dans des modules dont je ne suis pas le responsable. Ces interventions ont concerné les modules d'automatique continue en 2<sup>ème</sup> année GEII (30h), le module d'outils logiciels (24h), le module de statistiques (15h) et le module micro-contrôleurs en 1<sup>ère</sup> année (24h).

Outre un enseignement fondamental de mathématiques (algèbre linéaire et ses applications) destiné aux étudiants de GEII qui souhaitent poursuivre en écoles d'ingénieurs, mes activités pédagogiques ont nécessité un investissement technique et technologique conséquent. Elles ont principalement évolué autour de trois thématiques principales, à savoir : l'automatique et l'automatisation, l'informatique industrielle et l'innovation technologique par le biais des "études et réalisations pluritechnologiques".

- Automatique et automatisation : ces enseignements vont de la modélisation et identification des systèmes, l'analyse, la conception, la synthèse et l'implantation pratique des correcteurs (domaines temporel et fréquentiel en continu et en échantillonné) jusqu'à la conception des systèmes automatisés (Grafcet, Gemma et sécurité) et leurs implantations sur des automates programmables industriels *via* des cibles Télémécanique et Siemens.
- Informatique industrielle : ces enseignements développent les concepts des réseaux informatiques (TCP-IP), des réseaux industriels et des réseaux de terrain (ASI, Profibus, Profinet, EtherCat, CAN, ...), de la supervision industrielle et du télé-contrôle par Internet et leur mise en œuvre dans des problématiques de pilotage automatique en temps réel.
- Innovation technologique : l'objectif de ces enseignements est d'encadrer les étudiants autour d'un ensemble de projets transversaux et pluridisciplinaires créatifs. Chaque année, j'ai proposé et totalement encadré une dizaine de projets différents.

Mes activités pédagogiques ont été complétées, chaque année, par des suivis de stages industriels pour les étudiants de DUT et des licences professionnelles (LP). J'ai ainsi assuré, en moyenne, le tutorat de 8 stages par an. Ces suivis de stages m'ont donné l'occasion de tisser des liens entretenus avec des entreprises de la région. Ils m'ont également permis de mieux appréhender l'adéquation entre le contenu de mes enseignements et les compétences attendues dans le milieu industriel.

Durant mon parcours de maître de conférences au département GEII et comme indiqué dans la rubrique "responsabilités administratives", j'ai accepté différentes responsabilités pédagogiques pour participer activement à la vie du département. A ce titre, depuis 2008, j'assure la direction des études de la 2<sup>ème</sup> année GEII ainsi que la responsabilité des poursuites d'études. J'ai également eu la chance de m'impliquer dans la création de nouvelles formations et leurs réformes, telles que la licence MERE et la refondation de la licence AII.

### **3. Responsabilités administratives**

Les responsabilités présentées correspondent à celles exercées ou que j'exerce encore. Elles regroupent mes responsabilités au titre de l'enseignement et de la recherche.

- 2001-2005 : Responsable des projets techniques au département GEII de l'IUT d'Annecy, Université de Savoie.
- 2002-2007 : Responsable de la licence professionnelle Automatique et Informatique

Industrielle (AII) au département GEII de l'IUT d'Annecy, Université de Savoie.

- 2002-2006 : Membre élu à la commission de spécialistes 61<sup>ème</sup> section – Université de Savoie.
- 2006-2008 : Membre élu à la commission de spécialistes 27<sup>ème</sup>/61<sup>ème</sup> sections – Université de Savoie.
- 2002-2010 : Représentant nommé au Conseil du laboratoire LISTIC de l'Université de Savoie pendant deux mandats (4ans / mandat).
- Depuis 2008 : Directeur des études de 2<sup>ème</sup> année au département GEII de l'IUT d'Annecy, Université Savoie Mont Blanc.
- Depuis 2008 : Responsable des poursuites d'études au département GEII de l'IUT d'Annecy, Université Savoie Mont Blanc.

## 4. Activités d'encadrement

### 4.1. Co-encadrements de thèse

- [Nguyen] Thèse en cours, « Fusion d'informations multi-capteurs pour la commande du robot humanoïde NAO ». Thèse débutée en octobre 2013.  
Co-encadrement à 50% avec D. Coquin.
- [Nasri-13] Nasri Imed, « Développement d'une méthodologie d'ordonnancement/ optimisation adaptée aux systèmes industriels de type HVLV (High-Variety, Low Volume) ». Thèse de doctorat de l'Université de Grenoble, spécialité Sciences pour l'ingénieur.  
Co-encadrement à 50% avec G. Habchi.  
Soutenue le 9 Avril 2013 devant le jury : Y. Frein (P), J-L. Boimond (R), A. Dolgui (R), C. Martinez (E).
- [Bisserier-10] Bisserier Amory, « Une approche paramétrique de la régression linéaire floue - Formalisation par intervalles ». Thèse de doctorat, spécialité STIC - Traitement de l'information, Université de Savoie.  
Co-encadrement à 50% avec S. Glaichet.  
Soutenue le 9 Juillet 2010 devant le jury : L. Jaulin (P), D. Dubois (R), M. Masson (R).
- [Biardeau-09] Biardeau Mickael., « Simplification du remplissage automatique de moules en fonderie de métaux ferreux. Procédé de coulée gravitaire avec quenouille ». Thèse de doctorat, spécialité Electronique - Electrotechnique - Automatique, Université de Savoie.  
Co-encadrement à 50% avec S. Galichet.  
Soutenue le 07 Juillet 2009 devant le jury : S. Gentil (P), A. El Hajjaji (R), T-M. Guerra (R), M. Dussud (E), P. Carnicer Alfonso (E).
- [Tamani-08] Tamani Karim, « Développement d'une méthodologie de pilotage intelligent par régulation de flux adaptée aux systèmes de production ». Thèse de doctorat, spécialité Electronique - Electrotechnique - Automatique, Université de Savoie.  
Co-encadrement à 50% avec G. Habchi.  
Soutenue le 6 Juin 2008 devant le jury : A. Dolgui (P), H. Pierreval (R), B. Grabot (R), J. Montmain (E), D. Trentesaux (E).

- [Megri-08] Megri Fayçal, « Programmation dynamique floue appliquée à la commande des systèmes non linéaires ». Thèse de doctorat, spécialité Electronique, Université de Constantine, Algérie.  
Co-encadrement à 50% avec K. Belarbi.  
Soutenue le 25 octobre 2008 devant le jury : S. Filali (P), D. Chikouche (E), A. Bennis (E), N. Guerfi (E).

#### 4.2. Encadrements de DEA et de Master II

- [El Masry-12] El Masry M., « Identification techniques for interval regression », Rapport de Master II Recherche, Energies Renouvelables et Systèmes Intelligents, spécialité : Traitement de l'information, LISTIC, Université de Savoie, France, 2012.
- [Khaled-05] Khaled A., « Modélisation d'un système incertain par application d'une méthodologie d'analyse par intervalles », Rapport de Master II Recherche, Systèmes Intelligents - spécialité mécatronique. LISTIC, Université de Savoie, France, 2005.
- [Iliescu-04] Iliescu M., « Commande floue et commandes par intervalles », Rapport de Master II Recherche en double cursus avec l'université polytechnique de Bucarest en Roumanie, France, 2004.
- [Djami-03] Djami O., « Segmentation d'images asservie à l'aide d'indicateurs de performances flous », Rapport DEA Automatique Industrielle, LISTIC, Université de Savoie, France, 2003.

### 5. Activités de recherche

Dans cette partie, nous présentons brièvement les travaux de recherche menés depuis ma nomination, en 2001, comme maître de conférences à l'université de Savoie. Ces travaux ont été réalisés au laboratoire LAMII (Laboratoire d'Informatique et de Micro-Informatique Industrielle) devenu par la suite le laboratoire LISTIC (Laboratoire d'Informatique, Systèmes, Traitement de l'Information et de la Connaissance).

Pour des raisons de cohérence scientifique, nous avons fait le choix de présenter uniquement la facette principale de nos activités de recherche, à savoir : l'identification et le contrôle intelligents des systèmes dans un environnement imprécis et incertain. Par voie de conséquence, nos autres travaux tels que l'ordonnancement des systèmes de production à travers l'algèbre (max, +) (proposés dans [R2] et dans la thèse de [Nasri-13]) et la programmation dynamique floue (développée dans la thèse de [Megri-08]) ne seront pas décrits dans ce document de synthèse.

Nos travaux ont conduit à des publications dans des revues internationales (21 articles dont 2 Bookreviews), dans des conférences internationales (48 articles) et dans des conférences nationales (16 articles). Ce bilan est complété par 4 participations à des ouvrages collectifs. Chacun de nos articles de référence, publié dans une revue spécialisée, implémente un concept différent et "innovant" en cohérence avec notre problématique et notre vision du contrôle intelligent. La pertinence et la valeur des publications réalisées ont été mesurées par 5 indicateurs (cf. le tableau suivant) :

- **L'IF** : *«The Impact Factor measures the average number of citations received in a particular year by papers published in the journal during the two preceding years».*

- **Le SJR :** «The Scimago Journal Rank is a prestige metric based on the idea that not all citations are the same. SJR uses a similar algorithm as the Google page rank; it provides a quantitative and a qualitative measure of the journal's impact».
- **Le SNIP :** «The Source Normalized Impact per Paper measures contextual citation impact by weighting citations base on the total number of citations in a subject field ».
- **Le IPP :** «The Impact Per Publication measures the ratio of citations in a year (y) to scholarly papers published in the three previous years (y-1, y-2, y-3) divided by the number of scholarly papers published in those same years (y-1, y-2, y-3)».
- **Le h-index :** «The h-index expresses the journal's number of articles (h) that have received at least h citations. It quantifies both journal's scientific productivity and scientific impact».

Revue	Nombre d'articles	IF	IPP	SJR	SNIP	h-index
IEEE Transactions on Fuzzy Systems	5	8.74	8.55	5.15	4.85	130
Information Sciences	1	4.03	4.83	3.28	3.24	103
Fuzzy Sets and Systems	4*	1.98	2.42	1.89	2.22	120
IEEE Transactions on Control Systems Technology	1	2.47	3.13	1.91	2.66	95
International Journal of Approximate Reasoning	1	2.45	3.26	2.41	3.04	61
Engineering Applications of Artificial Intelligence	2	2.20	2.99	1.52	2.52	60
Simulation Modelling Practice and Theory	2	1.38	1.78	0.8	1.95	37
International Journal of Applied Mathematics and Computer Science	1	1.23	1.51	1.01	1.73	27
European Journal of Control	1	0.82	0.86	0.61	1.07	38
Journal of Uncertain Systems	1	0.49	0.83	0.49	1.05	7
International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics	1	0.25	0.45	0.25	0.33	8
International Journal of Manufacturing Technology and Management	1	0.19	0.28	0.19	0.39	14
<b>Moyenne</b>		<b>3.37</b>	<b>3.67</b>	<b>2.29</b>	<b>2.65</b>	<b>80</b>

- Sources du tableau : Scopus (<http://www.journalmetrics.com>) et Scimago (<http://www.scimagojr.com>) – année 2014.
- \* : 4 dont 2 "Bookreviews".
- Pour les trois dernières revues (cases grisées), l'IF (non disponible) a été remplacé par le SJR (indicateur plus sévère que l'IF).

Afin de rendre la synthèse de nos travaux plus cohérente et plus simple à appréhender, nous avons décidé de regrouper les travaux effectués, non par ordre chronologique, mais selon trois thématiques complémentaires. Ces dernières exhibent notre cheminement scientifique ainsi que l'évolution de notre réflexion sur la problématique de recherche considérée.

La première thématique porte sur le contrôle à base de règles floues et s'inscrit dans la continuité de mes travaux de thèse de doctorat [Boukezzoula-2000]. Dans ce contexte, des approfondissements théoriques, des "innovations" méthodologiques et des implantations pratiques, en relation avec les approches de contrôle directes et indirectes, ont été apportés. Bien que les stratégies développées aient exhibé de bonnes performances en termes de régulation et de suivi de trajectoires, elles souffraient des lacunes suivantes.

- Ces méthodes sont restées cantonnées dans une démarche d'imitation et de "copie" des structures de commande conventionnelles et existantes, qui avaient d'ores et déjà fait leurs preuves en automatique et dans lesquelles le modèle du procédé a été simplement remplacé par un système flou identifié par des algorithmes d'apprentissage et/ou des techniques adaptatives.
- Ces méthodes n'ont apporté aucun élément de réponse au véritable problème d'identification et de synthèse de modèles et/ou de contrôleurs dans un environnement imprécis et/ou incertain.

Notre réflexion sur les inconvénients du contrôle à base de règles floues nous a conduits à opérer un basculement méthodologique afin de considérer notre deuxième thématique qui pointe et argumente l'abandon de la vision conventionnelle à base de modèles flous et propose une nouvelle orientation. Cette dernière repose sur l'exploitation non pas des modèles à bases de règles mais de modèles régressifs paramétriques à base d'intervalles graduels. Cette philosophie de représentation permet d'intégrer et de traiter dans un même formalisme cohérent les concepts d'imprécision et d'incertitude. Pour manipuler et propager les intervalles graduels à travers les modèles proposés, des outils adéquats ont été développés. Ces derniers trouvent leurs racines et leurs fondements dans l'arithmétique de Kaucher et dans le calcul par intervalles graduels étendus.

Une fois les outils de manipulation et de propagation définis, la troisième thématique complète notre vision par la proposition d'une méthodologie d'identification de ces modèles régressifs graduels. Dans ce contexte, une révision et une nouvelle relecture de la problématique de régression floue a été apportée (régression possibiliste et régression par moindres carrés). Les potentialités des méthodes développées et leurs outils inhérents ont été validés dans la conception, dans un environnement imprécis et incertain, de contrôleurs directs et indirects.

### **5.1. Contrôle flou conventionnel**

Historiquement, cette partie de nos travaux trouve ses justifications dans le manque de garantie de résultats attribué au contrôle à base d'expertise (contrôleurs de Mamdani). Le point de départ était la recherche de mécanismes capables d'expliquer les performances des contrôleurs flous à base d'expertise. En effet, malgré le succès du contrôle flou dans les applications industrielles, nous étions "sous pression" de la part de la communauté automatique qui estimait que le contrôle flou était une approche "amusante" mais non sérieuse, car aucune garantie de résultats en termes de stabilité et robustesse ne pouvait être apportée. Afin de faire face à ces critiques, nous avons opté pour l'utilisation des systèmes flous numériques et plus particulièrement les systèmes de Takagi-Sugeno-Kang (TSK). Ces derniers exhibent des capacités indéniables d'adaptation avec les approches de commande conventionnelle. Dans ce contexte, nous étions parmi les premiers chercheurs en France à avoir opéré ce choix.

L'idée sous-jacente à ces travaux consistait à représenter la dynamique d'un système par un modèle flou exploité par la suite pour la synthèse d'un contrôleur. Ce dernier a été synthétisé afin d'imposer au système un comportement désiré tout en garantissant sa stabilité et sa robustesse. Nos activités se sont inscrites dans cette optique où des facettes directes et indirectes du contrôle flou conventionnel ont été exploitées. Un outil de représentation à base de systèmes flous TSK à Conclusions Constantes (CC) a été privilégié. Le choix de ce formalisme a été lié à notre volonté de pouvoir exploiter un certain nombre de techniques numériques issues de l'automatique conventionnelle. De plus, cette restriction était avant tout guidée par un souci de simplicité mais elle a été validée par un certain nombre de propriétés structurelles que nous avons mises en lumière à travers nos publications [R19]-[R20].

Dans un premier temps, nous avons mis en évidence la propriété de décomposabilité de ces systèmes, aboutissant à un mécanisme purement analytique et paramétrique pour la propagation des informations manipulées [R19]-[R20]. En d'autres termes, un système TSK à CC n'est autre qu'un système réalisant une interpolation multilinéaire par morceaux dans lequel chaque sous-système peut s'exprimer analytiquement sous une forme linéaire en les paramètres (forme paramétrique). Dans un second temps, nous avons décliné les propriétés des systèmes TSK à CC dans la synthèse des

stratégies de commande. Dans les approches indirectes, nous avons proposé une méthode de propagation inverse, analytique, innovante et non itérative pour la construction des contrôleurs flous à base de modèles [R14]-[R19]-[R20]-[O3]-[O4]. Cette dernière se démarque des approches classiquement utilisées dans la littérature (inversion des règles, méthodes itératives, etc.) par sa capacité à trouver des solutions exactes et multiples aux problèmes posés. Dans les approches directes et contrairement aux méthodes existantes dans la littérature qui exploitaient des systèmes flous symboliques (systèmes de Mamdani), nous avons proposé une conception avec des systèmes flous TSK à CC. En effet, de par leurs caractéristiques telles que l'absence de la phase de défuzzification, un nombre de paramètres restreint et l'utilisation d'un mécanisme d'inférence unique évitant les opérateurs min/max sources de non-linéarités indésirables et parfois non contrôlables, ces systèmes ont été exploités avec succès pour la construction de contrôleurs dans trois problématiques distinctes. La première concerne le pilotage intelligent des systèmes de production [R11]- [Tamani-08]. La deuxième traite de la commande du remplissage de moules en fonderie ferreux [Biardeau-09]. Enfin, la troisième problématique porte sur la détection de la couleur en relation avec une application de robotique humanoïde [Nguyen].

Une partie de ces travaux a fait l'objet des thèses de [Tamani-08], de [Biardeau-09] et de [Nguyen] (thèse en cours). Les travaux relatifs à cette première thématique ont été publiés dans [R9]-[R11]-[R14]-[R18]-[R19]-[R20]-[R21].

## 5.2. Outils de représentation et de propagation

Dans des problématiques pratiques, il est fort probable d'être confronté à des situations où la précision n'est pas accessible à la mesure. Parfois cette précision est inutile et elle peut même détériorer la compréhension du fonctionnement d'un système. En effet, comme stipulé par Zadeh dans [*Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, IEEE Transactions On Systems, Man and Cybernetics, Vol. 3, N°1, pp. 28-44, 1973*] et discuté par Dubois dans sa thèse d'état [*Modèles mathématiques de l'imprécis et de l'incertain en vue d'applications aux techniques d'aide à la décision, Thèse d'état, INP de Grenoble, 413 pages, 1983*] : "à mesure que la complexité d'un système s'accroît, notre aptitude à formuler des affirmations précises, mais significatives, sur son comportement diminue jusqu'à un seuil au-delà duquel la précision et le sens deviennent mutuellement exclusifs". Ce principe d'incompatibilité est explicité par Dubois dans sa thèse d'état : "ce principe d'incompatibilité est lié à la façon dont l'humain perçoit et raisonne ; il utilise principalement des représentations résumées de la réalité, et donc imprécises". Dans ce contexte, le questionnement sur la légitimité d'une représentation et sa signification mérite d'être posé. A notre sens, une bonne représentation doit opérer un compromis entre précision et incertitude. En effet, elle doit éviter un excès de précision (engendrant un maximum d'incertitude) et une exagération de l'imprécision qui risque de devenir non représentative du système.

Dans des situations pratiques, les coûts et les délais d'étude ne permettent d'obtenir qu'un nombre restreint de valeurs mesurées. Face à de telles situations, l'idée d'utiliser une information experte (information subjective) pour pallier le manque d'informations peut être considérée comme une solution alternative. Face à cette problématique, les approches du contrôle flou conventionnel demeurent insuffisantes. En effet, les informations manipulées bien qu'associées à des sous-ensembles flous restent précises. D'un point de vue fonctionnel, nous sommes en présence d'une sémantique de similarité à des fonctions d'appartenance et aucune notion d'incertitude n'est intégrée dans le fonctionnement du système. D'un point de vue externe, nous avons pointé le fait qu'il était

impossible de différencier un système flou d'un quelconque mécanisme calculatoire réalisant un transfert entrée/sortie numérique précis. Plus particulièrement, un système TSK à CC n'est qu'une collection de sous-systèmes multilinéaires par morceaux. En effet et contrairement à ce qui a été souvent énoncé dans un bon nombre de travaux de recherche sur les contrôleurs flous, les aspects imprécis et incertain ne sont aucunement pris en compte. Dans ce contexte, quelle que soit la famille de systèmes flous choisie et quel que soit le type d'implémentation qui en est faite, les informations manipulées dans les contrôleurs flous restent précises. Ces constatations ont symbolisé un marqueur important dans l'évolution de notre vision scientifique du problème considéré.

Pour remédier à cette carence, nous avons proposé une nouvelle orientation et nous nous sommes alors intéressés à des outils de représentation, de combinaison et de propagation des quantités imprécises et incertaines. Dans un premier temps, un outil mathématique à base d'intervalles graduels, solide et adapté à la représentation des informations imparfaites a été proposé. Ce dernier est vu comme un modèle régressif paramétrique où les entrées, les sorties et les paramètres sont représentés par des intervalles graduels. Le choix d'un modèle paramétrique a été guidé non seulement par sa simplicité d'interprétation et d'identification mais aussi par sa proximité structurelle avec les systèmes flous. Ce choix paramétrique a été discuté et explicité, par rapport aux modèles non paramétriques, dans les travaux présentés dans la thèse de [Bisserier-10]. La représentation par intervalles graduels qui généralise le concept d'intervalles conventionnels a été motivée par leur capacité à appréhender, dans un même formalisme unique et cohérent, les notions d'imprécision (dimension horizontale) et d'incertitude *via* la notion de gradualité (dimension verticale). Notre vision "intervalliste" nous a permis de conserver la souplesse et l'efficacité du calcul par intervalles comme un objectif majeur. Nous avons mis en exergue le fait que la représentation par intervalles conventionnels pouvait représenter l'imprécision induite par les limitations des outils employés pour capturer l'information. Toutefois, elle ne peut représenter correctement un défaut qualitatif en relation avec la véracité de cette information (*i.e.* représenter l'incertitude). Par exemple, comment représenter l'information "je suis sûr à 60% que le paramètre  $a$  est dans l'intervalle  $[a^-, a^+]$  ?" D'un point de vue calculatoire, la conception proposée permet non seulement l'extension du calcul d'intervalles conventionnels aux intervalles flous et graduels (opérations arithmétiques, opérations ensemblistes, fonction d'intervalles, etc.) mais aussi des ouvertures intéressantes vers la théorie des possibilités et la théorie des fonctions de croyance, capables de mieux appréhender la représentation de l'imprécision et de l'incertitude et leur manipulation.

Dans un second temps et après avoir choisi les outils de représentation, des solutions aux mécanismes de manipulation, de combinaison et de propagation de ces informations à travers les modèles choisis ont été apportées. A travers nos travaux, nous avons opté pour une vision purement analytique, arithmétique et calculatoire, pour résoudre les problématiques de propagation directe (construction de modèles) et inverse (conception de contrôleurs). Notre vision "intervalliste" et "graduelle" trouve ses racines et ses fondations théoriques dans le calcul par intervalles et l'arithmétique de Kaucher à travers les intervalles graduels étendus. Les travaux de cette thématique ont fait l'objet des publications [R1]-[R3]-[R7]-[R13]-[R15]-[O2]. Une partie de ces recherches a servi de support théorique pour la thèse de [Bisserier-10], de [Tamani-08] et de [Megri-08].

### **5.3 Identification et contrôle graduels**

Une fois les mécanismes de représentation et de propagation définis, des réponses aux questions suivantes ont été énoncées et argumentées : comment identifier ces modèles à base d'intervalles

graduels ? Quelle signification peut-on attribuer à ces modèles et à leur représentativité ? Comment les exploiter dans un contexte de contrôle ?

Dans un premier temps, nous avons proposé une révision de la problématique de la régression floue à travers la notion d'intervalles graduels (approche possibiliste et approche par moindres carrés) [R1]-[R4]-[R8]-[R10]-[O1]. L'objectif était d'identifier des modèles régressifs à partir des données entrées-sorties imprécises et incertaines. L'originalité de la méthode proposée se trouve dans sa capacité à appréhender le cas des entrées-sorties graduelles et/ou floues, rarement traité dans la littérature. De plus, la vision "possibiliste" développée se démarque des méthodes existantes dans la littérature par les aspects suivants :

- l'expressivité du modèle, capable d'intégrer les tendances imprécises des entrées-sorties.
- la nouvelle définition de l'imprécision et de l'incertitude, aboutissant à un critère robuste basé sur l'imprécision et l'incertitude globales du modèle sur son domaine de définition, indépendamment de la répartition des données et leurs redondances.
- la capacité à manipuler les entrées-sorties imprécises et incertaines dans un formalisme unique et cohérent.

Dans un second temps, les modèles et les outils proposés ont été exploités dans la synthèse de structures de commandes directes et indirectes [R3]-[R6]. Dans l'approche indirecte, le contrôleur est conçu par une stratégie d'inversion de modèle pour résoudre les problèmes de régulation et de suivi de trajectoires. L'objectif de commande est alors vu comme la synthèse d'un contrôleur graduel capable d'amener le système à suivre une trajectoire graduelle de référence. Dans ce cas, pour un degré de préférence choisi (sur la trajectoire graduelle), la loi de commande est capable de maintenir la sortie du système dans une enveloppe de tolérance. Cette dernière est imposée par la préférence choisie et contrainte par un degré de certitude inhérent à cette préférence.

Quant aux techniques directes, nous avons conservé la philosophie de la commande experte et nous avons fourni quelques éléments de réponse pour renforcer ces structures de commande. Nous avons émis l'hypothèse que la collecte d'informations supplémentaires (indicateurs de performance globaux, multiplicité des ressources, objectifs imprécis et/ou incertains, etc.) allait permettre de faire émerger d'autres formes de connaissances, capables d'améliorer la performance globale du système contrôlé. Nos méthodes s'orientaient alors vers l'augmentation des contrôleurs flous, conçus à base d'expertise, par des organes de niveau supérieur. Ces superviseurs ont été conçus dans deux contextes différents. Le premier, basé sur l'utilisation d'opérateurs d'agrégation incertains comme indicateurs de performance globaux, vise à résoudre les problèmes de conflits entre objectifs imprécis et/ou incertains souvent spécifiés par les experts. Le second concept met l'accent sur des premiers éléments de réponse, *via* la théorie de l'évidence, aux problèmes de conflits décisionnels inhérents aux imperfections. Ces dernières sont dues essentiellement à l'insuffisance des appareils de mesure et à la fiabilité des ressources.

Les travaux en relation avec cette thématique ont été publiés dans [R1]-[R3]-[R4]-[R5]-[R6]-[O1]. Une partie de ces recherches a été initiée et présentée dans le cadre des thèses de [Bisserier-10], de [Tamani-08] et de [Nguyen].

#### **5.4. Travaux en cours et perspectives**

A travers les recherches développées, des réponses ont été formulées aux problèmes de construction de modèles et de contrôleurs dans un environnement imprécis et incertain. La vision proposée ne vise

pas des performances purement numériques et s'écarte ainsi de la majorité des approches classiquement exploitées dans la littérature du contrôle flou conventionnel.

Tout au long de nos travaux, le développement d'outils logiciels servant de support à la mise en œuvre de nos méthodologies a été considéré comme une priorité et un objectif majeur. Dans ce cadre, les travaux sur le contrôle flou conventionnel ont été concrétisés par la production d'une toolbox Matlab, nommée "Floulib", publiée dans [R16] et téléchargeable sur le site du laboratoire LISTIC. Les travaux sur l'approche "intervalliste et graduelle" ont débouché sur une boîte à outils, développée en Matlab, pour leurs implantations pratiques. Cette boîte à outils est en phase de finalisation.

A la lumière de nos acquis scientifiques et méthodologiques, deux axes de recherche sont envisageables et des perspectives naturelles se dégagent selon chaque axe.

Le premier axe, de nature méthodologique, portera sur l'amélioration des méthodes proposées, sans en changer le périmètre actuel. Cette évolution consistera à continuer de suivre la même démarche scientifique. Nous cherchons plus particulièrement à renforcer et retravailler la flexibilité, la pertinence et la confrontation de nos méthodes par rapport aux approches statistiques et/ou non paramétriques. Cette perspective peut englober également un ensemble de travaux qui pourraient être consacrés à l'adaptation de nos méthodes pour de nouveaux terrains et de nouveaux contextes :

- les problèmes d'identification et de contrôle des systèmes de fusion d'informations multi-capteurs et multi-sources dans un contexte imprécis, incertain et dynamique;
- le développement de méthodologies propres à la manipulation d'indicateurs de performances imprécis et incertains dans des problèmes de décision multicritères;
- l'exploitation, le développement et l'approfondissement de la théorie des fonctions de croyance à travers la représentation par intervalles.

D'une manière plus générale, le travail pourrait porter sur une nouvelle vision "du contrôle intelligent" où des structures de pilotage simples, locales et innovantes seront proposées pour améliorer les prises de décision et les performances des systèmes à piloter. Cette vision sera développée en présence :

- d'informations expertes (subjectives) avec leur certitude et leur préférence;
- d'imprécisions relatives aux appareils de mesure et leur fiabilité;
- d'incertitudes inhérentes à la véracité des données et leur représentativité;
- de dynamiques temporelles et relationnelles dans les systèmes;
- de conflits entre objectifs et sources d'informations multiples.

Ces objectifs seront complétés par le développement d'un outil informatique (logiciel) capable de faire le lien entre les représentations par intervalles graduels, par distributions de possibilité et par fonctions de croyance dans des problèmes de modélisation, d'identification et de prise de décision dans un contexte imprécis et incertain. Cet outil ne serait pas spécifique au contrôle et trouvera des terrains d'exploitation pertinents dans d'autres problématiques de recherche présentes au LISTIC et ailleurs.

Le deuxième axe, plutôt applicatif, ambitionne le déploiement des approches de pilotage intelligentes, à travers la proposition de projets régionaux et de projets ANR, dans des champs d'applications d'envergure. Dans ce contexte, trois domaines nous tiennent à cœur, à savoir :

- la mécatronique (et plus spécifiquement sa facette de robotique humanoïde);

- les applications dans le domaine médical;
- les applications en relation avec la gestion technique du bâtiment et les économies d'énergies.

## 6. Rayonnement scientifique

### 6.1. Comités d'organisation des conférences

- 2011 : Membre du comité d'organisation du 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-LFA), 18-22 juillet 2011, Aix-les-Bains, France.
- 2009 : Membre du comité d'organisation des Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2009), 5-6 novembre 2009, Annecy, France.
- 2008 : Membre du comité d'organisation du 12th IMEKO TC1-TC7 joint Symposium on Man, Science & Measurement, 3-5 septembre 2008, Annecy, France.

### 6.2. Comités de programme

- Depuis 2012 : Membre permanent de l'IFAC (International Federation of Automatic Control). Groupe TC1.1: Modeling, Identification and Signal Processing. (<http://tc.ifac-control.org/1/1/members>).
- 2015 : Membre du comité de programme de la conférence: International Electrical and Computer Engineering Conference, Sétif, Algérie.
- 2012 : Membre du comité de programme de la conférence: 2nd International Conference on Information Processing and Electrical Engineering, Tebessa, Algérie.
- 2011 : Membre du comité de programme de la conférence: 5th International Workshop on Verification and Evaluation of Computer and Communication Systems, Tunis, Tunisie.
- 2005 : Membre du comité de programme de la conférence: 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'2005), Reno, USA.
- 2003 : Membre du comité de programme de la conférence: 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'2003), St. Louis, Missouri, USA.

### 6.3. Participations régulières à la relecture d'articles de revues

- Fuzzy Sets and Systems.
- IEEE Transactions on Fuzzy Systems.
- IEEE Transactions on Control Systems Technology.
- Information Sciences.
- International Journal of Approximate Reasoning.
- Automatica.
- IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics.
- Computers in Industry.
- Engineering Applications of Artificial Intelligence.

### 6.4. Relations internationales

- 2011-2012 : Participant dans le projet PHC IMHOTEP 2012 - Intervalles de régression

floue et raisonnement à base de contraintes - Optimisation d'un «Portfolio» énergies renouvelables - en partenariat avec l'Université allemande du Caire (GUC), Egypte.

- 2009-2012 : Participant dans le projet CAPES/COFECUB entre la France et le Brésil, dans l'axe méthodologique visant à proposer de nouvelles approches conciliant données numériques et informations expertes, dans un contexte dynamique.
- 2006 : Séminaire invité à l'Université de Sétif en Algérie sur le commande par intervalles et ses applications (1 jour), mai 2006.
- 2005 : Séminaire invité à l'Université de Tébessa en Algérie sur le contrôle flou et ses applications (3 jours), Juin 2005.
- 2004 : Intervenant à l'école d'été en automatique de l'Université Polytechnique de Bucarest, Roumanie, Mai 2004.
- 2004-2010 : Accueil des chercheurs étrangers et développement de travaux communs.
  - F. Megri (Université de Constantine, Algérie) : 2 années.
  - M. Abulizi (Université Xinjiang, Chine) : une année.
  - Alexandre Evsukoff (Université Fédérale de Rio de Janeiro, Brésil) : 1 mois.
  - K. Ben Mohammed (Université de Sétif - Algérie) : 1 mois.

## **7. Collaborations avec le secteur socio-économique**

- 2010-2013 : Participant dans le projet de la région Rhône-Alpes (Cluster Recherche Gospi) sur le pilotage des systèmes HVLV (High-Variety Low-Volume). Financement sur 3 ans de la thèse de I. Nasri.
- 2006-2010 : Participant dans le projet de la région Rhône-Alpes (Cluster Recherche ENERGIES) sur la réduction et le lissage de la consommation électrique liée à la climatisation dans des bâtiments.
- 2005-2008 : Co-responsable du contrat de recherche lié à une thèse CIFRE (la thèse de Biardeau) avec la société SERT METAL à Décines – Lyon.
- 2005-2006 : Participant dans le projet BQR (Bonus Qualité Recherche) à l'Université de Savoie : Modélisation Système Multi-Agents (SMA) du processus de pilotage d'un système de fusion d'informations appliqué à un système de production.
- 2004-2005 : Responsable du Projet BQR (Bonus Qualité Recherche) à l'Université de Savoie : "développement de nouvelles méthodologies à base d'intervalles pour l'analyse des signaux médicaux–Application aux problèmes de surveillance, diagnostic, reconnaissance et classification" (collaboration avec le CHU de Grenoble).
- 2001-2003 : Participant dans le contrat de Recherche lié à la thèse de M. Coudurier pour les méthodes intelligentes d'apprentissage (floues et réseaux de neurones), Staubli, France.
- 2001-2002 : Participation dans un contrat de recherche avec Scheider Electric pour l'évaluation de la plateforme de programmation «Unity Pro».

## 8. Publications

### 8.1. Articles dans des revues internationales : 21 (dont 2 Bookreviews)

- [R1] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Elmasry M., Extended gradual interval (EGI) arithmetic and its application to gradual weighted averages, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 257, pp. 67-84, 2014.
- [R2] Nasri I., Habchi G., **Boukezzoula R.**, Use of (max, +) algebra for scheduling and optimization of HVLV systems subject to preventive maintenance, *Simulation Modelling Practice and Theory*, Volume 46, pp. 149-163, 2014.
- [R3] **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Galichet S., Model Inversion Using Extended Gradual Intervals Arithmetic, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 2012, No. 1, pp. 82-95, 2012.
- [R4] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Bissierier A., A Midpoint–Radius approach to regression with interval data, *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 52, No. 9, pp. 1257-1271, 2011.
- [R5] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Application of a continuous supervisory fuzzy control on a discrete scheduling of manufacturing systems, *Engineering Applications of Artificial Intelligence (EAAI)*, Vol. 24, No. 7, pp. 1162-1173, 2011.
- [R6] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Multi-objective supervisory flow control based on fuzzy interval arithmetic : Application for scheduling of manufacturing systems, *Simulation Modelling Practice and Theory*, Vol. 15, No. 5, pp. 1371-1383, 2011.
- [R7] Megri F., **Boukezzoula R.**, MIN and MAX Operators for Trapezoidal Fuzzy Intervals, *International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics (IJICC)*, Vol. 3, No. 1, pp. 55-72, 2010.
- [R8] Bissierier A., **Boukezzoula R.**, Galichet S., Linear Fuzzy Regression Using Trapezoidal Fuzzy Intervals, *Journal of Uncertain Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 59-72, 2010.
- [R9] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Supervisory based capacity allocation control for manufacturing systems simulation, *International Journal of Manufacturing Technology and Management (IJMTM)*, Vol. 20, No. 1-4, pp. 259-285, 2010.
- [R10] Bissierier A., **Boukezzoula R.**, Galichet S., A Revisited Approach for Linear Fuzzy Regression Using Trapezoidal Fuzzy Intervals, *Information Sciences*, Vol. 180, No. 19, pp. 3653-3673, 2010.
- [R11] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Intelligent distributed and supervised flow control methodology for production systems, *Engineering Applications of Artificial Intelligence (EAAI)*, Vol. 22, No. 7, pp. 1104-1116, 2009.
- [R12] Galichet S., **Boukezzoula R.**, Bookreview : Introduction to fuzzy systems, Guanrong Chen, Trung Tat Pham, Chapman & Hall/CRC, Applied Mathematics and Nonlinear Science Series, Taylor & Francis Group, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 159, No.18, 2008, pp. 205-207.
- [R13] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., MIN and MAX Operators for Fuzzy Intervals and their Potential Use in Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 15, No. 6, pp. 1135-1144, 2007.
- [R14] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Feedback Linearizing Controller and its

Equivalence with the Fuzzy Nonlinear Internal Model Control Structure, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol. 17, No. 2, pp. 233-248, 2007.

- [R15] **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Galichet S., Inverse Controller Design for Interval Fuzzy Systems, *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, Vol. 14, No. 1, pp. 111-124, 2006.
- [R16] Foulloy L., **Boukezzoula R.**, Galichet S., An Educational Tool for Fuzzy Control, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 14, No. 2, pp. 217-221, 2006.
- [R17] Galichet S., **Boukezzoula R.**, Bookreview : New Approaches to Fuzzy Modeling and Control - Design and Analysis, by M. Margaliot and G. Langholz, *Series in Machine Perception and Artificial Intelligence*, vol. 38, World Scientific, 2000, *Fuzzy sets and systems*, Vol. 151, No. 1, pp. 205-207, 2005.
- [R18] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Observer-Based Fuzzy Adaptive Control for a Class of Nonlinear Systems : Real-Time Implementation for a Robot Wrist, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 12, No. 3, pp. 340-351, 2004.
- [R19] Galichet S., **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Explicit analytical formulation and exact inversion of decomposable fuzzy systems with singleton consequents, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 146, No. 3, pp. 421-436, 2004.
- [R20] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Nonlinear Internal Model Control: Application of Inverse Model Based Fuzzy Control, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 11, No. 6, pp. 814-829, 2003.
- [R21] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Nonlinear Adaptive Internal Model Control (FNAIMC), *European Journal of Control (EJC)*, Vol. 7, No. 5, pp. 523-540, 2001.

## 8.2. Ouvrages collectifs : 4

- [O1] Bissierier A., **Boukezzoula R.**, Galichet S., Linear Fuzzy Regression Using Trapezoidal Fuzzy Intervals, *Series on Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Vol. 249, Eds. B. Bouchon-Meunier et al., Springer Verlag, pp. 1-22, 2010.
- [O2] Galichet S., **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Words or numbers, Mamdani or Sugeno fuzzy systems: a comparative study, *Uncertainty and Intelligent Information Systems*, Eds. B. Bouchon-Meunier, C. Marsala, M. Rifqi and R.R. Yager Eds, World Scientific, pp. 291-305, 2008.
- [O3] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Linéarisation entrée/sortie floue, *Commande floue 1 : de la stabilisation à la supervision*, Edts. L. Foulloy, S. Galichet, A. Titli, *Traité IC2*, Hermès Science, pp. 101-138, 2003.
- [O4] Foulloy L., **Boukezzoula R.**, Galichet S., *Commande floue, Modélisation, identification et commande des systèmes*, Eds. G. Dauphin-Tanguy, L. Foulloy, D. Popescu, Editura Academeie Române, pp. 378-412, 2004.

## 8.3. Communications dans des conférences internationales : 48

- [C1] Nguyen T.L., **Boukezzoula R.**, Coquin D. and Perrin S., Combination of Sugeno Fuzzy System and Evidence Theory for NAO Robot in Colors Recognition, *IEEE Fuzzy Systems Conference (FUZZ-IEEE)*, CD-ROM, pp. 1-8, Istanbul, Turkey, Aug. 2015.
- [C2] Nguyen T.L., **Boukezzoula R.**, Coquin D. and Perrin S., Color Recognition for NAO Robot Using Sugeno Fuzzy System and Evidence Theory, *16th World Congress of the*

International Fuzzy Systems Association (IFSA-EUSFLAT), pp. 1176-1183, Gijon, Spain, June-July 2015.

- [C3] Nguyen T.L., **Boukezzoula R.**, D. Coquin and S. Perrin, Interaction Between Humans and NAO Robot for Colored Objects Recognition using Information Fusion, the 8th IEEE International Conference on Human System Interactions (HSI), pp. 322-328, Warsaw, Poland, June 2015.
- [C4] Nasri I., Habchi G., **Boukezzoula R.**, An Algebraic Max-Plus Model for HVLV systems scheduling and optimization with repetitive and flexible periodic preventive maintenance: Just-in-time production, proc. of the 9th International Conference of Modelling, Optimization and Simulation (MOSIM), France, 2012.
- [C5] Nasri I., **Boukezzoula R.**, Habchi G., A Mathematical Model for HVLV Systems Scheduling and Optimization With Periodic Preventive Maintenance Using (max, +) Algebra, proc. of the 14th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing (INCOM), Roumanie, 2012.
- [C6] Nasri I., Habchi G., and **Boukezzoula R.**, Scheduling and control modeling of HVLV systems using max-plus algebra, in 5th International Workshop on Verification and Evaluation of Computer and Communication Systems (VECoS'11), Tunis, Tunisia, 15-16 Septembre 2011, pp. 62-70, 2011.
- [C7] **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Galichet S., Model Inversion using Extended Gradual Intervals Arithmetic, proc. of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-LFA), France, 2011.
- [C8] Nasri I., Habchi G., **Boukezzoula R.**, Max-plus linear model-based predictive control for constrained HVLV manufacturing systems, proc. of the 16th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA), France, 2011.
- [C9] Nasri I., Habchi G., **Boukezzoula R.**, Scheduling and Control Modelling of HVLV Systems Using Max-Plus Algebra, proc. of the 5th International Workshop on Verification and Evaluation of Computer and Communication Systems (VECoS), Tunisie, 2011.
- [C10] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Supervisory Control based Fuzzy Interval Arithmetic Applied for Discrete Scheduling of Manufacturing Systems, proc. of the IEEE World Congress on Computational Intelligence (FUZZ-IEEE), Spain, 2010.
- [C11] Tozzi L., Evsukoff A., Bissierier A., **Boukezzoula R.**, Galichet S., Combining Climate Temperature Models through Fuzzy Interval Regression : Application to the La Plata Basin, proc. of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), Spain, 2010.
- [C12] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Optimistic Arithmetic Operators for Fuzzy and Gradual Intervals - Part I : Interval Approach, proc. of the 13th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU), Germany, 2010.
- [C13] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Optimistic Arithmetic Operators for Fuzzy and Gradual Intervals - Part II : Fuzzy and Gradual Interval Approach, proc. of the 13th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU), Germany, 2010.
- [C14] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Application of a continuous supervisory fuzzy control on a discrete scheduling of manufacturing systems, proc. of the 8th International

Conference of Modelling, Optimization and Simulation (MOSIM), Tunisia, 2010.

- [C15] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Hierarchical Control of Production Flow based on Capacity Allocation for Real-Time Scheduling of Manufacturing System, proc. of the 14th International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFAs), Spain, 2009.
- [C16] Bissierier A., **Boukezzoula R.**, Galichet S., An Interval Approach for Fuzzy Linear Regression with Imprecise Data, proc. of the Int. Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA/EUSFLAT), Portugal, 2009.
- [C17] Galichet S., **Boukezzoula R.**, Optimistic Fuzzy Weighted Average, proc. of the Int. Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA/EUSFLAT), Portugal, 2009.
- [C18] Bissierier A., **Boukezzoula R.**, Galichet S., Linear Fuzzy Regression Using Trapezoidal Fuzzy Intervals, 12th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge Based Systems (IPMU-2008), Malaga, Spain, July 2008.
- [C19] Megri F., **Boukezzoula R.**, MIN and MAX Operators for Trapezoidal Fuzzy Intervals. Part I : Formalization and Application, IEEE Fuzzy Systems Conference, CD-ROM, Hong-Kong, Chine, June 2008.
- [C20] Megri F., **Boukezzoula R.**, MIN and MAX Operators for Trapezoidal Fuzzy Intervals. Part II : Analytical Expressions Proof, IEEE Fuzzy Systems Conference, CD-ROM, Hong-Kong, Chine, June 2008.
- [C21] Bissierier A., Galichet S., **Boukezzoula R.**, Fuzzy Piecewise Linear Regression, IEEE Fuzzy Systems Conference, CD-ROM, Hong-Kong, Chine, June 2008.
- [C22] Biardeau M., **Boukezzoula R.**, Galichet S., Mould Pouring Control based on Absorption Capacity Curve, the 16th IEEE International Conference on Control Applications (CCA - 07), pp. 988-993, Singapore, October 2007.
- [C23] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Inverse arithmetic operators for fuzzy intervals, the 5th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT'07), Vol. 2, pp. 279-286, Ostrava, République Tchèque, September 2007.
- [C24] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Hierarchical control for continuous flow simulation of manufacturing systems, the 6th EUROSIM Congress on Modelling and Simulation, CD-ROM , Ljubljana, Slovenia, September 2007.
- [C25] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Fuzzy Supervisory Based Capacity Allocation Control for Manufacturing Systems, International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2007), pp. 1769-1774, London, UK, July 2007.
- [C26] Tamani K., Habchi G., **Boukezzoula R.**, Fuzzy Supervision of Adaptive Fuzzy Controllers for Manufacturing Systems, IEEE International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation (CIMCA-2006), CD-ROM , Sydney, 6 pages, Australia, November 2006.
- [C27] Biardeau M., Debray C., Dussud M., **Boukezzoula R.**, Galichet S., Hybrid dynamic model and simulation of a mould pouring machine, the 5th International Conference on Simulation, Designing and Control of Foundry Processes (FOCOMP'06), pp. 67-80, Krakow, Poland, November 2006.
- [C28] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Supervised Fuzzy Control in the Simulation of

Manufacturing Systems, 20th annual European Simulation and Modelling Conference (ESM 2006), pp. 200-204, Toulouse, France, October 2006.

- [C29] Galichet S., **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Words or numbers, Mamdani or Sugeno fuzzy systems : a comparative study, the 11th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge Based Systems (IPMU-2006), CD-ROM , 6 pages, Paris, France, July 2006.
- [C30] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., High Level Petri Nets Based Approach for Analysing Conceptual Objects for Production Systems Simulation, 12th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing (INCOM'2006), CD-ROM , 6 pages, Saint-Etienne, France, May 2006.
- [C31] **Boukezzoula R.**, Marteau S., Exact Solving of the Fuzzy Equation :  $A.X^2 + B.X = C$ , 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'2005), CD-ROM, 6 pages, Reno, USA, May 2005.
- [C32] **Boukezzoula R.**, Marteau S., Exact Solving for a Class of Second Order Fuzzy Equation, 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'2005), CD-ROM, 6 pages, Reno, USA, May 2005.
- [C33] **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Galichet S., Fuzzy Control of Fuzzy Interval Systems, Part II : Application to Inverse Model Based Control, 13th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'2004), CD-ROM 1, 6 pages, Budapest, Hungary, July 2004.
- [C34] Marteau S., Cuny M., **Boukezzoula R.**, Supervision and Control in Mechatronic Systems : Application to Manufacturing Systems, the 5th International Workshop on Research and Education in Mechatronics (REM 2004), CD-ROM, 6 pages, Kielce-Cedzyna, Poland, October 2004.
- [C35] **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Galichet S., Fuzzy Control of Fuzzy Interval Systems, Part I : Solving First Order Fuzzy Equations, the 13th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'2004), CD-ROM 1, 6 pages, Budapest, Hungary, July 2004.
- [C36] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Adaptive Linearizing Control for Non-affine Systems, 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE - 2003), pp. 543-548, St. Louis, USA, May 2003.
- [C37] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Adaptive control for a class of discrete-time nonlinear systems : application of indirect fuzzy control, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC'02), pp. 314-319, Hammamet, Tunisia, October 2002.
- [C38] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy linearizing control approach for a class of nonlinear discrete-time systems and its equivalence with internal model control structure, the 11th IEEE Int. Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'2002), pp. 122-127, Honolulu, Hawaii, May 2002.
- [C39] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy adaptive control for nonlinear systems : Real-time implementation for a robot wrist, the 40th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'2001), pp. 4364-4369, Orlando, USA, December 2001.
- [C40] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy robust control for discrete-time nonlinear systems using input-output linearization and H-infinite optimization, the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'2001), pp. 765-768, Melbourne, Australia, December 2001.

- [C41] Foulloy L., Galichet S., **Boukezzoula R.**, Model-based or heuristic-based fuzzy logic controllers? Foundations and examples, IFAC Workshop on Advanced Fuzzy/Neural Control (AFNC'2001), pp. 197-209, Valencia, Spain, October 2001.
- [C42] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Robust fuzzy control for a class of continuous nonlinear systems using input-output linearization : Real-time implementation for a robot wrist, IEEE International Conference on Control Applications (CCA'2001), pp. 311-316, Mexico, September 2001.
- [C43] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Exact inversion of Takagi-Sugeno fuzzy models, the 9th International Fuzzy System Association World Congresss (IFSA-01), pp. 2108-2113, Vancouver, Canada, July 2001.
- [C44] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Nonlinear Adaptive Internal Model Control (FNAIMC) - Part I : Fuzzy Model Identification, European Control Conference (ECC'99), CD-ROM, F874, 6pages, Karlsruhe, Germany, September 1999.
- [C45] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Nonlinear Adaptive Internal Model Control (FNAIMC) - Part II : Fuzzy Model Inversion, European Control Conference (ECC '99), CD-ROM, F875, 6 pages, Karlsruhe, Germany, September 1999.
- [C46] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Control of Nonlinear Systems Using Two Standard Techniques, the 8th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'99), pp. 875-880, Seoul, Korea, August 1999.
- [C47] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Learning Control of Nonlinear Systems Using Input-Output Linearization, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC'98), pp. 2095-2100, San Diego, CA, USA, October 1998.
- [C48] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Input-Output Linearization of Nonlinear Systems, 5th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, (EUFIT'97), pp. 1316-1320, Aachen, Germany, September 1997.

#### 8.4. Communications dans des conférences nationales

- [N1] **Boukezzoula R.**, Elmasry M., Galichet S., Foulloy L., Régression floue pour l'approximation d'intervalles graduels, dans Actes des rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA, Compiègne, France, 2012.
- [N2] Nasri I., **Boukezzoula R.**, Habchi G., A propos de la modélisation et le pilotage des systèmes manufacturiers de type HVLV, 12ème Congrès Annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (RoadF), France, 2011.
- [N3] **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Galichet S., Opérateurs arithmétiques inverses pour intervalles graduels étendus, dans Actes des rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA, Lannion, France, 2010.
- [N4] Bissierier A., **Boukezzoula R.**, Galichet S., Représentation, identification et propagation des incertitudes dans un contexte de régression linéaire, dans Actes des Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA), Annecy, France, 2009.
- [N5] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G. Pilotage Flou Distribué et Supervisé pour la Régulation des Flux de Production, dans Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA), Lens, France, 2008.
- [N6] Bissierier A., Megri F., **Boukezzoula R.**, Galichet S., Etude expérimentale de la robustesse

des techniques linéaire et quadratique de régression floue, dans Actes des Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA), Lens, France, 2008.

- [N7] Tamani K., **Boukezzoula R.**, Habchi G., Approche de pilotage par allocation de capacité utilisant un modèle de simulation à flux continu, 7ème Conférence de MOdélisation et SIMulation - MOSIM-08, Paris, France, avril 2008.
- [N8] Bissierier A., Galichet S., **Boukezzoula R.**, Une vision de la régression linéaire floue au travers de l'arithmétique des intervalles, Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA-2007), pp. 57-64, Nimes, France, 2007.
- [N9] Biardeau M., **Boukezzoula R.**, Galichet S., Dussud M., Debray C., Régulation de niveau pour le remplissage automatique de moules en fonderie, dans rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA-2006), pp. 263-270, Toulouse, France, 2006.
- [N10] **Boukezzoula R.**, Foulloy L., Galichet S., Commande floue et commande à base d'intervalles, dans rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2004), pp. 281-288, Nantes, France, 2004.
- [N11] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Sur l'analyse de la dynamique de zéros d'un système flou et son influence sur la synthèse de correcteurs, dans rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2002), pp. 195-202, Montpellier, France, 2002.
- [N12] Foulloy L., Galichet S., **Boukezzoula R.**, Sur l'utilisation des entrées floues en contrôle flou, dans rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2002), pp. 209-216, Montpellier, France, 2002.
- [N13] Foulloy L., Galichet S., **Boukezzoula R.**, FlouLib : une bibliothèque pour le contrôle flou, dans rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2002), pp. 309-309, Montpellier, France, 2002.
- [N14] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Quelques propriétés des systèmes flous de Takagi-Sugeno à conclusions constantes, dans rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2001), pp. 241-248, Mons, Belgique, 2001.
- [N15] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Apprentissage de lois de commande floues pour des systèmes non linéaires (synthèse directe et indirecte), dans rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'98), pp. 19-27, Rennes, France, 98.
- [N16] **Boukezzoula R.**, Galichet S., Foulloy L., Commande à modèle interne flou, dans rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'97), pp. 11-16, Lyon, France, 97.

## 8.5. Thèse de doctorat

- [Boukezzoula-2000] : **Boukezzoula R.**, Commande floue d'une classe de systèmes non linéaires : application au problème de suivi de trajectoire, Thèse de Doctorat, Université de Savoie, mars 2000, 228 pages.

## **PARTIE B : Travaux de recherche**

*"La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : Rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi !" Albert Einstein*

*"It is a truism that precision is respectable and fuzziness is not. However, in our quest for ever greater degree of precision in pure and applied science, we have perhaps tended to lose sight of one basic fact, namely, that the class of nontrivial problems for which one can find precise algorithmic solutions is quite limited. Unfortunately, most realistic problems tend to be complex, and many complex problems are either algorithmically unsolvable or, if solvable in principle, are computationally infeasible." Zadeh L.A. [209].*



# Introduction générale

*"Essentially, our contention is that the conventional quantitative techniques of system analysis are intrinsically unsuited for dealing with humanistic systems or, for that matter, any system whose complexity is comparable to that of humanistic systems. The basic for this contention rests on what might be called the principle of incompatibility. Stated informally, the essence of this principle is that as the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behavior diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics" [211].*

Cette citation de Zadeh [211], discutée par Dubois [46] nous renseigne sur le paradoxe naturel qui existe entre l'imprécision et l'incertitude. En effet, *"à mesure que la complexité d'un système s'accroît, notre aptitude à formuler des affirmations précises, mais significatives, sur son comportement diminue jusqu'à un seuil au-delà duquel la précision et le sens deviennent mutuellement exclusifs"* [46][211]. Comme discuté par Dubois [46] : *"ce principe d'incompatibilité est lié à la façon dont l'humain perçoit et raisonne ; il utilise principalement des représentations résumées de la réalité et donc imprécises"*. Dans un contexte pratique ou expérimental, une bonne représentation ou modélisation doit réaliser un compromis entre précision et incertitude. En effet, elle doit éviter un excès de précision (engendrant un maximum d'incertitude) ou d'imprécision qui risque de devenir non représentative du système à considérer. Ces remarques et réflexions de Zadeh [211] et Dubois [46] ont symbolisé un marqueur important tout au long de nos travaux de recherche en contrôle flou. Notre objectif principal était alors de reconsidérer cette problématique en présence des imperfections vues comme des imprécisions et des incertitudes.

Dans la littérature relative au contrôle flou, l'imprécision et l'incertitude font référence à deux concepts différents qui sont souvent abusivement confondus [14] et parfois mal appréhendés. En effet, contrairement à l'imprécision qui porte sur le contenu de l'information, l'incertitude concerne sa qualité. Toutefois ces deux imperfections sont liées puisqu'à mesure que l'imprécision augmente, l'incertitude diminue et vice-versa.

La majorité des travaux en contrôle flou à base de modèles publiés dans la littérature avait pour but de copier les contrôleurs existants en automatique conventionnelle en remplaçant le modèle du procédé par un modèle flou. Ce dernier est souvent identifié à partir d'un jeu de données entrées-sorties précis. Bien que les techniques proposées prétendaient à des originalités dans leur manière d'appréhender les imprécisions et les incertitudes, en réalité elles se focalisaient sur la recherche d'une performance numérique précise. En effet, si ces méthodes exhibaient des performances indiscutables, elles n'apportaient aucun élément de réponse au véritable problème d'analyse et synthèse des contrôleurs imprécis et/ou incertains. Dans la littérature, la notion de commande

imprécise et/ou incertaine fait souvent référence à des techniques basées sur une modélisation d'un procédé par un modèle flou nominal précis auquel on attache des imperfections vues comme des imprécisions et/ou des incertitudes. La problématique de commande floue est alors abordée de façon à assurer des performances numériques tout en garantissant la stabilité et la robustesse vis-à-vis de ces imperfections. Cette conception, relativement réductrice, est restée limitée à des considérations pratiques relatives aux erreurs d'approximations et à la présence des perturbations.

La vision du contrôle intelligent adoptée dans le contexte de nos travaux s'écarte de l'approche actuellement exploitée au sein de la communauté "automaticienne floue". En effet, notre approche ne se focalise pas sur des performances purement numériques précises mais intègre et manipule l'imprécision et l'incertitude, à travers des mesures non additives, afin d'améliorer la représentativité des modèles et le processus décisionnel inhérent aux problèmes de contrôle.

Cette partie du manuscrit vise à présenter l'ensemble des problématiques que nous avons eu l'occasion d'aborder lors de nos activités de recherche. Afin de rendre la lecture harmonieuse, les travaux ont été divisés en trois chapitres.

Le chapitre 1 s'inscrit dans une problématique de contrôle flou à base de règles conventionnelles et se situe dans la continuité de nos travaux de thèse de doctorat [28]. Dans ce cadre, des approfondissements théoriques et des implantations pratiques, en relation avec les approches directes et indirectes, ont été apportés. Les techniques de commande indirectes implémentent une méthode de propagation inverse innovante, exacte, analytique et non itérative pour la construction des contrôleurs flous [21][24][74]. Quant aux méthodologies directes, elles font appel à une implantation selon un mécanisme d'inférence purement numérique. Ce chapitre a mis en évidence le fait que les informations manipulées dans une problématique de contrôle flou restent précises. Dans ce contexte et contrairement à ce qui a été souvent énoncé dans un bon nombre d'articles de recherche, il est impossible de différencier un système flou d'un quelconque mécanisme de calcul réalisant un transfert entrées/sortie numérique précis. Clairement, un contrôleur flou (ou un modèle flou) est un organe mathématique précis qui réalise le même travail qu'un contrôleur conventionnel où un transfert entre les entrées et les sorties est opéré. Les aspects imprécis ou incertain ne sont aucunement pris en compte dans la plupart voire la quasi-totalité des travaux sur les contrôleurs flous à base de règles.

Le deuxième chapitre marque un vrai basculement de nos activités de recherche où une réflexion a été menée sur l'intérêt et la représentativité des systèmes et des contrôleurs à base de règles floues dans un contexte imprécis et/ou incertain. Cette réflexion a induit notre abandon de l'approche indirecte à base de règles à la faveur d'une orientation vers des représentations régressives paramétriques à base d'intervalles graduels. Ces derniers sont capables d'améliorer la spécificité des intervalles conventionnels et d'appréhender les concepts d'imprécision et d'incertitude dans un même formalisme. Dans ce cadre, les outils mathématiques de représentation, de manipulation et de propagation ont été explicités et analysés.

Le chapitre 3 aborde l'identification des modèles régressifs graduels dans un contexte imprécis et incertain. Cet objectif a été réalisé à travers une nouvelle relecture de la problématique de régression floue conventionnelle, initialement proposée par Tanaka [189][190] et Diamond [41]. L'applicabilité et les potentialités des modèles graduels régressifs et leurs outils de manipulation proposés ont été validés dans la construction des contrôleurs directs et indirects.

Les illustrations et les applications relatives à chaque chapitre ont été regroupées dans une annexe spécifique portant le même numéro que le chapitre correspondant. Dans chaque partie, les méthodologies proposées et leurs résultats ont été énoncés et justifiés. De la même manière, leurs faiblesses et leurs insuffisances ont fait l'objet de quelques remarques et considérations. Des perspectives et des prospectives ont été émises concernant les travaux futurs. Les détails des travaux de recherche présentés dans ce document sont disponibles dans les publications produites et les manuscrits des thèses encadrées. Pour des raisons de cohérence scientifique, nous avons préféré enrichir une partie de ces travaux plutôt que de les juxtaposer. Chaque chapitre correspond à un recueil agencé et ordonné de différents résultats présentés dans plusieurs publications.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, faisant contre mauvaise fortune bon cœur, le choix a été fait de ne s'intéresser, dans ce manuscrit, qu'aux systèmes flous de Takagi-Sugeno-Kang à conclusions constantes (TSK à CC). D'autres formalismes flous peuvent être exploités et conduisent à des résultats analogues.



# Chapitre 1 : Contrôle flou conventionnel

## 1.1 Introduction

D'une manière générale, dans une problématique de contrôle la conception d'un modèle est avant tout guidée par le fait qu'il doit être exploitable pour la synthèse d'une loi de commande. Dans la littérature relative au contrôle flou, nous distinguons deux méthodologies de synthèse des contrôleurs. En effet, si la conception d'un modèle puis la synthèse d'une loi de commande sont effectuées séquentiellement, on parle d'une stratégie de commande indirecte. En d'autres termes, la construction d'un contrôleur est inhérente à l'obtention d'un modèle du procédé (commande à base de modèles). Au contraire, si la loi de commande est élaborée sans conception de modèle alors on fait référence à une stratégie de commande directe.

D'un point de vue chronologique, les premiers développements en contrôle flou ont été initiés par Mamdani [129][130][131]. L'idée de base développée par Mamdani consistait à exploiter l'expérience des opérateurs humains pour construire une loi de commande. Un jeu de règles floues traduit alors le comportement des opérateurs en termes de stratégie de contrôle. Une telle approche s'inscrit clairement dans une vision de commande directe et permet d'éviter la phase d'obtention de modèles, souvent nécessaire dans la mise en œuvre des techniques issues de l'automatique conventionnelle. Pour des procédés complexes et parfois difficiles à modéliser, l'économie du modèle peut s'avérer importante tant en temps qu'en coût.

Le gain réalisé peut se payer toutefois par le fait qu'aucune méthodologie d'analyse et/ou de synthèse ne soit réellement proposée pour étudier les problèmes de stabilité et de robustesse. Le relevé d'expertise est souvent réalisé "au cas par cas" et reste difficilement généralisable à un procédé quelconque. Cet état de fait rend impossible toute garantie de résultats. Par voie de conséquence et malgré le succès important du contrôle flou dans le domaine industriel, les automaticiens ont souvent été critiques à l'égard de cette technique. Cette carence méthodologique a conduit au développement de nombreux travaux visant à "expliquer" les performances attribuées aux contrôleurs flous et à établir un lien avec les contrôleurs conventionnels issus de l'automatique. Dans ce contexte, plusieurs études ont permis de justifier l'écriture de ces règles floues et parfois leur formalisation analytique. A titre d'exemple, on peut citer les formalisations données dans [62][63], l'analogie avec le mode glissant [158] ou encore le principe des équivalences modales [75].

Depuis les idées novatrices de Mamdani et durant quelques années, les contrôleurs flous étaient conçus et optimisés empiriquement par "tâtonnements" ou par des experts. Dans ce contexte, les applications se cantonnaient à des systèmes simples avec des entrées et des sorties très limitées. Pour remédier à ces difficultés, l'idée d'un auto-ajustement des contrôleurs flous basé sur la minimisation d'un critère se concrétisait réellement avec l'apparition d'un nouveau type de systèmes flous : les systèmes de Takagi-Sugeno-Kang (TSK) [180][183]. De par leur structure, ceux-ci fournissent une expression analytique simple de la sortie générée en fonction des entrées considérées. Cette propriété

permet alors d'exploiter des mécanismes d'adaptation et d'optimisation numériques pour la synthèse de contrôleurs flous.

L'apparition des systèmes TSK a marqué une évolution majeure dans la philosophie même de la conception des contrôleurs flous et a donné naissance aux approches de commande indirecte. En effet, le formalisme analytique des systèmes TSK leur confère une grande capacité d'adaptation et d'intégration avec la majorité des méthodes issues de l'automatique conventionnelle (techniques d'identification et d'apprentissage, techniques adaptatives et prédictives, etc.). Les recherches sur la commande floue à base de modèles de TSK ont alors été multipliées et il est difficile maintenant d'établir une liste exhaustive de tous les travaux publiés dans la littérature. Un argument majeur qui milite pour cet engouement réside dans le formalisme analytique autorisé par le mécanisme calculatoire des systèmes de TSK qui permet leur exploitation pratiquement immédiate à travers les outils de la commande conventionnelle. Un état de l'art intéressant sur la commande floue à base de modèles est donné dans [65].

L'idée sous-jacente à ces travaux consistait à représenter la dynamique entrée-sortie d'un système par un modèle flou [67][103][120][160][180][192][196], exploité par la suite pour la synthèse d'un contrôleur capable d'imposer au système un comportement désiré (problèmes de régulation et de suivi de trajectoires). Bien que regrettable, cette évolution a favorisé l'émergence des approches de commande indirectes au détriment des techniques directes. Dans ce contexte, des techniques telles que la commande adaptative [192][196][197] et à base de PDC (Parallele Distributed Compensation) [198] permettant d'assurer la stabilité ont été proposées. Afin d'assurer la robustesse, les structures de commande floue ont souvent été augmentées par des composantes de robustification. Ces dernières sont principalement basées sur les techniques à base du mode glissant et de l'atténuation  $H_\infty$  [132][156][171][177][216]. La stabilité des boucles fermées a été validée par des approches de type Lyapunov ou par des expressions sous forme de LMI [90][132][156][216]. Toutefois, d'un point de vue méthodologique aucune nouvelle technique de synthèse n'est réellement proposée dans ces recherches. En effet, l'ensemble de ces travaux (y compris nos travaux) se contentaient en réalité de "copier" des structures de commande existantes ayant déjà fait leurs preuves en automatique conventionnelle : le modèle du procédé est simplement représenté par un système flou.

Ce chapitre dresse le bilan de la première partie de nos activités de recherche relatives au contrôle flou conventionnel à travers ses deux facettes directe et indirecte. Ces travaux s'inscrivent dans la continuité de nos travaux de thèse de doctorat [28]. Dans ce contexte, une relecture de nos travaux a été positionnée à travers cette vision. Un outil de représentation à base de systèmes flous TSK à Conclusions Constantes (CC) [181] a été privilégié pour exhiber les dynamiques des modèles et/ou des contrôleurs. Le choix de ce formalisme était lié à notre volonté d'exploiter un certain nombre de techniques numériques issues de l'automatique conventionnelle. De plus, cette restriction était avant tout guidée par un souci de simplicité mais elle a été validée par un certain nombre de propriétés structurelles que nous avons mises en lumière à travers nos publications.

Dans un premier temps, nous avons mis en évidence la propriété de décomposabilité de ces systèmes, aboutissant à un mécanisme purement analytique et paramétrique pour la propagation des informations manipulées. En d'autres termes, un système TSK à CC n'est autre qu'un système réalisant une interpolation multilinéaire par morceaux dans lequel chaque sous-système peut s'exprimer analytiquement sous une forme linéaire en les paramètres (forme paramétrique). De plus, ces systèmes présentent de nombreux avantages. D'une part, ils permettent d'implanter facilement un

système purement linéaire, par exemple un contrôleur flou de type PI, PD ou PID. D'autre part, tout en étant des approximateurs universels, ils possèdent un nombre de paramètres restreint ce qui facilite leur identification. Enfin, tout comme les systèmes de Mamdani, ils peuvent être implémentés de manière purement symbolique en utilisant des règles linguistiques pondérées dans le processus d'inférence symbolique.

Dans un second temps, nous avons décliné les propriétés des systèmes TSK à CC dans la synthèse des stratégies de commande. Dans les approches indirectes, nous avons proposé une méthode de propagation inverse analytique et non itérative pour la construction des contrôleurs flous à base de modèles [24][74]. Cette dernière se démarque des approches classiquement utilisées dans la littérature (inversion des règles, méthodes itératives, etc.) par sa capacité à trouver des solutions multiples et exactes aux problèmes posés. Dans les approches directes, la difficulté d'obtention de modèles (pour des procédés complexes) nous a conduits à préserver l'approche originale préconisée par Mamdani. Dans ce contexte et contrairement aux méthodes existantes dans la littérature qui exploitent des systèmes symboliques, nous avons proposé une conception à travers des systèmes TSK à CC. En effet, de par leurs caractéristiques telles que l'absence de la phase de défuzzification, un nombre de paramètres restreint et l'utilisation d'un mécanisme d'inférence unique évitant les opérateurs min/max sources de non-linéarités indésirables et parfois non contrôlables, ce type de système est mieux approprié dans le contexte de nos applications. En effet, nous n'avons trouvé aucun avantage à exploiter les opérateurs min/max préconisés par Mamdani. Au contraire, ces derniers entraînent l'apparition de non-linéarités qui s'avèrent souvent préjudiciables pour les performances des boucles fermées.

## 1.2 Modèle de représentation : TSK à CC

Les systèmes de TSK sont, comme ceux de Mamdani, construits à partir d'un jeu de règles "si ... alors ...". Si les prémisses sont toujours exprimées linguistiquement, les conclusions sont par contre de nature numérique. Elles peuvent être de différentes formes : équations linéaires ou polynômiales, statiques ou dynamiques. A travers la première partie de nos travaux, un intérêt tout particulier a été porté aux systèmes flous de TSK à CC [181]. En effet, ces derniers sont considérés comme formant une troisième catégorie de systèmes à l'intersection des familles existantes [181]. Ces systèmes sont largement exploités dans la littérature pour les problèmes de commande, d'apprentissage et d'identification.

D'une manière générale, un système TSK à CC à  $n$  variables d'entrée,  $x_k \in X_k \subset \mathfrak{R}$ ,  $k=1, \dots, n$ , et une variable de sortie,  $y \in Y \subset \mathfrak{R}$ , peut s'exprimer par une collection de règles sous la forme suivante :

$$\text{Si } x_1 \text{ est } A_1^{i_1} \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } A_n^{i_n} \text{ Alors } y = \varphi_{i_1, \dots, i_n} \quad (1)$$

- $A_k^{i_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , est un terme linguistique (symbole flou) associé à  $x_k$  (cf. figure 1).
- $\varphi_{i_1, \dots, i_n} \in \mathfrak{R}$  est la conclusion numérique de la règle indexée par  $(i_1, \dots, i_n)$ .
- $X_k$  est l'univers de discours associé à la variable  $x_k$ .

Si  $N_k$  symboles flous sont utilisés pour décrire  $x_k$ , *i.e.*  $i_k \in I_k = \{1, 2, \dots, N_k\}$ ,  $k=1, \dots, n$ , la base de règles complète est alors composée de  $N = \prod_{k=1, \dots, n} N_k$  règles. L'ensemble des indices étant  $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ .

Dans ce cas, pour l'entrée  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , la sortie produite par le système flou est donnée par :

$$y = \text{sug}(x) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I} A_{i_1, \dots, i_n}(x) \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_n} / \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I} A_{i_1, \dots, i_n}(x) ; A_{i_1, \dots, i_n}(x) = \prod_{k=1, \dots, n} A_k^{i_k}(x_k) \quad (2)$$

Pour des raisons de simplicité, les symboles flous sont représentés par des fonctions d'appartenance triangulaires et formant une partition stricte des univers de discours (cf. figure 1), c'est-à-dire :

$$\forall x_k \in X_k : \sum_{i_k \in I_k} A_k^{i_k}(x_k) = 1 ; k = 1, \dots, n \quad (3)$$

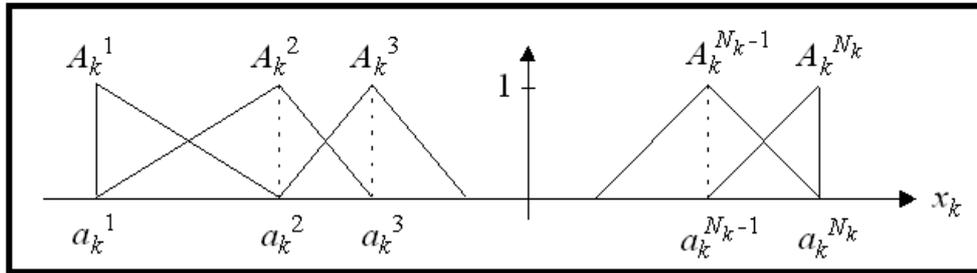


Figure 1 : Répartition des symboles flous sur leurs univers de discours.

Dans ce cas, l'équation (2) se réduit à :

$$y = sug(x) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I} A_{i_1, \dots, i_n}(x) \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_n} \quad (4)$$

La sortie du système (4) peut s'écrire sous la forme :

$$y = sug(x) = W^T(x) \cdot \Theta ; \text{ avec } : W, \Theta \in \mathfrak{R}^N \quad (5)$$

où  $W$  est le vecteur des prémisses et  $\Theta$  le vecteur des paramètres. On peut constater que la sortie d'un système flou s'écrit sous une forme linéaire en les paramètres, c'est-à-dire comme étant le produit d'un vecteur ligne de régression ( $W$ ) et d'un vecteur colonne composé des conclusions des règles ( $\Theta$ ). Cette propriété de linéarité est fondamentale et représente la base de toutes les extensions des techniques d'identification et des algorithmes de commande adaptative et prédictive au cas flou.

### 1.3 Propagation et propagation inverse

Les mécanismes de propagation et de propagation inverse proposés dans ce document sont basés sur la notion de décomposabilité des systèmes flous de type TSK à CC.

#### 1.3.1 Mécanisme de propagation

Dans la formalisation du système flou, l'hypothèse d'un partitionnement triangulaire strict des univers de discours garantit que chaque entrée soit représentée par au plus 2 symboles flous. Dans le cas d'un système à  $n$  entrées, au maximum  $2^n$  règles sont activées pour un vecteur d'entrée quelconque. La sortie produite par le système flou est alors considérée comme celle générée par le sous-système flou composé des  $2^n$  règles activées. Le système flou global peut donc être vu comme une collection de sous-systèmes flous élémentaires. Chacun de ces derniers est défini sur la "maille" floue élémentaire construite à partir des entrées modales la délimitant.

Dans ce cadre, l'analyse d'un système flou global peut être appréhendée à partir d'une analyse générique d'un sous-système élémentaire. Sous l'hypothèse d'un partitionnement strict des univers de discours des entrées, nous avons mis en exergue qu'un système TSK à CC implémente une propagation entre les entrées et la sortie sous la forme d'une fonction multilinéaire par morceaux. De plus, chaque sous-système peut s'exprimer analytiquement sous une forme linéaire en les paramètres que sont les conclusions de règles [24][74]. Il est important de signaler ici que les contraintes d'un partitionnement strict et/ou triangulaire, souvent exploitées dans la littérature [120][181][205][214], peuvent être levées [10][43] sans remettre en question la méthodologie de décomposabilité du système flou.

Chaque univers de discours  $X_k = [a_k^1, a_k^{N_k}]$  ;  $k = 1, \dots, n$ , est vu comme l'union des intervalles définis par deux valeurs modales consécutives :

$$X_k = \bigcup_{i_k=1, \dots, N_k-1} [a_k^{i_k}, a_k^{i_k+1}] ; k = 1, \dots, n \quad (6)$$

L'univers de discours multidimensionnel  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  est alors l'union des mailles floues élémentaires  $X_{i_1, \dots, i_n}$ . Chacune est définie par :

$$X_{i_1, \dots, i_n} = \otimes_{k=1, \dots, n} [a_k^{i_k}, a_k^{i_k+1}] ; i_k = 1, \dots, N_k - 1 \quad (7)$$

où  $\otimes$  représente le produit cartésien. Par application du théorème de décomposition [214], le système flou vérifie la propriété suivante :

$$sug(x) = sug_{i_1, \dots, i_n}(x) ; x \in X_{i_1, \dots, i_n} \quad (8)$$

où  $sug_{i_1, \dots, i_n}(x)$  fait référence au sous-système flou élémentaire défini sur une maille floue élémentaire composée de  $2^n$  règles de la forme suivante :

$$\text{Si } x_1 \text{ est } A_1^{i_1+v_1} \text{ et...et } x_n \text{ est } A_n^{i_n+v_n} \text{ Alors } y = \varphi_{i_1+v_1, \dots, i_n+v_n} ; v_k \in \{0,1\}, k = 1, \dots, n \quad (9)$$

Dans l'expression (9), les indices  $i_1, i_2, \dots, i_n$  font référence au sous-système et  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sont utilisés pour spécifier une règle dans le sous-système. Dans la suite, nous considérons un sous-système élémentaire défini sur une maille floue avec les notations données dans la figure 2.

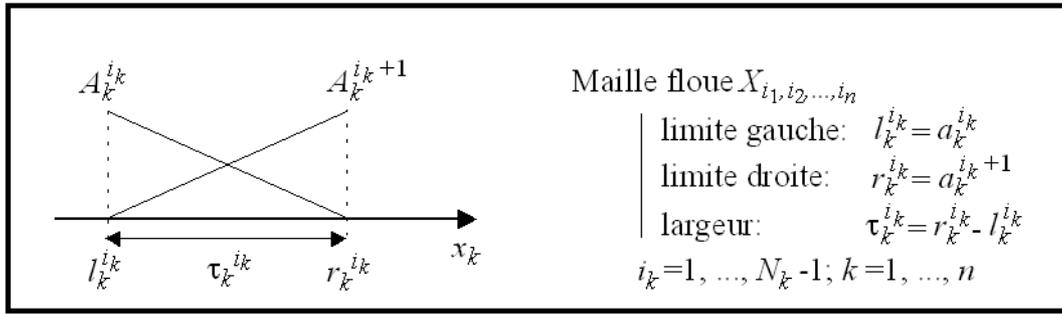


Figure 2 : Notations associées à une maille floue (sous-système élémentaire).

Dans ce cadre, nous avons démontré dans [74] que la sortie générée par un sous-système élémentaire était donnée par l'expression suivante :

$$sug_{i_1, \dots, i_n}(x) = \sum_{(\rho_1, \dots, \rho_n) \in \{0,1\}^n} M_{\rho_1, \dots, \rho_n}^{i_1, \dots, i_n} \cdot x_1^{\rho_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\rho_n} ; \text{ avec :} \quad (10)$$

$$M_{\rho_1, \dots, \rho_n}^{i_1, \dots, i_n} = (1 / \prod_{k=1}^n \tau_k^{i_k}) \cdot \sum_{(v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n} (-1)^{\sum_{k=1}^n v_k + \rho_k} \cdot \prod_{k=1}^n ((r_k^{i_k})^{1-v_k} \cdot (l_k^{i_k})^{v_k})^{1-\rho_k} \cdot \varphi_{i_1+v_1, \dots, i_n+v_n} \quad (11)$$

L'expression (10) est une nouvelle formulation alternative et très intéressante de l'expression "polytopic-affine" proposée par Sugeno dans la représentation d'état des systèmes flous dynamiques [181]. De plus, cette formalisation exhibe une relation directe entre la sortie et les entrées  $x_1, \dots, x_n$  permettant ainsi d'imposer des conditions sur les conclusions du système pour sa linéarité. Par exemple, dans le cas d'un système à 2 entrées, à partir des équations (10) et (11), la linéarité du sous-système est obtenue si les termes  $M_{1,1}^{i_1, i_2} = 0$ . Cette condition de linéarité peut s'écrire comme suit :

$$\varphi_{i_1, i_2} - \varphi_{i_1+1, i_2} = \varphi_{i_1, i_2+1} - \varphi_{i_1+1, i_2+1} \quad (12)$$

La condition (12) est concordante avec la condition d'affinité (AC) proposée par Sugeno dans [181]. D'un point de vue général, tous les coefficients :

$$M_{\rho_1, \dots, \rho_n}^{i_1, \dots, i_n}; \text{ avec : } \sum_{k=1, \dots, n} \rho_k > 1$$

doivent être annulés pour assurer la linéarité du sous-système. Dans ce cas,  $2^n - (n+1)$  contraintes sous la forme (12) doivent être respectées. En d'autres termes, si l'objectif est d'identifier un système flou linéaire par morceaux, un problème d'optimisation sous  $2^n - (n+1)$  contraintes doit être résolu. La formulation proposée est en adéquation avec la propriété de multi-linéarité des systèmes flous énoncée dans [166][205][214] où aucune formalisation analytique ou paramétrique n'est proposée.

Pour plus de clarté sur la technicité du mécanisme de décomposabilité des systèmes TSK à CC, le lecteur trouvera en annexe 1 (illustration 1) un exemple, extrait de notre publication [74], d'un système flou avec deux entrées et une sortie.

### 1.3.2 Mécanisme de propagation inverse

La propagation inverse (l'inverse d'un modèle) peut être intuitivement interprétée comme un autre modèle qui, lorsqu'il est cascadié avec le modèle original produit des sorties qui sont les entrées du modèle original. Deux classes de techniques d'inversion sont généralement étudiées et mises en œuvre : l'inverse à gauche (left inverse) et l'inverse à droite (right inverse) [30].

Etant donné un modèle  $\Sigma$ , l'inverse à gauche est défini comme un modèle qui détermine quelques entrées de  $\Sigma$  à partir de la connaissance de ses sorties. Cette inversion est exploitée dans les problèmes de détection de défauts, de diagnostic et de reconstruction des entrées inaccessibles. Quant à l'inverse à droite de  $\Sigma$ , il est vu comme un second modèle qui calcule l'entrée exigée afin d'assurer que  $\Sigma$  a un comportement désiré. Cette technique est particulièrement employée dans un contexte de commande et elle est profondément liée aux problèmes de régulation et de suivi de trajectoire. Une illustration simplifiée de ces principes est donnée dans la figure 3.

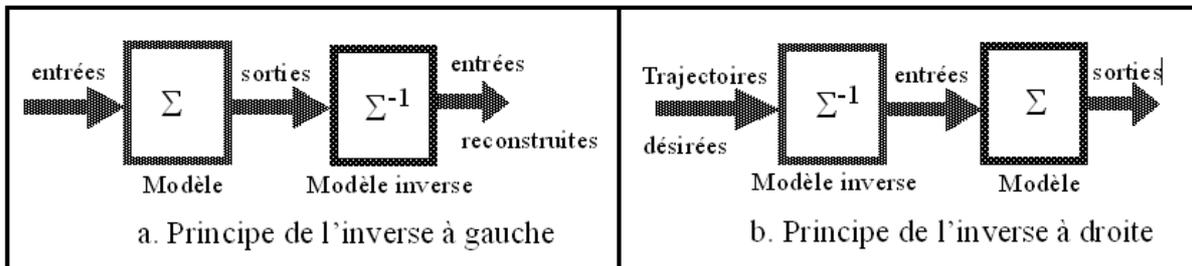


Figure 3 : Principes des inverses à gauche et à droite.

Les principes d'inversion (à gauche et à droite) sont retranscrits dans les figures 4 et 5 dans le cas d'un système TSK à CC avec  $n$  entrées que l'on cherche à inverser par rapport à la variable  $x_n$ .

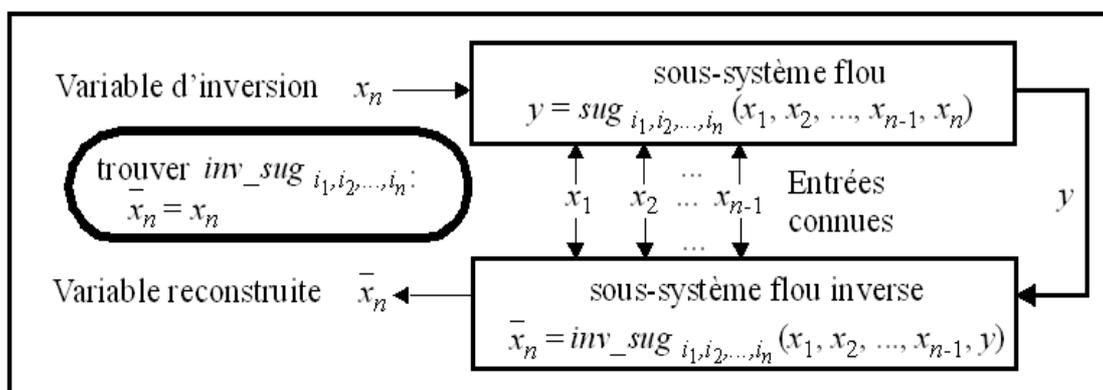


Figure 4 : Principe de l'inversion à gauche d'un système flou.

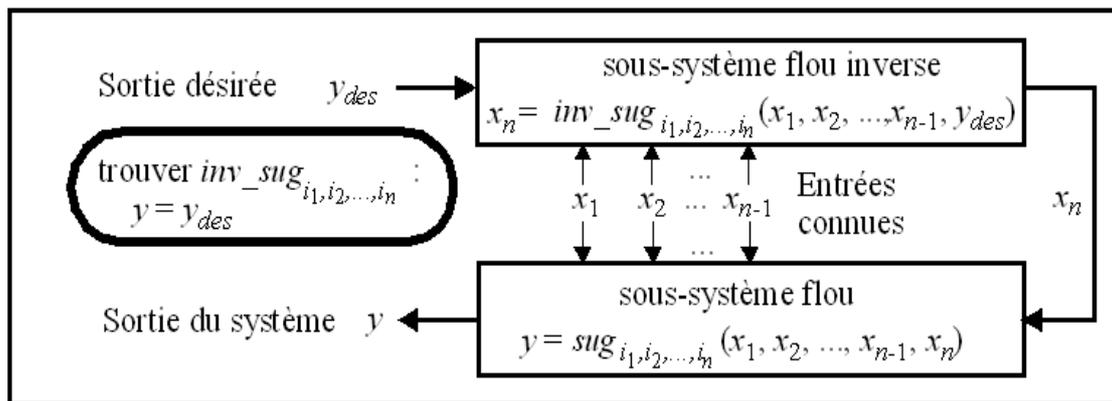


Figure 5 : Principe de l'inversion à droite d'un système flou.

L'inversion des systèmes flous a été largement étudiée dans la littérature floue où plusieurs méthodologies ont été proposées. La première stratégie développée consiste à rechercher le transfert inverse sous la forme d'un système flou. Cette approche implémente un mécanisme d'inversion "règle par règle" par une permutation entre prémisses et conclusions [6][7]. Si cette méthodologie permet l'obtention d'une solution exacte dans le cas des systèmes mono-entrée et mono-sortie (SISO), son exploitation pour des systèmes multi-entrées reste laborieuse. En effet, cette technique conduit à des bases de règles incomplètes, qui nécessitent l'utilisation de symboles "fictifs". Ces derniers reposent sur la définition de fonctions d'appartenance dont les supports sont à l'extérieur des univers de discours. Dans le cas d'un système TSK à CC, la recherche d'un système inverse sous forme d'une base de règles est impossible. En effet, il est clair que l'inversion analytique de ce système aboutit à une fonction de nature homographique et donc non représentable de manière exacte par un système flou TSK à CC [73][74].

Une seconde stratégie d'inversion vise à exploiter des méthodes itératives pour réaliser le transfert inverse d'un système flou [113][159][194]. Des techniques variées ont été exploitées (recherche dichotomique [113], descente de gradient [159], combinaison d'un algorithme génétique et de la méthode de Newton [194]). L'inconvénient de ce type d'approches réside dans le fait que la solution fournie n'est pas exacte et qu'aucune garantie "sérieuse" ne peut être apportée sur la convergence des algorithmes exploités. De plus, le mécanisme itératif inhérent à ces algorithmes peut induire un temps de calcul important, qui doit être réitéré pour chaque nouvelle combinaison des entrées.

Enfin, quelle que soit la méthodologie choisie, le problème des solutions multiples n'est pas abordé. Concernant l'inversion des bases de règles, elle est généralement réservée à celles considérées comme monotones et pour lesquelles l'unicité d'une solution est garantie. Quant aux méthodes itératives, l'existence de solutions multiples s'interprète par une convergence vers des solutions différentes en fonction des conditions initiales choisies. Pour remédier à ces problèmes, nombreuses sont les techniques de commande réservées à des systèmes affines en la commande pour lesquels une inversion analytique est possible [104][206].

Pour contrecarrer ces problèmes et pouvoir inverser un système flou, nous avons proposé [24][74] une méthodologie qui s'appuie sur une démarche purement analytique et qui s'écarte donc des deux approches évoquées précédemment. L'approche proposée repose sur une exploitation directe de la décomposition du système global en sous-systèmes élémentaires. En effet, dans la situation où les paramètres du système flou sont connus, l'expression analytique de ce dernier peut être déterminée et puis mise sous une forme affine en l'entrée d'inversion. Pour prendre en compte la possibilité d'avoir

plusieurs solutions admissibles, l'inversion est abordée d'une manière locale. Dit autrement, l'inversion est appliquée sur les sous-systèmes élémentaires aptes à fournir une solution. L'inversion du système global est alors appréhendée par inversion de certains de ses composants (certains sous-systèmes). Dans ce cadre, sachant que le système flou est considéré comme une collection de sous-systèmes élémentaires, son inversion revient tout simplement à inverser analytiquement chacun des sous-systèmes le composant. Ainsi, suivant les situations, le problème d'inversion pourra ne pas avoir de solution, avoir une solution unique ou encore avoir des solutions multiples. Si le système est considérée comme inversible, l'existence d'au moins une solution est garantie. Si plusieurs sous-systèmes produisent un inverse, un critère de choix sera utilisé pour sélectionner la meilleure solution parmi toutes les solutions existantes. Le choix de ce critère dépend du domaine d'application.

D'un point de vue pratique, il n'est pas nécessaire d'inverser tous les sous-systèmes élémentaires. En effet, il est important de signaler ici que la stratégie d'inversion ne concerne qu'une seule variable. Les calculs développés supposent donc connues les  $n-1$  autres variables d'entrée, et donc les mailles auxquelles elles appartiennent. Autrement dit, pour l'inversion d'un système à  $n$  entrées par rapport à la variable  $x_n$ , les indices de la maille  $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$  peuvent être déterminés. Soient  $i_1^*, \dots, i_{n-1}^*$  ces indices. L'inversion se résume alors à considérer uniquement les sous-systèmes :

$$(i_1^*, \dots, i_{n-1}^*, i_n) ; \text{ avec: } i_n \in [1, N_n - 1]$$

où  $N_n$  est le nombre de symboles utilisés pour la description de la variable  $x_n$ . Ainsi, si  $N_n = 2$  il n'est utile d'inverser qu'un seul sous-système.

Considérons la situation de l'inversion à gauche illustrée dans la figure 4. Si l'on suppose  $x_n$  comme la variable d'inversion, le problème d'inversion consiste à déterminer toutes les solutions de  $x_n$  telles que :  $sug(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = y$ . Par développement de l'équation (10) par rapport à  $\rho_n$ , la sortie du sous-système est donnée par l'expression suivante :

$$y = sug_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n) = \alpha_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) + \beta_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n ; \quad (13)$$

avec :  $\alpha_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}} M_{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, 0}^{i_1, \dots, i_n} \cdot x_1^{\rho_1} \cdot \dots \cdot x_{n-1}^{\rho_{n-1}}$  et :

$$\beta_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}} M_{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, 1}^{i_1, \dots, i_n} \cdot x_1^{\rho_1} \cdot \dots \cdot x_{n-1}^{\rho_{n-1}}$$

Dans ce cas, l'inversion du système devient une simple inversion analytique :

$$inv - sug_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n = (y - \alpha_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_{n-1})) / \beta_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (14)$$

On peut constater que l'inverse d'un sous-système de TSK à CC n'est pas multilinéaire par morceaux. Dit simplement, l'inverse d'un système TSK ne peut pas être un système de TSK. Cette remarque est en concordance avec la difficulté mentionnée dans [6][7] où la construction d'un inverse nécessite la définition des symboles flous fictifs et dégénérés.

Le lecteur intéressé trouvera en annexe 1 (illustrations 2 et 3) deux exemples illustratifs (extraits de nos publications [24] et [74]), qui expliquent les mécanismes applicatifs des principes d'inversion à gauche et à droite dans un contexte pratique.

## 1.4 Contrôle flou conventionnel

### 1.4.1 Contrôle indirect

Ce paragraphe est dédié à notre conception du contrôle flou indirect. Notre objectif principal porte alors sur la synthèse des contrôleurs flous par inversion de modèles pour résoudre les problèmes de régulation et de suivi de trajectoires. Les développements présentés s'appuient sur les résultats des

paragraphe précédents concernant la décomposabilité et le mécanisme d'inversion. Dans ce contexte et à titre illustratif, nous avons fait le choix de présenter deux structures de contrôle bien connues en automatique à savoir la Linéarisation Entrée-Sortie "LES" [99][171] et la Commande à Modèle Interne "CMI" [61][148]. Ces deux techniques ont été développées dans des environnements continu et échantillonné [23][24][25]. Une équivalence existe entre ces deux approches et nous avons pointé, discuté et démontré cette propriété dans [21]. Toutefois et pour des raisons de concision, la "LES" est présentée ici à travers un formalisme continu et la "CMI" dans un cadre échantillonné.

L'approche proposée consiste à représenter le système à commander par un modèle flou nominal dont le nombre de règles est raisonnable et fixé *a priori*, auquel on attache des imperfections vues comme "des imprécisions et/ou incertitudes". Il est important de signaler ici, que dans le contexte du contrôle flou, l'utilisation des termes "imprécision" et "incertitude" est souvent abusive. En effet, cette utilisation est restée cantonnée à des considérations pratiques liées aux erreurs d'approximation et à la présence de perturbations. Dans la littérature relative au contrôle flou, rares sont les méthodes qui exploitent des méthodologies à base de mesures non additives pour traiter ces imperfections.

La représentation des imperfections peut avoir différentes formes et cela dépend de la nature de l'information qu'on souhaite faire apparaître. Généralement, la représentation adoptée reflète la connaissance des phénomènes physiques qui causent les imperfections et la capacité à les représenter sous une forme simple et facile à traiter. D'une manière générale, les imperfections sont classées en deux grandes familles : les imperfections non structurées et structurées. Dans le cadre des systèmes flous, la quasi-totalité des approches se sont focalisées sur le formalisme non structuré. Ce choix a été guidé par le fait que dans une forme non structurée, il est possible de traiter à travers le même formalisme des imperfections de natures diverses (erreurs paramétriques, erreurs d'approximation, perturbations, etc.). Plus précisément, cette représentation est dite non structurée car la seule information que l'on utilise est la borne supérieure des imperfections. C'est cette approche que nous avons adoptée dans la première partie de nos travaux de recherche en contrôle flou.

Les imperfections non structurées peuvent être modélisées comme additives ou multiplicatives. Nous avons opté pour la forme la plus couramment utilisée à savoir la représentation additive. Cette dernière est justifiée par le fait que les imperfections dans une modélisation floue ont comme sources essentielles les erreurs d'approximation floue et les perturbations. En d'autres termes, nous avons choisi de représenter toutes les erreurs de modélisation et/ou les perturbations sous une forme additive globale en considérant que le procédé ne pouvait s'écarter du modèle nominal que d'une certaine quantité  $\Delta$  bornée par une limite supérieure  $\Delta_0$ , *i.e.*  $|\Delta| \leq \Delta_0$  (cf. figure 6).

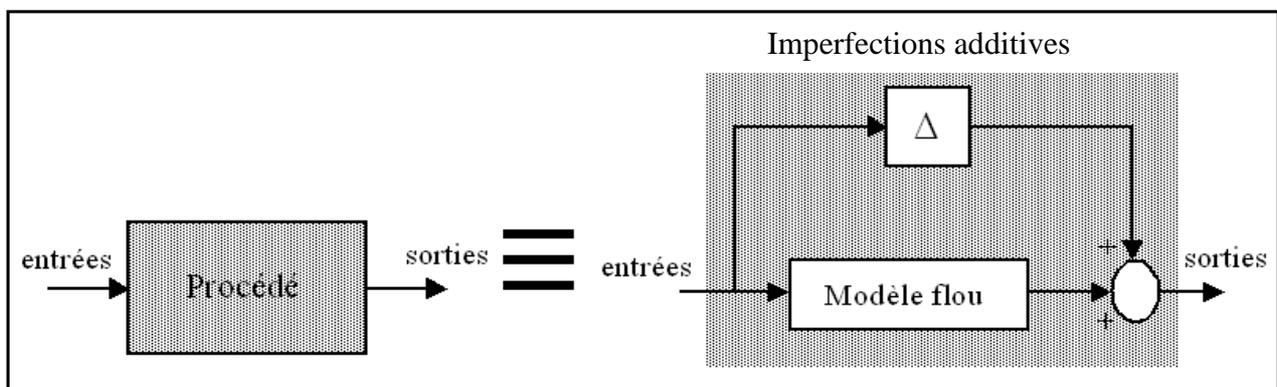


Figure 6 : Représentation des imperfections additives.

Dans ce contexte, le contrôleur est synthétisé par inversion du modèle flou. En présence de ces imperfections "tolérées" et afin d'éviter une détérioration des performances de la structure de commande, des stratégies de robustification ont été proposées. Ces dernières consistent à augmenter le modèle inverse d'une composante additive, capable de compenser et/ou d'atténuer l'influence de ces imperfections sur les performances désirées.

### 1.4.1.1 Commande par Linéarisation Entrée-Sortie - "LES"

Supposons un procédé non linéaire SISO donné par la relation entrée-sortie suivante :

$$y^{(r)} = \Phi(x(t), u(t)) \quad (15)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  est le vecteur d'état,  $u, y$  sont respectivement l'entrée et la sortie du procédé et  $r$  est le degré relatif représentant le retard subi par l'entrée  $u$  avant son influence sur la sortie  $y$ . La fonction non linéaire  $\Phi$  est représentée par un système flou TSK à CC. Dans ce cadre, si  $\Phi_{sug}$  est l'approximation floue optimale de  $\Phi$  au sens d'un critère, l'équation (15) peut être réécrite comme suit :

$$y^{(r)} = \Phi_{sug}(x(t), u(t)) + \Delta(x(t), u(t)) \quad (16)$$

où  $\Delta$  est l'erreur de modélisation et/ou d'approximation, bornée par une constante positive  $\Delta_0$ .

Par application du mécanisme de décomposition détaillé précédemment, le système flou peut s'écrire sous la forme d'une collection de sous-systèmes élémentaires. A chaque instant, seul un sous-système est activé. Le système (16) est alors reformulé comme suit :

$$y^{(r)} = \alpha_{(\omega)}(x) + \beta_{(\omega)}(x).u + \Delta = \alpha_m(x) + \beta_m(x).u + \Delta ; \text{ où } \omega \text{ représente le sous-système activé}$$

Le problème de commande est ici considéré sous l'aspect du suivi d'une trajectoire désirée  $y_r(t)$ . Afin de pouvoir résoudre ce problème de contrôle, le modèle identifié doit assurer la condition de commandabilité de la sortie, *i.e.*  $\beta_m(x) \neq 0$ .

Une approche par linéarisation entrée-sortie consiste à introduire une nouvelle entrée  $v$  et à choisir la loi de commande :

$$u = -\alpha_m(x) / \beta_m(x) + v / \beta_m(x)$$

conduisant à une chaîne d'intégrateurs instables. Une stratégie de placement de pôles est alors nécessaire pour stabiliser le système linéarisé (cf. figure 7).

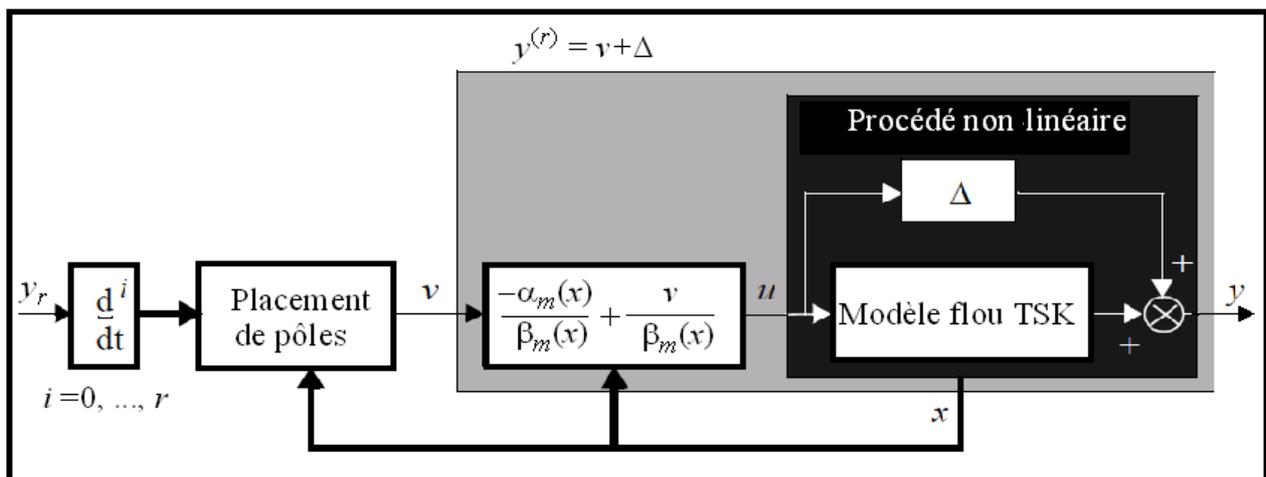


Figure 7 : Principe de la "LES" floue.

Malheureusement en présence des imperfections (représentées par  $\Delta$ ), la loi de commande n'assure pas la robustesse de la structure de commande. Afin de résoudre ce problème et comme illustré dans la figure 8, nous avons proposé d'augmenter la loi de commande par une composante additive.

D'une manière simplifiée si  $u_a$  est choisie égale à  $-\Delta$  (i.e.  $u_a = -\Delta$ ), il est clair que la composante additive compense intégralement les imperfections. Toutefois, celle-ci étant inconnue (seule sa borne supérieure est connue), la loi de commande optimale ne peut pas être implémentée directement. Dans ce cadre, il est nécessaire de remplacer la composante  $u_a$  par une version approximative n'exploitant que des informations disponibles à savoir la borne  $\Delta_0$ . Sur la base de cette information, deux approches ont été développées à cet effet. L'une est basée sur le principe du mode de glissement et l'autre exploite l'atténuation  $H_\infty$  [23][27][34][72][132][171][177][216].

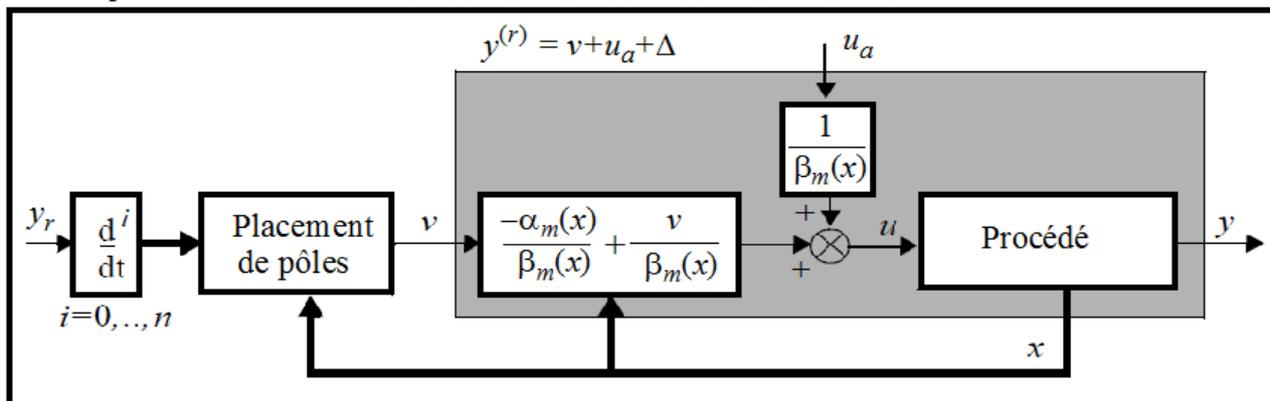


Figure 8 : Principe de robustification de la "LES".

Dans l'implantation de la structure de commande proposée, quelques remarques et considérations méritent d'être soulignées.

- Il est important de signaler que les performances de la loi de commande ne sont garanties que si aucune dynamique de zéros n'est instable. Cette dynamique de zéros et son influence sur la stabilité de la boucle fermée ont été étudiées dans [24].
- L'identification du modèle flou est réalisée en boucle fermée où deux problèmes sont à prendre en compte, à savoir la détermination du nombre de symboles flous et l'identification des conclusions des règles. Le premier problème est résolu selon une approche incrémentale. La base de règles est initialisée avec un nombre de symboles minimal (2 pour chaque variable). Elle est ensuite élargie de manière itérative au sens d'un critère. Si le résultat est jugé insuffisant, le nombre de symboles est augmenté. Dans le cas contraire l'identification est terminée. Quant au deuxième, il est traité par un ajustement des conclusions des règles par des lois adaptatives obtenues en exploitant les théories de la passivité et de Lyapunov [100][112][171][195].
- Dans la méthodologie proposée, le vecteur d'état est supposé connu et accessible à la mesure. Dans le cas contraire, la construction d'un observateur est nécessaire. Dans ce cadre, nous avons proposé une version de la "LES" à base d'observateurs pour estimer le vecteur d'état [23] (cf. figure 9). Toutefois, la construction d'un observateur reste un problème onéreux. Afin de s'affranchir de cette difficulté relativement complexe, nous avons proposé une version échantillonnée de la "LES" [21].
- En présence d'un procédé non linéaire affine en la commande, deux systèmes flous peuvent être utilisés pour représenter séparément les deux fonctions affines. Ce choix, largement assumé dans

la majorité des travaux publiés dans la littérature, peut s'affranchir de la procédure de décomposabilité et facilite l'implémentation des contrôleurs flous.

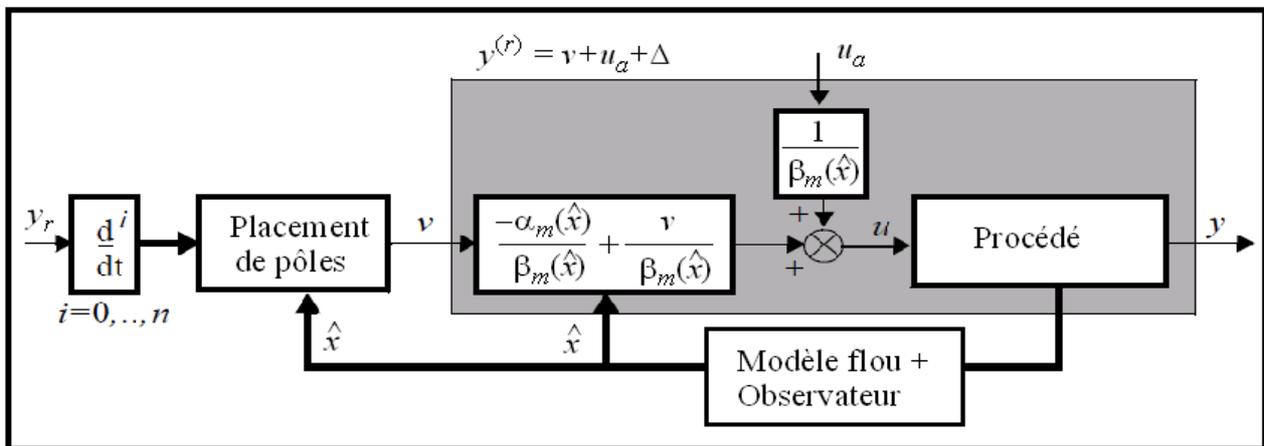


Figure 9 : La "LES" avec observateur.

Pour plus de détails pratiques, le lecteur intéressé trouvera en annexe 1 (illustration 4) une implantation de la commande par "LES" sur un poignet d'un robot Stäubli *via* une architecture TCP-IP. Cette réalisation est extraite de notre publication [23].

#### 1.4.1.2 Commande à Modèle Interne - "CMI"

Supposons un procédé non linéaire sous la forme NARMA suivante :

$$y(k+r) = y(k+\theta+1) = \Psi[z(k)] = \Psi[y(k-n+1), \dots, y(k), u(k), \dots, u(k-m+1)] ; m \leq n$$

où  $y$  et  $u$  sont respectivement la sortie et l'entrée du procédé. Le paramètre  $r$  représente le degré relatif et  $\theta$  le retard effectif en dehors du retard unitaire induit par l'échantillonnage.

La démarche développée pour le cas discret est semblable à celle utilisée dans le cas continu. En effet, l'objectif consiste à modéliser le procédé par un modèle flou et à appliquer par la suite le mécanisme d'inversion proposé afin de permettre la construction d'un correcteur. Ce dernier doit assurer de bonnes performances en termes de suivi de trajectoire entre la sortie  $y$  et la référence  $y_r$ .

On suppose que l'on dispose d'un modèle flou du procédé sous la forme d'une base de règles de type TSK à CC. D'un point de vue pratique, ce modèle peut être identifié à partir d'un ensemble d'observations sur le procédé en boucle ouverte ou en boucle fermée selon des stratégies adaptatives. Dans ce contexte, la sortie du procédé peut s'exprimer comme suit :

$$y(k+\theta+1) = y_m(k+\theta+1) + \Delta(k+\theta+1) = \alpha_m(z_1(k)) + \beta_m(z_1(k)) \cdot u(k) + \Delta(k+\theta+1)$$

où  $z_1(k) = (y(k-n+1), \dots, y(k), u(k-1), \dots, u(k-m+1))^T$  et  $\alpha_m$  et  $\beta_m$  sont les expressions générées par un sous-système flou élémentaire selon le mécanisme de décomposition.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la Commande à Modèle Interne "CMI" [61][148]. Toutefois, une équivalence entre la "CMI" et la "LES" a été démontrée dans [21]. Dans ce cadre, nous avons également prouvé qu'en présence d'un retard, la "CMI" intègre naturellement un prédicteur de Smith [21].

Le principe de la "CMI" illustrée à la figure 10 réside dans l'incorporation d'un modèle flou  $M$  du procédé dans la structure de contrôle [24][26]. La commande  $u$  issue du correcteur  $C$  est alors simultanément appliquée au procédé  $G$  et à son modèle  $M$ . La différence entre les deux sorties génère

un signal d'erreur  $e$  qui est utilisé pour modifier l'entrée du correcteur afin de permettre à la commande de mieux piloter le procédé.

A partir de la figure 10, il apparaît clairement que si  $C = M^{-1}$  alors la boucle CMI réalise un transfert parfait entre la sortie  $y$  du procédé et  $y_r$ , quels que soient la perturbation additive et l'écart entre le procédé  $P$  et le modèle  $M$ .

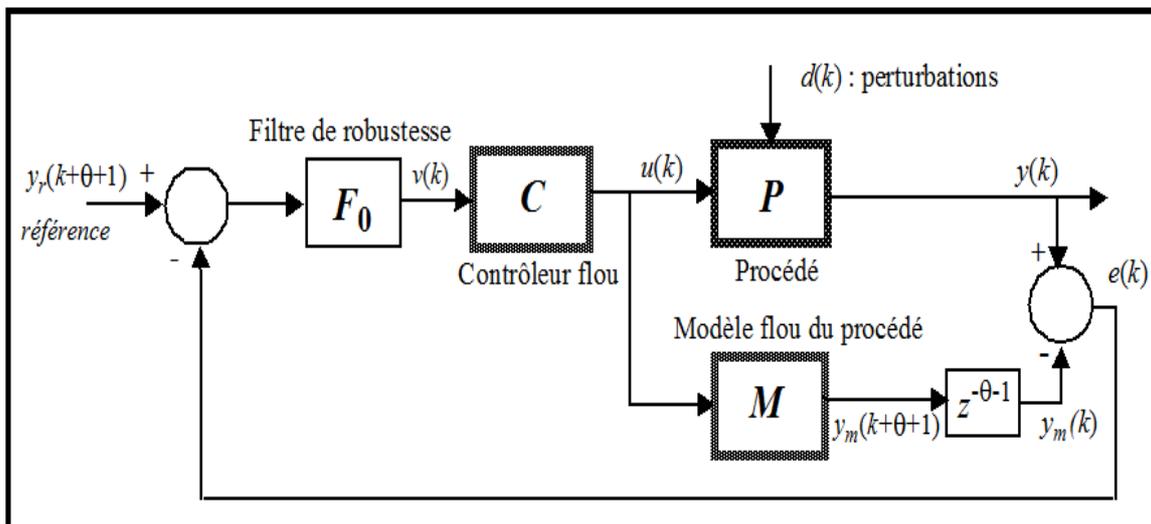


Figure 10 : Principe de la commande à modèle interne ("CMI").

Cette technique a la particularité de pouvoir se présenter comme une généralisation de la commande en boucle ouverte sans les inconvénients de celle-ci. Ses principaux avantages sont la simplicité de synthèse et le réglage explicite de la robustesse à travers un filtre  $F_0$ . Quant aux inconvénients, ils concernent essentiellement son applicabilité réservée uniquement aux systèmes stables et inversibles.

La performance de la "CMI" a été validée sur un procédé (extrait de nos publications [21][24]) et présentée en annexe 1 (illustration 5). Le procédé considéré, proposé initialement dans [164], est vu comme un "benchmark" de la littérature relative à la "CMI".

## 1.4.2 Contrôle direct

Contrairement au contrôle indirect, inhérent à l'obtention d'un modèle du procédé à commander, le contrôle direct fait référence à la construction d'un contrôleur "directement" à partir des règles fournies par des experts. Cette méthodologie, bien que pauvre en termes de garantie de résultats, reste avantageuse en présence d'un procédé difficile à identifier. Comme discuté précédemment, il nous a paru préférable d'utiliser un système de TSK à CC plutôt qu'un système de type Mamdani. Ce choix permet en effet d'éliminer les difficultés liées à la façon de considérer le système de Mamdani (forme conjonctive ou implicative) ainsi que la méthode de défuzzification qu'il faut utiliser. De plus, ce choix nous autorise à outrepasser les opérateurs min/max souvent sources de non-linéarités indésirables dans la dynamique des contrôleurs. Trois applications de nature différente ont été réalisées dans le cadre de nos travaux de recherche, montrant ainsi la variabilité et l'abondance de notre champ d'investigation.

### 1.4.2.1 Application aux systèmes de production

Ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse de Tamani [188] où une méthodologie de pilotage flou à base de surplus pour des systèmes de production à forte densité de produits a été proposée. La stratégie de contrôle a été développée pour piloter un système de production distribué et

décomposable en  $N$  modules de production élémentaires (modules de transformation, d'assemblage ou de désassemblage). Chaque module de production noté  $MP(i)$  est représenté par :

$$MP(i) = \{B_+(i), M_i, B_-(i)\} ; i = 1, \dots, N$$

où  $M_i$  est la machine d'indice  $i$ ,  $B_+(i)$  et  $B_-(i)$  sont respectivement les ensembles des stocks d'entrée et de sortie de  $M_i$ . L'interconnexion de ces différents modules permet de constituer diverses configurations d'un système de production à différents niveaux de complexité. Chaque  $MP(i)$  est piloté par un module de contrôle flou  $MCF(i)$ , aboutissant ainsi à une structure de commande locale distribuée. Cette dernière est illustrée à la figure 11. Dans ce cas, la succession des  $MP(i)$  est volontairement séquentielle pour des raisons de simplicité de représentation.

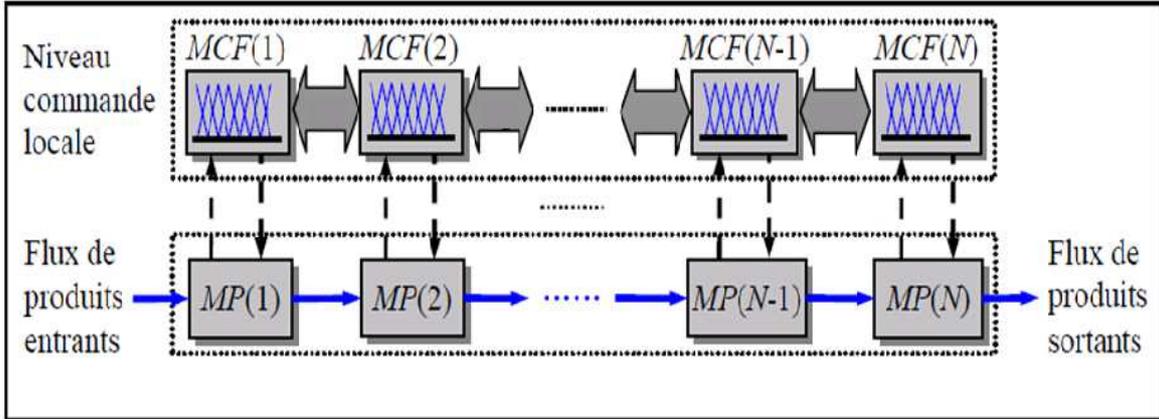


Figure 11 : Architecture distribuée de contrôle.

Dans cette architecture, chaque contrôleur est conçu pour garantir les performances locales assignées. Toutefois et afin d'assurer la performance globale du système et optimiser son fonctionnement, un organe décisionnel de niveau supérieur (un superviseur) est nécessaire pour coordonner les interactions entre les contrôleurs locaux. Cette opération est réalisée en fonction d'un certain nombre d'indicateurs de performance globaux. Dans ce paragraphe, seule la commande locale est abordée. La conception du superviseur sera abordée dans le chapitre 3.

Pour des raisons de simplicité et de facilité de représentation, nous donnerons ici la démarche pour une ligne de transformation mono-produit (cf. figure 12).

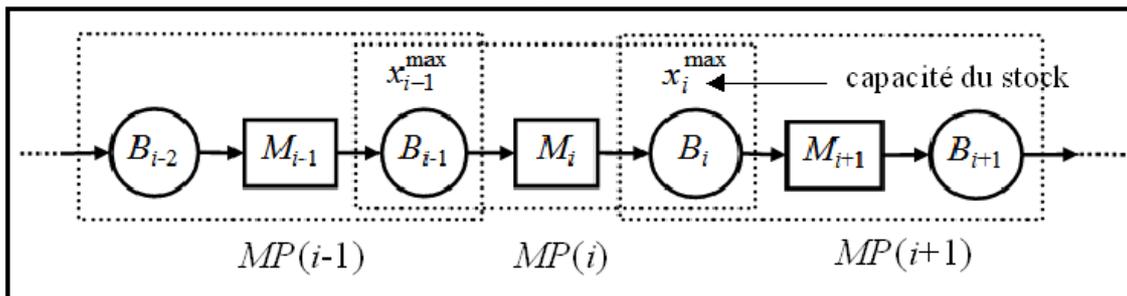


Figure 12 : Chaîne de transformation mono-produit.

La généralisation de cette démarche au cas général (multi-produits avec différentes configurations) est détaillée dans [188]. Dans ce cas, les cardinalités des ensembles  $B_+(i)$  et  $B_-(i)$  sont  $\text{card}\{B_+(i)\} = \text{card}\{B_-(i)\} = 1$  avec  $B_+(i) = \{B_{i-1}\}$  et  $B_-(i) = \{B_i\}$ . Le module  $MP(i)$  s'exprime alors par la formulation suivante :

$$MP(i) = \{B_{i-1}, M_i, B_i\} ; i = 1, \dots, N$$

La problématique du pilotage à base de surplus est illustrée à la figure 13. Cette dernière est posée en les termes suivants : étant donné un module de production  $MP(i)$ , le problème de commande consiste à synthétiser un contrôleur flou  $MCF(i)$  capable, à partir des informations sur le surplus local  $s_i(t)$  et les niveaux des stocks intermédiaires  $x_i(t)$  et  $x_{i-1}(t)$ , de fixer la commande  $r_i(t)$  (le taux de production). Cette commande a pour objectif de réguler la production  $y_i(t)$  de la machine  $M_i$  afin de l'amener à suivre une demande de taux  $d$  et ce en dépit des perturbations et des aléas de fonctionnement. Ces derniers sont identifiés à des taux de pannes et de réparations obéissant à des distributions exponentielles (un processus à temps continu). Dit autrement, l'objectif du contrôleur flou est de suivre au plus près la trajectoire de la demande au cours du temps tout en maintenant un surplus final moyen (borné autour d'un seuil critique) et un niveau d'encours minimal.

Sachant que la capacité maximale d'un module de production est supposée constante, la loi de commande est vue comme une fraction de la capacité maximale allouée. Ainsi, le taux de production  $u_i(t)$  est en fonction de la commande  $r_i(t)$  et il s'exprime comme suit :

$$u_i(t) = r_i(t) \cdot u_i^{\max} \quad ; \quad r_i(t) \in [0,1]$$

En d'autres termes, fixer  $r_i(t)$  revient à fixer le taux de production  $u_i(t)$ . La synthèse du contrôleur flou  $MCF(i)$  est régie par les considérations suivantes :

- d'une part maintenir les stocks d'entrée au-dessus d'un seuil de rupture et les stocks de sortie au-dessous d'un seuil de blocage;
- d'autre part assurer un surplus de production qui permette de compenser les pertes occasionnées par les aléas de fonctionnement.

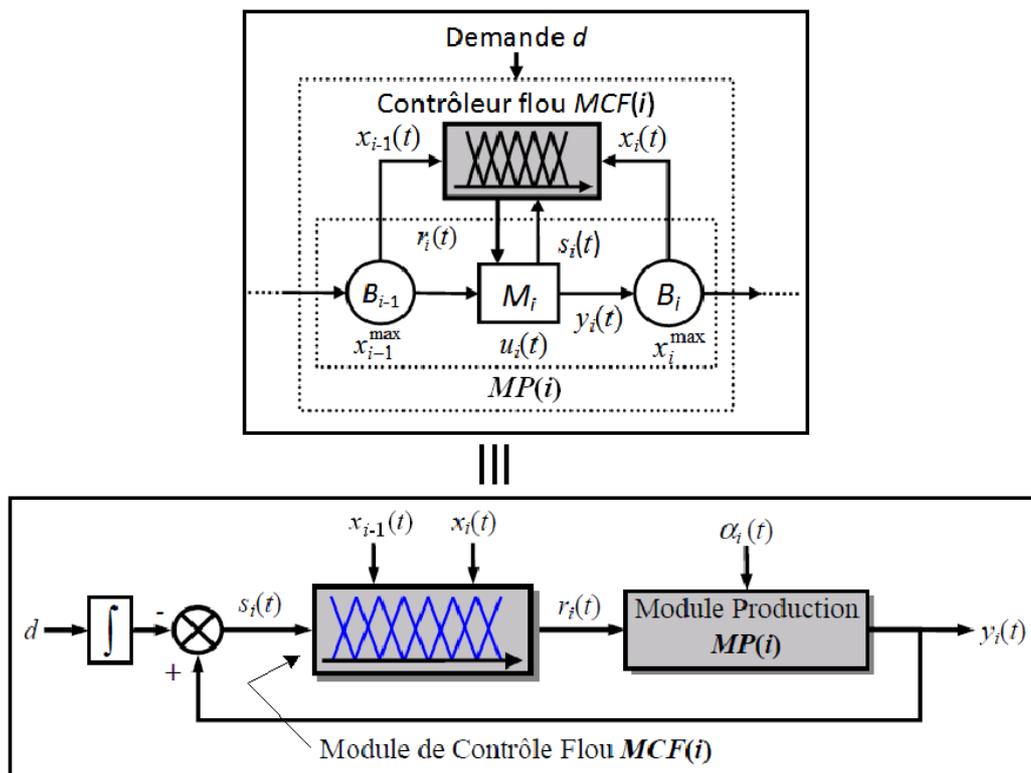


Figure 13 : Principe du pilotage flou à base de surplus.

Dans ce contexte, l'appréciation de l'état de rupture ou de blocage est relative aux capacités maximales des stocks intermédiaires alors que l'état du surplus est jugé en référence à un seuil

critique (spécifié par les experts ou déterminé par des techniques d'estimation [188]). Ainsi, la loi de commande générée par le contrôleur  $MCF(i)$ , pour réguler le taux de production, est guidée par des observations et des considérations expertes. A titre d'exemple :

- **si** le niveau du surplus est satisfaisant **alors** allouer la capacité de production appropriée pour éliminer ou anticiper les phénomènes de rupture (ou famine) et de blocage;
- **si** le niveau du surplus n'est pas satisfaisant, *i.e.* la production est soit en retard, soit en excès par rapport à la demande **alors** produire respectivement au taux maximum ou arrêter la production.

Ces informations sont traduites par une base de règles TSK à CC de la forme suivante :

$$R_i^{(i_1, i_2, i_3)} : \text{ Si } x_{i-1} \text{ is } X_{i-1}^{i_1} \text{ et } x_i \text{ is } X_i^{i_2} \text{ et } s_i \text{ is } S_i^{i_3}, \text{ alors } r_i = \varphi_i^{(i_1, i_2, i_3)}$$

où  $X_{i-1}^{i_1}$ ,  $X_i^{i_2}$  et  $S_i^{i_3}$  correspondent aux  $i_k^{\text{ème}}$  symboles flous associés aux variables  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  et  $s_i$ . L'indice  $i$  fait référence au module  $MP(i)$ . Ces symboles prennent leurs valeurs dans les ensembles  $X_{i-1} = X_i = \{\text{Vide, Partiellement Vide, Normal, Partiellement saturé, Saturé}\}$  et  $S_i = \{\text{Retard, Normal, Excès}\}$ .  $\varphi_i^{(i_1, i_2, i_3)}$  est la conclusion de la règle indexée par  $(i_1, i_2, i_3)$  définissant la fraction de capacité à allouer au module de production. Cette fraction est donnée par les experts en termes de pourcentage par rapport à la capacité maximale (0%, 25%, 50%, 75% et 100%).

La partition des univers de discours et la base de règle complète du contrôleur flou sont détaillées dans [187][188]. Par exemple, la règle suivante :

$$\text{Si } x_{i-1} \text{ est Saturé et } x_i \text{ est Normal et } s_i \text{ est Excès alors } r_i = 0.5 \text{ (50 \%)}$$

signifie que : si le stock d'entrée  $x_{i-1}$  est Saturé et si le stock de sortie est Normal et si le surplus est Excès alors la sortie du contrôleur ordonne un taux de production de 50% de sa capacité maximale.

La méthodologie proposée a été validée sur des applications industrielles complexes considérées comme des benchmarks de la littérature [184][185][186][187][188]. A titre d'illustration, le lecteur trouvera en annexe 1 (illustration 6), les performances du contrôleur flou dans le cas d'un système mono-produit, composé de 4 machines et de 3 stocks intermédiaires.

#### 1.4.2.2 Application au remplissage de moules en fonderie de métaux ferreux

Cette partie porte sur la synthèse d'un contrôleur flou, basée sur la capitalisation de l'expertise humaine, afin d'assurer un "bon" processus de remplissage de moules en fonderie de métaux ferreux. Ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse Cifre de Biarreau [9] à travers une collaboration entre le laboratoire LISTIC et la société SERT (Société d'Etudes et de Réalisations Techniques). Cette dernière, domiciliée à Lyon, est spécialisée dans la régulation de niveau en lingotière de coulée continue. Ce partenariat a permis d'aboutir à une implantation industrielle des travaux développés.

D'une manière générale, une machine de remplissage de moules (cf. figure 14.a) peut se décomposer en 3 parties : la partie réservoir ( $c$ ), la partie busette/quenouille ( $a+b$ ) et la partie moule ( $d=e+f$ ). Les interactions entre les différentes parties sont données par le schéma bloc de la figure 14.b.

La fonte en fusion est fournie par un four puis acheminée vers la machine de remplissage. Cette fonte est déversée dans un réservoir qui alimente le dispositif busette-quenouille servant à remplir les moules. Ce dernier est contrôlé par un actionneur électrique qui a pour rôle de faire bouger la quenouille (verticalement) dans l'axe de la busette. Ce mouvement de la quenouille va entraîner un débit de sortie de la busette alimentant le bol. Dit autrement, pour remplir les moules on agit sur la

hauteur de la tige (la quenouille) pour faire couler (à travers la busette) la quantité désirée de fonte. Le niveau de fonte dans le bol est donné par une caméra "intelligente" qui mesure la hauteur de métal dans le bol [9].

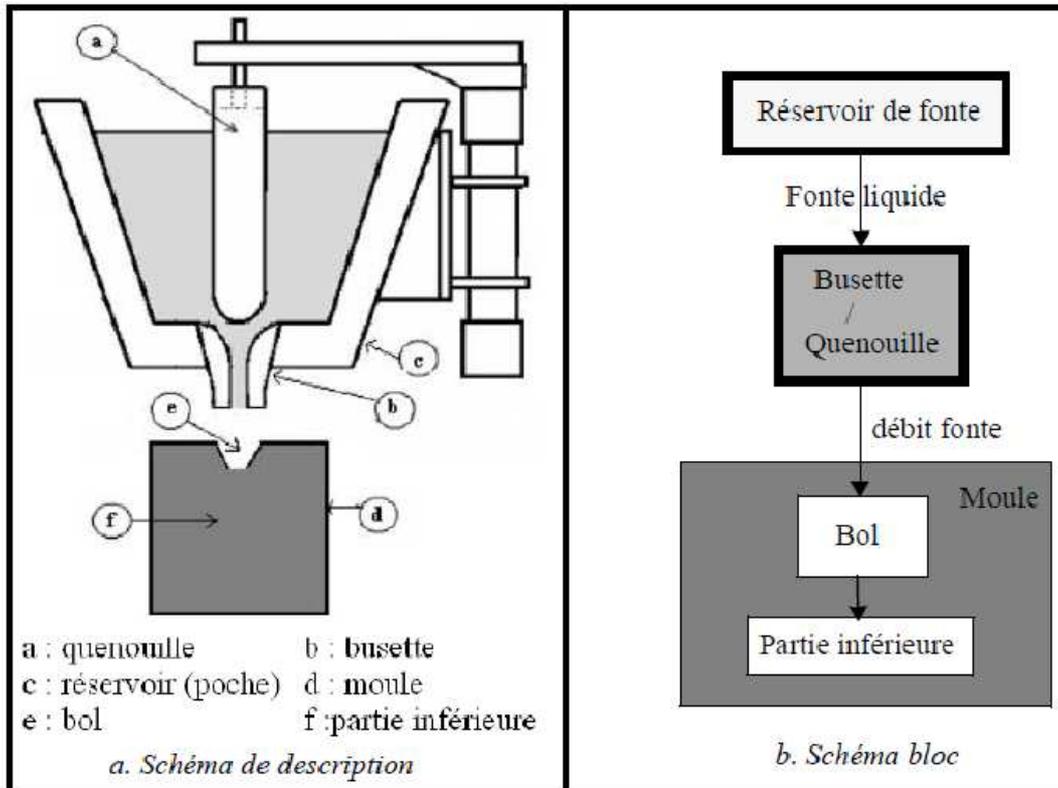


Figure 14 : Schéma d'une machine de remplissage de moules.

D'une manière simplifiée, le mécanisme de remplissage de moules peut être vu comme un système dont l'entrée est la variation d'ouverture appliquée à la quenouille et la sortie est le niveau de fonte dans le bol (cf. figure 15).

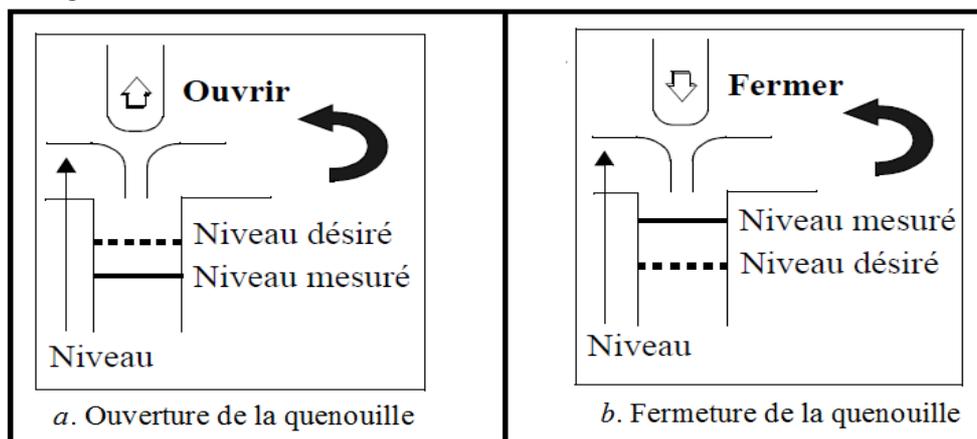


Figure 15 : Ouverture et fermeture de la quenouille.

Le moule est constitué de 2 parties : une partie visible qui sert de point d'entrée du jet de fonte (bol) et une partie invisible dite partie inférieure. Chaque moule (forme du bol et dessin) a un comportement hydrodynamique propre caractérisant sa capacité d'absorption. Cette dernière est vue comme le débit que peut "boire" la partie inférieure en fonction du poids déjà présent dans le moule. La qualité finale des pièces produites lors du processus de remplissage est fortement corrélée à la

performance de la régulation du niveau de fonte dans les bols. Dans un contexte industriel, les fondeurs ont souvent favorisé le savoir-faire et l'expérience des opérateurs pour réaliser et maîtriser ce processus de régulation très difficile. Cette régulation manuelle, bien qu'efficace sur le produit final, est très gourmande en temps et elle nécessite une capitalisation et une expérience importante, parfois non disponible chez les industriels.

De par la complexité du procédé et les nombreux paramètres qu'il fait intervenir, tels que :

- l'influence du comportement busette-quenouille;
- l'influence de la capacité d'absorption du bol;
- les perturbations brutales induites par des incidents de bouchage-débouchage de la busette;
- les variations de niveau de fonte dans le réservoir;

il est malheureusement peu probable d'obtenir une modélisation mathématique (au sens de l'automatique conventionnelle) capable de refléter le comportement de ce procédé. C'est pourquoi dans la synthèse de notre correcteur, aucune phase de modélisation n'est introduite et les règles de fonctionnement du contrôleur sont construites par "copie" du savoir-faire des opérateurs humains. L'objectif de ce travail a été de relever le défi et ainsi de proposer aux industriels un contrôleur flou capable d'éviter les reprises manuelles des opérateurs et d'assurer un bon comportement du processus de remplissage selon une consigne de niveau spécifiée (le niveau de fonte dans le bol). Cette régulation doit également minimiser le temps de remplissage des moules et ce en dépit des variations du procédé et les perturbations subies. D'un point de vue pratique, il est malheureusement très difficile d'obtenir, pour ce type de procédé, un régulateur capable d'assurer un suivi de consigne parfait. Dans ce cas, il est plus judicieux de le piloter afin d'assurer que la sortie du système reste dans une zone de tolérance acceptable et spécifiée par les opérateurs. C'est cette dernière stratégie qui a été privilégiée par les industriels dans la conception du contrôleur intelligent.

Lors du remplissage d'un moule, nous avons identifié trois phases de fonctionnement : l'engorgement, la régulation et la réduction.

- L'engorgement consiste à remplir le plus rapidement possible le bol de coulée. Cette phase, indispensable d'un point de vue qualité, évite l'inclusion de gaz et/ou de sable dans les pièces. Dans ce cadre, un débit important est appliqué afin de favoriser un remplissage rapide et permettre une observation rapide du niveau par la caméra.
- La régulation consiste à maintenir un niveau constant dans le bol pendant son remplissage.
- La réduction est induite par un changement brutal de l'absorption car le moule est quasiment plein. Cette phase permet également de détecter la fin de coulée. Dans ce cas, un débit plus faible est appliqué afin d'anticiper la saturation du moule et éventuellement son débordement.

Dans ce document et pour des raisons de confidentialité, les phases d'engorgement et de réduction ne sont pas discutées. Seule la phase de régulation est analysée d'une manière succincte.

Dans un premier temps, un contrôleur dit du "plan de phase" a été proposé et installé par la SERT chez ses clients (cf. figure 16). L'approche proposée consiste à exploiter les connaissances des experts pour élaborer la loi de commande. En effet, l'expert distingue plusieurs zones et régimes de fonctionnement en observant l'erreur entre la sortie du système (le niveau de fonte dans le bol) et la consigne désirée et la variation de cette erreur. En fonction de ces observations et de son expertise sur le procédé, l'expert associe à chaque zone de fonctionnement une valeur nominale pour une variation de l'ouverture de la quenouille.

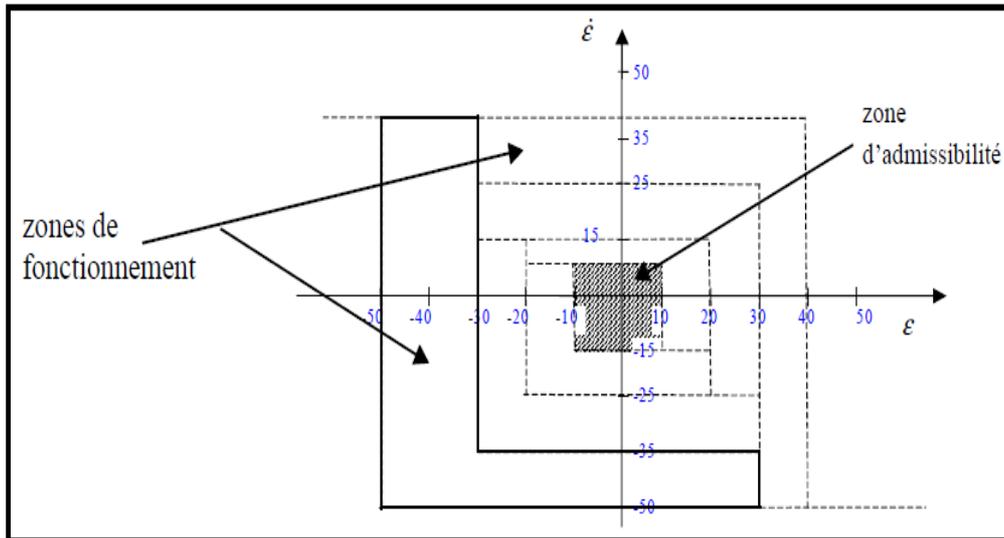


Figure 16 : Décomposition en zones de fonctionnement (plan de phase).

Cependant, l'utilisation de cette méthodologie peut engendrer des à-coups et des dérives dans le fonctionnement du système. Afin d'éviter ces problèmes et améliorer la performance de régulation, nous avons proposé de remplacer le correcteur "plan de phase" par un contrôleur flou de type TSK à CC. Dans ce contexte, en s'appuyant sur les données expertes, un partitionnement des univers de discours en sous-ensembles flous a été déterminé. En effet, les situations sont interprétées par des termes linguistiques selon que le niveau de fonte soit "beaucoup trop haut", "trop haut", "un peu trop haut", "bon", "un peu trop bas", "trop bas" et "beaucoup trop bas" relativement à une consigne fixée. Cette classification est aisément retranscrite en termes d'erreur "Positive Grande", "Positive Moyenne", "Positive Petite", "Zéro", "Négative Petite", "Négative Moyenne", "Négative Grande", en définissant l'erreur comme étant la différence entre la mesure et la consigne. Le terme "Zéro" correspond à la zone d'admissibilité (tolérance sur l'erreur de niveau). L'expert est également sensible au sens de variation du niveau et considère plusieurs cas selon que le niveau augmente rapidement, augmente doucement, est stable, diminue doucement et diminue rapidement. La variation d'erreur correspondante est alors qualifiée de "Positive Grande", "Positive Petite", "Zéro", "Négative Petite" et "Négative Grande". Enfin, d'après sa perception de la situation, l'expert détermine (en exploitant le plan de phase) l'action à adopter concernant la variation d'ouverture et de fermeture de la quenouille. Cette ouverture a été exprimée sous forme numérique avec des conclusions constantes. Pour des raisons de confidentialité, les détails du système flou ne sont pas illustrés dans ce document.

L'approche a été validée sur un problème de régulation difficile où l'absorption diminue lentement dans le cas de bols de forme conique. La performance du contrôleur, donnée en annexe 1 (illustration 7), a été évaluée sur une série de 360 moules (équivalent à 1h de production).

### 1.4.2.3 Application dans la détection de la couleur

Ce travail est réalisé dans le cadre de la thèse de NGuyen (thèse en cours). L'objectif est de développer une stratégie de détection de la couleur pour le robot humanoïde NAO (détection de la couleur d'une balle observée par l'une de ses caméras). Ce travail s'inscrit dans un objectif global de reconnaissance des objets 3D dans un environnement imprécis et incertain. Cette problématique de reconnaissance 3D est en phase de finalisation et ne sera pas détaillée dans ce document.

Pour la représentation des attributs de l'image observée, nous avons opté pour le choix des espaces "HSV" et "Lab" [153][154][155]. Ces derniers sont considérés comme les plus proches de la perception humaine. Dans ce document, nous explicitons uniquement la conception dans l'espace "HSV". La synthèse dans l'espace "Lab" a été réalisée de la même manière et est disponible dans [153].

Dans ce cadre, étant donné une image observée par la caméra de NAO, les composantes  $H$ ,  $S$  et  $V$  sont déterminées à partir des composantes  $RGB$ . Ces composantes viennent alimenter le système de détection de la couleur illustré dans la figure 17 (le système est implanté sur le robot NAO). La difficulté d'obtenir une relation entrée-sortie analytique directe entre le triplet  $\{H, S, V\}$  et la couleur nous a conduits vers l'utilisation d'un système flou à bases de règles. Cette difficulté est inhérente aux problèmes de frontières entre couleurs et aux changements dans les conditions d'observation et/ou de fonctionnement. L'idée de base consiste à exploiter l'expertise humaine pour la construction d'un jeu de règles de type TSK à CC traduisant le comportement entre le triplet  $\{H, S, V\}$  et la couleur correspondante. Selon sa perception, l'expert humain est capable de déterminer la sortie correspondante (la couleur) en fonction des attributs des entrées.

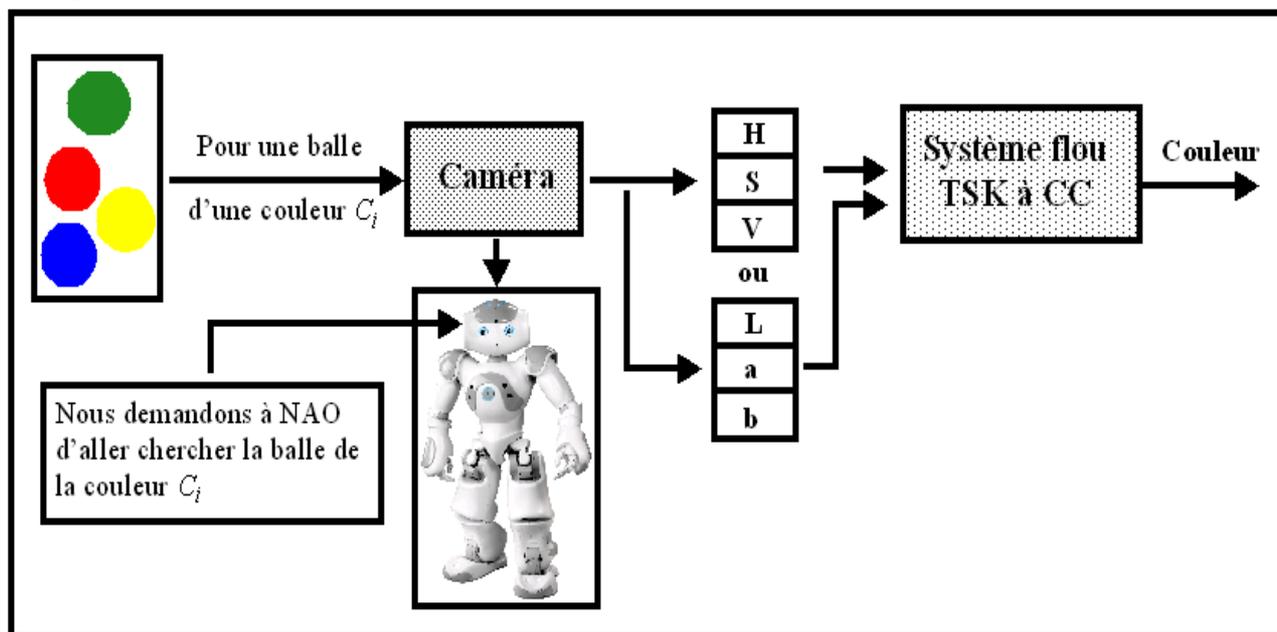


Figure 17 : Principe de la détection de couleur par un système flou.

Les couleurs sont interprétées dans un ensemble de valeurs constantes donnant le numéro de la couleur selon un ordre de couleurs choisi. Selon la partition des univers de discours des entrées, le système de détection peut être formalisé comme un système TSK à CC, donné par une collection de règles sous la forme suivante :

$$R^{(i_1, i_2, i_3)} : \text{Si } H \text{ est } H^{i_1} \text{ et } S \text{ est } S^{i_2} \text{ et } V \text{ est } V^{i_3} \text{ Alors } C = C_{(i_1, i_2, i_3)} = C_i$$

où  $C_i$  est la conclusion de la règle. En effet, chacune des constantes  $C_i$  dans les règles représente le numéro d'une couleur parmi l'ensemble de couleurs possibles. Dans ce travail, neuf couleurs réparties de façon circulaire ont été utilisées pour exprimer les conclusions du système flou TSK à CC, *i.e.* :

$$\{C_i\}_{i=1, \dots, 9} = \{C_1, C_2, \dots, C_9\} = \{1, 2, \dots, 9\} = \{\text{Bleu, Pourpre, Rose, Rouge, Marron, Orange, Jaune, Vert, Cyan}\}.$$

La partition des univers des discours et la base de règles complète sont données dans [154]. Dans la conception du système flou, l'imprécision de la sortie a été supposée égale à  $\pm 1$  couleur. Autrement dit, pour une couleur  $C_i$  le résultat de sa détection est dans l'intervalle des deux couleurs adjacentes, *i.e.*  $[C_{i-1}, C_{i+1}]$ .

Dans l'implémentation temps réel de la méthode (cf. figure 18), un seuil de détection  $\varepsilon$  est nécessaire. D'une manière évidente, la valeur de ce seuil influence le taux de détection de la couleur. En effet, une petite valeur de  $\varepsilon$  détériore le taux de détection et augmente les situations de conflits entre couleurs. Dans ce cas, la fiabilité et la précision de la détection sont meilleures mais l'incertitude sur la décision est grande. En effet, le degré de certitude pour qu'une valeur soit effectivement dans l'intervalle  $[C_i - \varepsilon, C_i + \varepsilon]$  est faible.

Dans le cas contraire, un seuil plus grand améliore la stratégie de détection et affaiblit les cas de conflit (incertitude). En effet, la précision de la détection est faible mais la certitude associée à cette décision est grande. Dans cette situation, l'intervalle  $[C_i - \varepsilon, C_i + \varepsilon]$  est considéré comme le plus sûr avec le degré d'imprécision le plus élevé. Dans des applications réelles, un compromis entre précision et incertitude doit être réalisé et pris en considération afin de choisir la valeur de ce seuil.

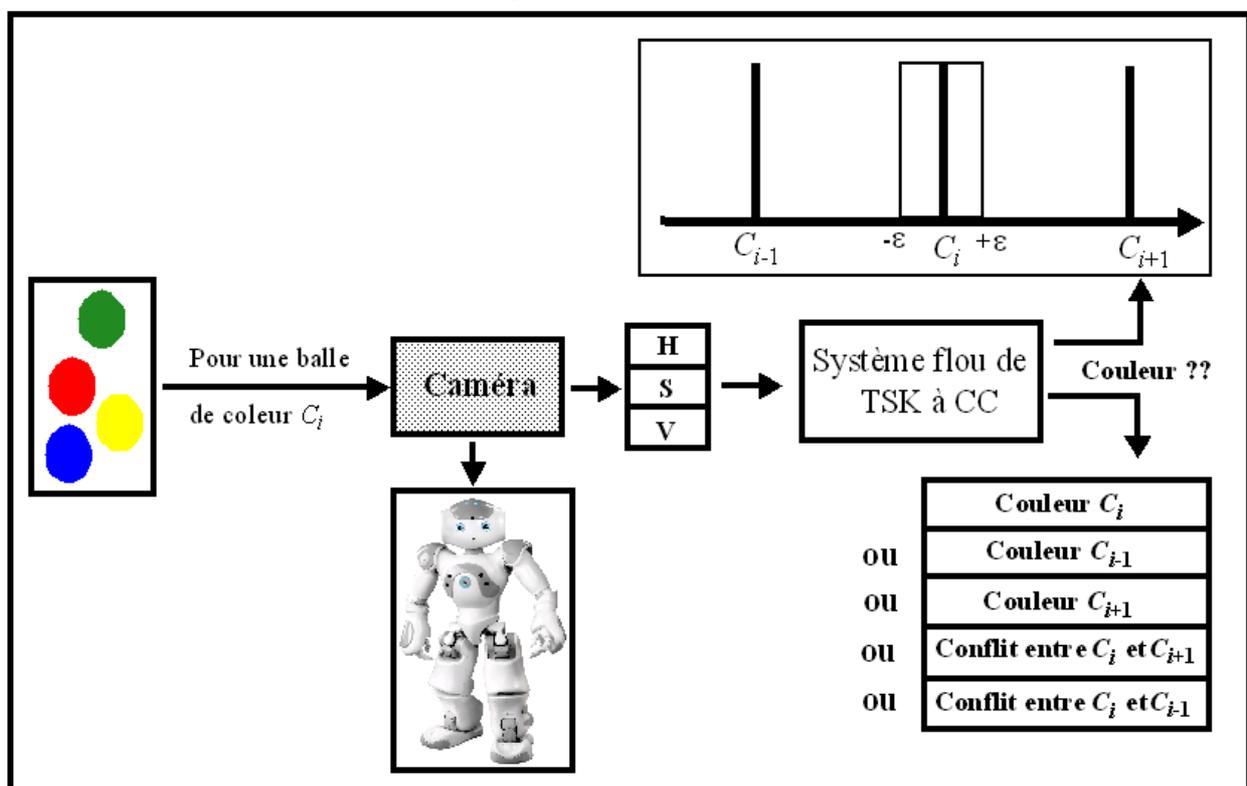


Figure 18 : Système de détection et situations de conflits.

Il est important de signaler que, bien que discutable, la conception du système flou conduit nécessairement à des résultats parmi l'ensemble des situations possibles :  $\{C_i, C_{i-1}, C_{i+1}, \text{conflit entre } C_i \text{ et } C_{i-1}, \text{conflit entre } C_i \text{ et } C_{i+1}\}$ . En d'autres termes, les situations de conflits ne sont pas omises ou écartées mais considérées comme des sorties dégénérées du système flou. Ces problèmes de conflits inhérents à la présence des imprécisions et/ou des incertitudes peuvent être résolus par l'introduction de sources d'informations (caméras) supplémentaires. Dans ce cadre, les problèmes d'ambiguïté peuvent être levés partiellement par l'exploitation de mesures de confiance non additives à travers la théorie des fonctions de croyance. Ce point sera discuté dans le chapitre 3 de ce document.

L'approche développée a été validée (cf. illustration 8 dans l'annexe 1) sur la base d'une étude expérimentale où des séries d'images (100 images / couleur) dans différentes conditions de luminosité et d'orientation de la caméra par rapport à l'objet ont été exploitées. Cette expérience est également détaillée dans [154].

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'aborder différents aspects relatifs à la conception des contrôleurs flous (à base de règles) à travers les facettes directe et indirecte. Il nous paraît essentiel maintenant de discuter quelques points importants afin d'envisager les améliorations ou les orientations que l'on peut apporter à ces travaux de recherche.

- D'un point de vue fonctionnel, les contrôleurs flous héritent d'une sémantique de similarité à des fonctions d'appartenance et aucune notion d'incertitude ou d'imprécision n'est réellement intégrée dans leurs mécanismes calculatoires. En effet, les règles floues expriment que plus on se trouve proche d'une situation donnée, plus le poids accordé à la sortie préconisée est grand. L'interpolation est alors effectuée sur la base des degrés de similarité entre une situation donnée et les situations "prototypiques" décrites dans les règles [51]. Cette constatation révèle que l'aspect incertain et imprécis n'est aucunement pris en compte dans la plupart voire la quasi-totalité des travaux sur les contrôleurs flous à base de règles. D'un point de vue externe, nous avons pointé le fait qu'il était impossible de différencier un système flou d'un quelconque mécanisme de calcul mathématique réalisant un transfert entrées/sorties numérique précis.
- Dans le cadre des approches directes à base d'expertises, à notre avis l'essence de l'approche préconisée par Mamdani a été relativement négligée par les automaticiens au profit de méthodologies de commande indirectes. Cette évolution a "mathématisé" la théorie du contrôle flou et l'a éloignée des préoccupations pratiques du terrain. A nos yeux, les bénéfices de l'approche directe doivent être entretenus et ses faiblesses corrigées. C'est cette vision qui nous a guidés tout au long de notre activité de recherche où l'approche directe n'a jamais été abandonnée, comme en témoignent nos encadrements et nos publications. Au contraire, cette dernière a été renforcée par l'introduction de composants à un niveau supérieur afin de garantir les résultats et d'offrir la possibilité d'intégrer les imprécisions et les incertitudes dans un processus décisionnel.
- D'un point de vue pratique, il est malheureusement fort probable d'être confronté à des situations où la précision n'est pas accessible à la mesure [46][211]. Par essence, l'imprécision et l'incertitude sont dans la nature même des systèmes. Parfois la précision est inutile et elle peut même détériorer la compréhension du fonctionnement d'un système. Dans le cadre du contrôle indirect, à nos yeux, le choix d'un modèle doit être guidé par un compromis entre précision et incertitude. Cette constatation a renforcé notre volonté d'abandonner la vision du contrôle flou conventionnel indirect. En effet, cette conception trop précise, donc trop incertaine et parfois mathématique à outrance est clairement en opposition avec notre perception de l'évolution future de la commande intelligente. A notre sens, l'objectif ne doit pas rester cantonné à une recherche de performances numériques pures mais doit évoluer plutôt vers l'intégration et la manipulation des imprécisions et des incertitudes afin d'améliorer la représentativité, la spécificité et la performance des modèles et des contrôleurs intelligents. Cette philosophie, fera l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 2 : Outils de représentation et de propagation

## 2.1 Introduction

Dans de nombreuses applications de contrôle et de prise de décision nous manipulons des informations imparfaites. Ces dernières sont souvent considérées comme imprécises et/ou incertaines. En effet, les entrées, les sorties, les états et les paramètres manipulés dans la construction des modèles et des contrôleurs sont souvent entachés d'imprécisions et d'incertitudes (variabilité, présence de bruits, aléas de fonctionnement, incomplétude, conflit, erreurs d'estimation, etc.). Parfois, nous sommes confrontés à un manque d'informations car les coûts et les délais d'étude ne permettent d'obtenir qu'un nombre restreint de valeurs mesurées (situation d'ignorance partielle). Face à de telles situations, l'idée d'utiliser une information experte ou subjective pour pallier le manque d'informations serait une bonne alternative. Dans de telles situations et comme discuté dans le chapitre précédent, les approches du contrôle flou conventionnel demeurent insuffisantes. Dans ce contexte et contrairement à ce qui a été souvent énoncé dans la littérature relative au contrôle flou, les aspects imprécis et/ou incertains ne sont pas réellement appréhendés.

Face à ces lacunes, une première alternative consiste à injecter de l'imperfection dans un contrôleur flou (à base de règles) à travers le formalisme du type-2 [106][122][140][141][142][144][214]. Dans ce cadre, une attention particulière a été portée aux systèmes TSK à CC. Les appartenances aux sous-ensembles flous ne sont plus des valeurs réelles précises mais des intervalles. A nos yeux, ces contrôleurs de type-2 exhibent également une sémantique de similarité (comme dans un formalisme type-1) où les degrés d'appartenance précis sont remplacés par des intervalles. Cette méthodologie vise à étendre, *via* le principe d'extension [212], l'expression générique d'un système flou TSK à CC au cas imprécis où les poids des règles et les conclusions sont représentés par des intervalles conventionnels. A notre sens, la sémantique des systèmes de type-2 exploitée dans des problèmes de contrôle est restée cantonnée dans une vision imprécise à base d'intervalles et sa représentativité de l'incertitude demeure relativement pauvre et ambiguë.

Une deuxième possibilité consiste à "fuzzifier" un modèle numérique précis (un modèle régressif linéaire et/ou non linéaire) en considérant que ses paramètres et/ou ses variables sont des intervalles flous. Par exemple, si l'on "fuzzifie" le modèle multilinéaire issu du formalisme TSK à CC [181], on obtient un système flou numérique dont l'implémentation peut être réalisée selon le principe d'extension de Zadeh [212]. D'un point de vue pratique, cette approche reste complexe et onéreuse sur un plan calculatoire [44][157]. Il semble alors plus réaliste de se diriger vers une implémentation exploitant directement les opérateurs de l'arithmétique à base d'intervalles. Toutefois, cette extension directe souffrira des mêmes lacunes inhérentes au calcul par intervalles à savoir l'augmentation de

l'imprécision. Il convient alors de se pencher sur cette problématique afin de proposer des solutions adéquates à ce phénomène de surestimation des résultats.

De par ses potentialités par rapport à une approche type-2, c'est la deuxième alternative qui a été choisie pour exhiber notre problématique de représentation et de commande. Dans ce contexte, les informations manipulées (entrées, sorties, paramètres, etc.) sont représentées par des intervalles graduels (qui généralisent le concept d'intervalles conventionnels et d'intervalles flous) à travers des modèles régressifs. Par voie de conséquence, une relecture des travaux en contrôle flou a été positionnée à travers cette vision.

Tout au long de nos travaux, cette vision "intervalliste" et "graduelle" nous a permis de conserver la souplesse et l'efficacité du calcul par intervalles (à travers des méthodes simples, calculatoires et pratiques) comme un objectif majeur. Nous avons mis en exergue le fait que la représentation par intervalles conventionnels pouvait représenter l'imprécision induite par les limitations des outils employés pour capturer l'information. Toutefois, une telle représentation ne peut pas traiter efficacement un défaut qualitatif en relation avec la véracité de cette information. Dit simplement, si la vision par intervalles permet de représenter l'imprécision, elle ne peut pas représenter correctement notre vision de l'incertitude. Par exemple, comment représenter l'information "je suis sûr à 60% que le paramètre  $\theta$  est dans l'intervalle  $[18, 24]$  ?" Dans ce cadre et afin de remédier à cette insuffisance, nous avons proposé l'exploitation du concept d'intervalles graduels [69][70], qui généralise la représentation par intervalles conventionnels et qui permet ainsi de représenter l'imprécision et l'incertitude *via* la notion de gradualité. Cette vision permet non seulement l'extension du calcul par intervalles conventionnels aux intervalles graduels (opérations arithmétiques, opérations ensemblistes, fonctions d'intervalles, etc.) mais aussi des ouvertures intéressantes vers les théories des possibilités [48][213] et des fonctions de croyance [38][49][170], qui sont à même de mieux appréhender les incertitudes et leur manipulation.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux outils de représentation, de manipulation, de combinaison et de propagation des quantités imprécises et incertaines. Le champ d'application initial qui a motivé l'utilisation de ces outils est le contrôle flou, ou d'une manière plus globale, le contrôle intelligent. Dans un premier temps, un outil mathématique, à base d'intervalles graduels, solide et adapté à la représentation des informations imprécises et incertaines a été proposé. Dans un second temps et après avoir choisi l'outil de représentation, des solutions aux mécanismes de combinaison et de propagation de ces informations à travers des modèles analytiques ont été apportées. A travers nos travaux, nous avons opté pour une vision purement analytique, arithmétique et calculatoire pour résoudre les problématiques de propagation directe (construction de modèles) et/ou inverse (conception de contrôleurs). Notre vision "intervalliste" à travers la notion de gradualité permet l'extension du calcul par intervalles conventionnels au cas graduel (opérations arithmétiques, opérations ensemblistes, fonctions d'intervalles, etc.). Dans ce contexte, il est possible de revisiter "l'arithmétique floue" en utilisant directement l'analyse par intervalles dans un espace de fonctions, qui sont les bornes des intervalles graduels.

## 2.2 Imprécisions et incertitudes

L'imprécision et l'incertitude sont les principales caractéristiques de l'imperfection de l'information [15][50][176]. Elles représentent deux concepts différents mais souvent abusivement confondus dans la littérature [14]. En effet, contrairement à l'imprécision qui porte sur le contenu de l'information, l'incertitude concerne sa qualité. Si l'incertitude porte sur un défaut de relation entre l'information

mesurée et sa réalité, l'imprécision est souvent induite par les limitations des outils employés pour capturer cette information (la température extérieure  $\theta$  est d'environ  $20^\circ$  ou encore  $\theta$  est entre  $18^\circ$  et  $24^\circ$ ) [14][48]. En d'autres termes, l'imprécision fait référence à un défaut quantitatif de la connaissance alors que l'incertitude porte sur un défaut qualitatif [48]. Une proposition peut être imprécise, incertaine ou à la fois imprécise et incertaine [14].

Une des principales causes de l'incertitude d'une information découle de son imprécision [176]. L'imprécision d'une donnée ou d'une mesure peut entraîner une incertitude sur l'information propagée. De la même manière, l'incertitude sur une information peut induire de l'imprécision sur les conséquences de son traitement. D'une manière générale, ces deux imperfections sont liées puisqu'à mesure que l'imprécision augmente, l'incertitude diminue et vice-versa (cf. figure 19).

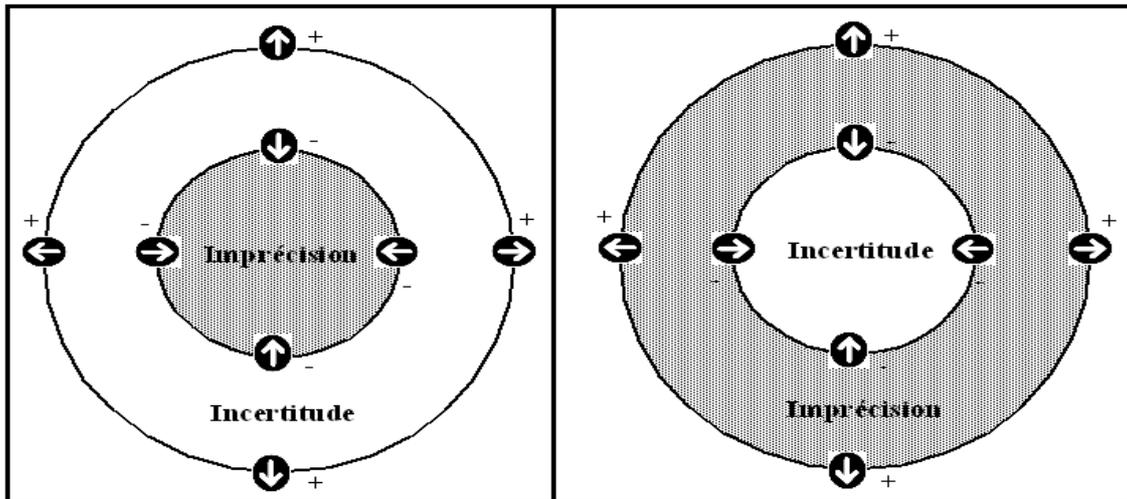


Figure 19 : Imprécision versus incertitude.

L'incertitude est relative à la véracité d'une information par rapport à une référence, caractérisant sa conformité à la réalité. L'incertitude peut être décrite comme objective ou subjective [176]. L'objectivité de l'incertitude est liée à la description de l'information (variabilité et caractère aléatoire de l'information par exemple), tandis que la subjectivité de l'incertitude est liée au crédit que l'on accorde à la source qui fournit l'information (des experts par exemple). Il est important de signaler ici que l'imprécision porte toujours sur le contenu de l'information et non pas sur l'information elle-même. Par exemple, dans un intervalle ce qui est imprécis ce n'est pas l'intervalle (car ce dernier est précis) mais le contenu de l'information dans l'intervalle.

Dans la littérature, de nombreuses théories ont été proposées pour représenter, gérer et manipuler les incertitudes et les imprécisions (probabilités, intervalles, sous-ensembles flous, possibilités, fonctions de croyance, etc.). La théorie la plus exploitée est de loin la théorie des probabilités. Un large panorama des approches probabilistes est donné dans [15]. L'avantage majeur des méthodes probabilistes vient du fait qu'elles reposent sur une base mathématique solide et riche, qui a fait l'objet de nombreux travaux. Toutefois, ces méthodes imposent des contraintes calculatoires complexes et offrent donc peu de souplesse lors de leurs manipulations.

Dans le contrôle, les représentations probabilistes sont essentiellement exploitées dans des approches d'estimation, de filtrage et de commande optimale stochastiques. Ces techniques, tirent profit de la mesure de confiance additive et du fait que des distributions de probabilité régissant les informations manipulées (perturbations, variables et contraintes aléatoires) sont connues ou peuvent être estimées. Toutefois et malgré les performances de ces approches, leurs limitations ont été largement mises en

évidence, en particulier dans le cas d'informations pauvres où les coûts et les délais d'étude ne permettent pas d'obtenir des données riches. De plus, dans un contexte pratique, la manipulation des opérations complexes dans un cadre probabiliste (expressions non linéaires entre variables, optimisation globale, etc.) reste un problème difficile et onéreux d'un point de vue calculatoire.

Dans le contexte de nos travaux de recherche, les avantages et les inconvénients de ces théories par rapport à notre problématique de contrôle flou ont été analysés. Notre objectif n'était pas de dresser un comparatif en termes de performances entre ces théories mais d'extraire les outils de représentation les plus adaptés à notre travail. Nous pensons que chaque théorie possède son propre intérêt, ses avantages et ses inconvénients. La question essentielle n'est pas de savoir, dans l'absolu, quelle est la meilleure théorie mais plutôt de chercher à savoir quelle théorie s'adapte le mieux à une situation et/ou à une application donnée. Dans nos activités de recherche, c'est une vision à base d'intervalles, où les informations manipulées (entrées, sorties, paramètres, etc.) seront représentées par des intervalles graduels, qui a eu notre préférence.

## 2.3 Modèle et outils de représentation

### 2.3.1 Structure du modèle

D'une manière générale, l'établissement du modèle d'un procédé dont on ne sait rien et que l'on considère comme une boîte noire est quasiment impossible. Nous devons fixer *a priori* quelques hypothèses qui permettent de trouver une représentation utile (par exemple la forme du modèle). Notre conception s'inscrit clairement dans une philosophie d'obtention d'un modèle de représentation quand l'on dispose de peu de connaissances physiques sur le comportement du système à modéliser. En effet, sur la base de mesures et/ou d'informations subjectives sur les entrées et les sorties, notre approche vise à exploiter des modèles mathématiques paramétrés et à estimer, par la suite, leurs paramètres de manière à obtenir la meilleure adéquation entre le modèle et la réalité. Tout au long de nos travaux, nous avons supposé que la structure du modèle était fixe et connue *a priori*.

La mise en évidence du fait qu'un système flou à base de règles n'était qu'un organe mathématique implémentant un transfert précis entre les entrées et les sorties sous la forme d'un modèle régressif paramétrique nous a conduits à abandonner les modèles à base de règles et à nous orienter vers la recherche d'une représentation régressive. L'orientation donnée à nos travaux s'inscrit dans la lignée de cette vision où les relations entrées-sorties ont été représentées par des modèles régressifs paramétriques.

Le choix d'un modèle paramétrique linéaire en les paramètres a été guidé non seulement par sa simplicité d'interprétation et d'identification mais aussi par sa proximité structurelle avec les systèmes flous. Ce choix paramétrique a été discuté et explicité par rapport aux modèles non paramétriques dans les travaux de thèse de Bissierier [13]. Il est clair que sur un plan d'apprentissage pur, les capacités d'approximation et de représentation de ces modèles restent relativement limitées par rapport à des modèles non linéaires et/ou non paramétriques. Cette constatation a été corroborée à travers une étude que nous avons menée sur la régression à base des *b*-splines flous [64]. Toutefois, ces modèles *b*-splines restent très difficilement interprétables et exploitables dans un contexte de contrôle.

D'une manière générale, notre modèle régressif à  $n$  variables d'entrées  $x_k, k=1, \dots, n$  et une variable de sortie  $y$  peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$y = \Phi(x, a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1 \cdot \Phi_1(x) + \dots + a_n \cdot \Phi_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \Phi_i(x) \quad (17)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  représente le vecteur d'entrée,  $\Phi_i(x)$  des fonctions linéaires et/ou multilinéaires et  $a_i$  les paramètres du modèle.

Dans l'expression du modèle (17), la variable  $y$  est souvent dite à expliquer (ou encore réponse, exogène ou dépendante). Cette dernière est mise en relation avec les  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  dites explicatives (de contrôle, endogènes, indépendantes ou régresseurs). D'un point de vue pratique, il est malheureusement probable d'obtenir un modèle dans lequel les paramètres ne sont qu'approximativement connus. Par essence, un modèle ne peut être ni certain ni précis. En d'autres termes, un modèle ne peut pas représenter de façon exacte le comportement d'un procédé réel car «l'indétermination» est dans la nature même des procédés physiques.

Afin d'introduire les imperfections dans le modèle (17), une première approche consiste à représenter les variables et les paramètres de ce dernier par des intervalles conventionnels. Cette vision qui porte sur le caractère incomplet de l'information (où il est difficile de connaître avec précision la valeur d'une grandeur) peut introduire de l'imprécision dans le modèle. Par exemple, représenter l'information "le paramètre  $a$  est entre  $a^-$  et  $a^+$  par un intervalle  $[a^-, a^+]$ " signifie que toutes les valeurs possibles de l'intervalle appartiennent à ce dernier avec le même degré de certitude. Un intervalle peut donc être considéré comme une représentation booléenne de l'incertitude. Ainsi, une valeur dans l'intervalle est possible et une autre à l'extérieur est impossible. Comme mentionné dans [55][69], l'idée de passer d'un contexte booléen à un contexte graduel à travers un degré qui prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  permet de représenter la notion d'incertitude "progressive". En d'autres termes, cette notion de progressivité dans l'appartenance à l'intervalle enrichit la représentativité de celui-ci et améliore sa spécificité. Dans ce cas, il est possible de représenter par exemple l'information imprécise et incertaine suivante : "je suis sûr à 60% que le paramètre  $a$  est dans l'intervalle  $[a^-, a^+]$ ".

Afin de pouvoir intégrer conjointement l'imprécision et l'incertitude, nous avons proposé l'utilisation des intervalles graduels pour représenter les paramètres, les entrées et les sorties du modèle. En effet, lorsque les bornes d'un intervalle conventionnel sont flexibles et traduisent une transition graduelle sur l'appartenance à l'intervalle, elles peuvent être représentées par des nombres graduels. Dans une représentation graduelle, deux dimensions sont considérées. La première (la dimension horizontale) est semblable à celle utilisée dans la représentation d'intervalles conventionnels. La seconde (la dimension verticale) est liée aux degrés de vraisemblance ou encore d'incertitude/certitude et est limitée à l'intervalle  $[0, 1]$ . De ce point de vue, l'expressivité et l'évaluation du modèle (17) sont basées sur la manipulation des quantités graduels à travers une extension de l'arithmétique des intervalles.

## 2.3.2 Paramètres et variables du modèle

### 2.3.2.1 Représentation par intervalles conventionnels

La représentation par intervalles est souvent dédiée aux applications où il est difficile de connaître avec précision la valeur d'une grandeur (par exemple, la température extérieure  $\theta$  est entre  $18^\circ$  et  $24^\circ$  ou  $\theta \in [18, 24]$ ). Cette imprécision, qui porte sur le caractère incomplet de l'information, est toujours représentée par une disjonction d'éléments mutuellement exclusifs dont l'un d'eux est la vraie valeur du paramètre [56]. Par exemple dans un contexte discret et "entier",  $\theta \in [18, 24]$  s'interprète comme :

$$\theta \text{ est entre } 18 \text{ et } 24 \Leftrightarrow \theta \in [18, 24] \equiv \theta = 18 \vee 19 \vee \dots \vee 24$$

Rappelons encore une fois que cette imprécision porte toujours sur le contenu de l'information et non pas sur l'information elle-même. Nous insistons ici sur le fait que dans un intervalle ce qui est imprécis ce n'est pas l'intervalle mais le contenu de l'information dans l'intervalle. Dans la littérature, cette vision est qualifiée d'épistémique [37][57][128]. Parallèlement à cette conception, une autre interprétation dite "ontique" considère l'intervalle comme une entité compacte et précise. Autrement dit, l'intervalle est vu comme un ensemble conjonctifs d'éléments [37][57][128].

Dans un contexte numérique, l'arithmétique ou le calcul par intervalles représente un outil typique pour représenter et manipuler l'imprécision. A notre connaissance, l'analyse par intervalles est parmi les outils du calcul ensembliste les plus utilisés. C'est une arithmétique définie sur des intervalles plutôt que sur des nombres réels. Historiquement, le concept philosophique de la représentation d'un nombre par ses bornes est très ancien. En fait, Archimède (287-212 avant notre ère) a défini le nombre irrationnel  $\pi$  par l'expression :  $3+10/71 < \pi < 3+1/7$ . Les premières ébauches modernes de la représentation par intervalles apparaissent dans les années 20-30, en Angleterre à travers les travaux publiés par Burkill [29] et Young [207] et dans les années 50 au Japon grâce aux publications de Sunaga [182]. Toutefois, l'arithmétique par intervalles connaît un réel essor de développement suite à la thèse de Moore en 1962 [146]. Ce dernier a défini proprement cette arithmétique de façon rigoureuse et très complète dans [147]. Sous l'impulsion des travaux de Walter et Jaulin en France [102], la représentation par intervalles a été largement exploitée dans des problèmes d'estimation et d'identification paramétriques à erreurs bornées, de commande robuste et d'optimisation.

Sur un plan mathématique, un intervalle  $\mathbf{a}$  est vu comme un sous-ensemble continu borné de  $\mathfrak{R}$  contenant tous les réels compris entre une borne inférieure  $a^-$  et une borne supérieure  $a^+$  :

$$\mathbf{a} = [a^-, a^+] = \{a \in \mathfrak{R} \mid a^- \leq a \leq a^+\}$$

Cette notation connue sous l'appellation *EP* (*EndPoints*) permet de distinguer une variable bornée  $a$  dont la valeur courante est inconnue (ou mal connue) et qui peut fluctuer entre  $a^-$  et  $a^+$ . Dans cette représentation, il est nécessaire d'imposer un ordre sur les bornes de l'intervalle, *i.e.*  $a^- \leq a^+$ . On parlera alors d'intervalles propres de  $\mathfrak{R}$ . On désigne par  $\mathbb{IP}$  l'ensemble de ces intervalles propres bornés et fermés sur  $\mathfrak{R}$ .

Les opérations conventionnelles sur les intervalles dans l'espace *EP* ont été définies dans [146][147] où le résultat d'une opération entre deux intervalles  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est défini comme le plus petit intervalle au sens de l'inclusion. Autrement dit, c'est le plus petit intervalle contenant tous les résultats possibles de l'opération appliquée à tous les éléments  $a$  de  $\mathbf{a}$  et tous les éléments  $b$  de  $\mathbf{b}$ . Il est important de noter ici que la représentation par intervalles est excessivement conservative et elle implique une augmentation de l'imprécision (effet enveloppant ou encore problème de surestimation des résultats).

De plus, dans l'évaluation des expressions et des fonctions mathématiques, l'occurrence multiple d'une même variable engendre un pessimisme conduisant à une surestimation de l'imprécision. En contrepartie, la représentation par intervalles conduit à un ensemble contenant nécessairement les valeurs et les solutions recherchées. En effet, l'un des avantages majeurs de l'approche par intervalles réside dans la garantie donnée au contenu de l'intervalle obtenu.

La représentation *EP* d'un intervalle par ses bornes est la plus intuitive et la plus utilisée dans le calcul par intervalles. Une alternative à cette dernière consiste à représenter l'intervalle  $\mathbf{a}$  par son milieu (Midpoint)  $M_a$  et son rayon (Radius)  $R_a$ . Dans ce cas, l'intervalle  $\mathbf{a}$  est noté comme suit :

$$\mathbf{a} = (M_a, R_a) ; \text{ avec } R_a \geq 0$$

On parle alors de l'espace de représentation  $MR$  [116][117][136] qui, par rapport à l'espace des bornes, met en évidence la position centrale de l'intervalle et sa largeur (cf. figure 20).

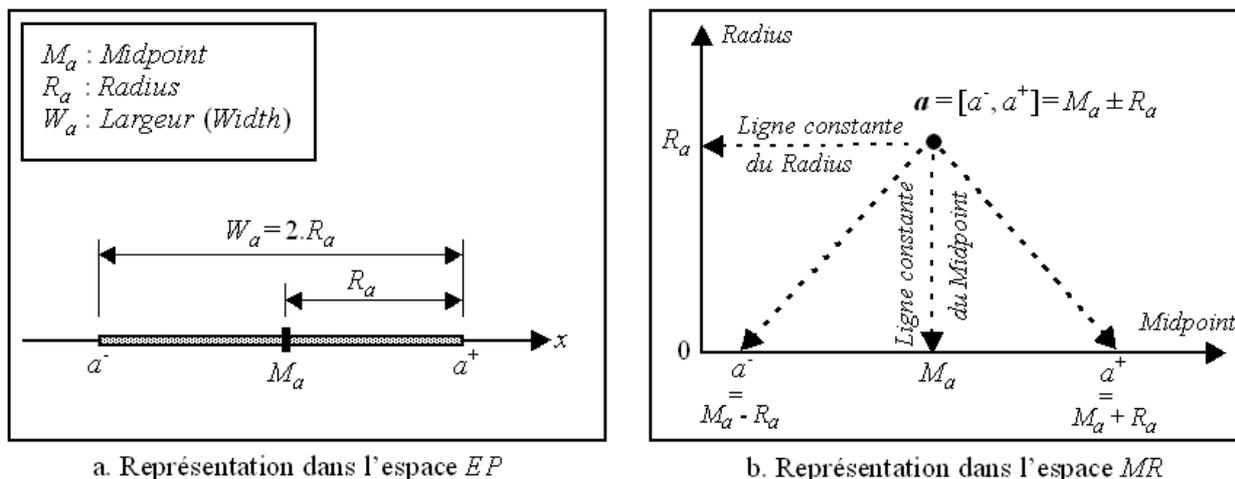


Figure 20 : Représentations  $EP$  et  $MR$  d'un intervalle  $a$ .

La relation entre les représentations  $EP$  et  $MR$  est évidente. Pour la manipulation des intervalles dans l'espace  $MR$ , nous définissons l'étendue relative (relative extent) d'un intervalle. Cette dernière définie par  $RX_a = R_a/M_a$  avec  $M_a \neq 0$ , permet de mieux mettre en valeur les caractéristiques d'un intervalle (cf. figure 21).

Dans la littérature, une autre vision à base d'intervalles a été qualifiée d'incertaine et elle a été exploitée dans la représentation des systèmes [114][115][117][163]. En effet, à travers la représentation  $MR$ , si une connaissance supplémentaire est apportée sur un paramètre  $a$  représenté par un intervalle  $a$ , à savoir que sa meilleure estimation est son Midpoint ( $M_a$ ) alors son Radius ( $R_a$ ) peut être considéré comme une mesure de dispersion (une incertitude) par rapport à son Midpoint. Dans [116], la fonction  $RX$  est interprétée comme un degré d'incertitude relatif d'un paramètre  $a$  approximé par un intervalle  $a$ . Cette vision a été justifiée et motivée par sa proximité avec l'arithmétique stochastique où une représentation par des variables aléatoires gaussiennes est exploitée [2][4][135]. En effet, pour des raisons de simplicité, une variable aléatoire est considérée comme une variable gaussienne de moyenne et d'écart-type connus et les opérateurs sont définis sur des variables indépendantes. Comme expliqué dans [2], les opérations sur des variables gaussiennes (basées sur la moyenne et l'écart-type) ressemblent aux opérations sur les intervalles dans  $MR$ .

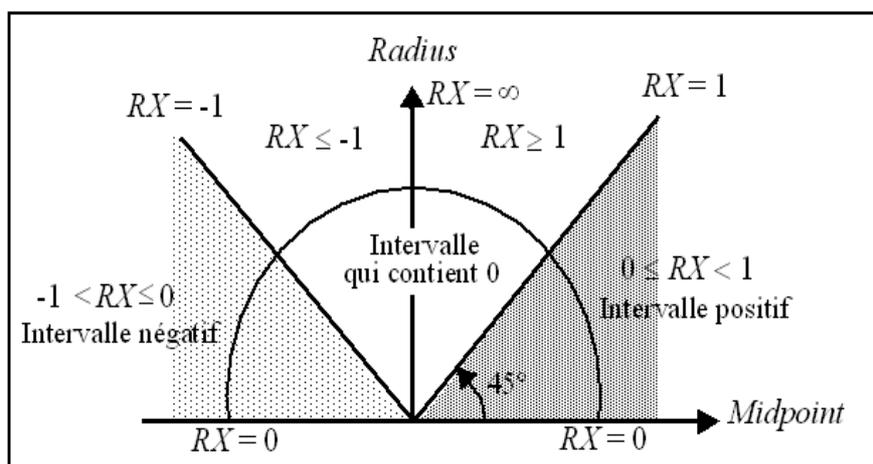


Figure 21 : Représentation de la fonction  $RX$  dans l'espace  $MR$ .

En effet, dans un contexte d'arithmétique stochastique, une variable gaussienne peut être représentée par un paramètre  $\mathbf{a} = (m_a, \sigma_a) \in S$ , où  $S$  est l'ensemble des nombres gaussiens défini par :

$$S = \{(m_a, \sigma_a) \mid m_a \in \mathfrak{R}, \sigma_a \in \mathfrak{R}^+\}$$

Chaque élément de  $S$  est vu comme une distribution gaussienne avec une moyenne  $m_a$  et un écart type  $\sigma_a$ . A titre d'exemple nous donnons dans le tableau 1 un comparatif entre les deux arithmétiques à travers quelques opérations élémentaires.

Opération	Nombres aléatoires gaussiens indépendants	Intervalles
Egalité	$\forall \mathbf{a} \in S, \forall \mathbf{b} \in S:$ $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow m_a = m_b, \sigma_a = \sigma_b$	$\forall \mathbf{a} \in \text{IP}, \forall \mathbf{b} \in \text{IP}:$ $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow M_a = M_b, R_a = R_b$
Addition	$\forall \mathbf{a} \in S, \forall \mathbf{b} \in S:$ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (m_a + m_b, \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2})$	$\forall \mathbf{a} \in \text{IP}, \forall \mathbf{b} \in \text{IP}:$ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (M_a + M_b, R_a + R_b)$
Soustraction	$\forall \mathbf{a} \in S, \forall \mathbf{b} \in S:$ $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (m_a - m_b, \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2})$	$\forall \mathbf{a} \in \text{IP}, \forall \mathbf{b} \in \text{IP}:$ $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (M_a - M_b, R_a + R_b)$
Multiplication par un scalaire	$\forall \mathbf{a} \in S, \forall \omega \in \mathfrak{R},$ $\omega \times \mathbf{a} = (\omega \cdot m_a,  \omega  \cdot \sigma_a)$	$\forall \mathbf{a} \in \text{IP}, \forall \omega \in \mathfrak{R},$ $\omega \times \mathbf{a} = (\omega \cdot M_a,  \omega  \cdot R_a)$
Négation	$\forall \mathbf{a} \in S,$ $\text{neg}(\mathbf{a}) = -\mathbf{a} = (-m_a, \sigma_a)$	$\forall \mathbf{a} \in \text{IP}$ $\text{neg}(\mathbf{a}) = -\mathbf{a} = (-M_a, R_a)$

Tableau 1 : Comparatif des opérations entre les intervalles et les nombres gaussiens indépendants.

Il est important d'insister sur le fait que malgré la proximité opérationnelle des arithmétiques  $MR$  et stochastique sur les nombres gaussiens, leur finalité et leur utilisation restent distinctes. En effet, l'arithmétique par intervalles fournit les bornes garanties pour un résultat, tandis que l'arithmétique stochastique fournit des intervalles de confiance. En raison de l'effet enveloppant de l'arithmétique par intervalles, une augmentation rapide de la largeur des intervalles calculés peut se produire. Dans une telle situation, un intervalle de confiance est considéré comme «plus réaliste». Pour plus de détails sur l'arithmétique stochastique et sa correspondance avec la représentation  $MR$ , le lecteur est invité à consulter les références [2][4][135].

Une fois la représentation par intervalles introduite, quelques remarques et considérations méritent d'être explicitées.

- Dans notre vision de la représentation imprécise par intervalles, une variable réelle  $a$  est uniquement représentée par un intervalle  $[a^-, a^+]$  (dit ensemble de vraisemblance) supposé contenir  $a$  et rien d'autre [101]. Contrairement à une représentation par intervalles, dans une approche probabiliste une variable réelle  $a$  est représentée par une densité de probabilité (loi de probabilité) qui intègre deux types d'information à savoir le support qui contient à coup sûr la variable  $a$  et la distribution de cette variable sur ce support [101]. Il est important d'insister sur le fait que si des informations suffisamment riches sont disponibles pour estimer correctement les densités de probabilité, cette représentation est beaucoup plus riche qu'une vision intervalliste. Le reproche majeur qu'on peut «associer» à l'approche ensembliste est le manque de spécificité

des intervalles. Toutefois, si cette vision est considérée comme relativement pauvre et moins spécifique qu'une vision probabiliste, elle a le mérite de :

- permettre des manipulations plus souples sur des calculs plus complexes (expressions non linéaires entre variables, problèmes d'optimisation, problèmes de propagation, etc.) [101];
  - permettre de s'affranchir d'une exigence stricte sur les propriétés statistiques des variables manipulées [101];
  - préserver le support si des lois de probabilités sont exploitées. En effet, le support d'une distribution issue d'un calcul probabiliste est toujours inclus dans l'intervalle obtenu par une arithmétique sur les intervalles. D'une manière générale, le support issu d'un traitement probabiliste sur des lois de probabilités est toujours inclus dans l'intervalle obtenu par une arithmétique sur les intervalles représentant les supports de lois combinées [101].
- Il est bien connu qu'en présence d'un manque d'informations, la théorie de probabilités peut conduire à des confusions. En effet, supposons par exemple que pour la température  $\theta$  nous disposions uniquement de l'information suivante : on sait que  $\theta$  est inférieure à  $24^\circ$  et supérieure à  $18^\circ$ . Dans ce cas, cette information est représentée par :  $\theta \in [18, 24]$ . Le principe dit de "raison insuffisante" de Laplace préconise de représenter cette connaissance sur  $\theta$  par une loi de probabilité uniforme sur  $[18, 24]$ . En effet, la probabilité d'un événement est définie comme le rapport entre le nombre de résultats élémentaires favorables à cet événement et le nombre total de résultats élémentaires. Nous sommes donc clairement en présence d'une distribution uniforme sur l'ensemble des résultats. Cette conception est inhérente à l'acceptation du "principe de symétrie" connu également sous l'appellation de principe de la raison insuffisante. Selon ce principe, les résultats élémentaires sont également vraisemblables et sont supposés avoir des probabilités identiques. En d'autres termes, ce principe repose sur notre ignorance car il n'y a aucune raison connue et valable de ne pas considérer les événements équiprobables. Ce choix de distribution est contestable dans la mesure où une information supplémentaire (dont on ne dispose pas) a été portée à  $\theta$ , à savoir l'équiprobabilité. Dans ce cas, la vision probabiliste ne différencie pas l'équiprobabilité de l'ignorance et elle confond la variabilité et l'incertitude. En effet, la manipulation de l'incertitude et de l'ignorance partielle conduit à des paradoxes bien connus [172].
  - Dans sa version classique, la probabilité est une mesure précise de l'incertitude dans le sens où la véracité relative à l'occurrence d'un événement  $a$  est représentée par un nombre précis  $\text{Prob}(a)$ . Pour enrichir les probabilités conventionnelles et permettre d'introduire de l'imprécision sur ces dernières, le concept des probabilités imprécises (intervalles de probabilités) a été introduit et exploité [5][8]. Dans ce contexte, la probabilité n'est plus représentée par une valeur précise mais par un intervalle  $[\text{Prob}^-(a), \text{Prob}^+(a)]$ , où  $\text{Prob}^-(a)$  et  $\text{Prob}^+(a)$  sont des mesures de probabilité respectivement inférieure et supérieure. Cette méthodologie (et ses versions modernes [40]) est très riche et sans doute la plus complète pour représenter l'imprécision et l'incertitude. Toutefois, cette théorie ne fait pas partie du travail présenté dans ce document.
  - Il est important d'insister sur le fait que, dans la vision imprécise par intervalles exploitée dans ce document, représenter une variable  $a$  par un intervalle  $\mathbf{a} = [a^-, a^+]$  ne suppose pas que la loi de probabilité de  $a$  soit uniforme. En effet, cette représentation signifie uniquement que la variable  $a$

est imprécise et qu'elle est représentée par une disjonction de valeurs, entre les bornes  $a^-$  et  $a^+$ , mutuellement exclusives dont l'une est la vraie valeur de la variable.

### 2.3.2.2 Représentation par intervalles graduels

Lorsque les bornes d'un intervalle conventionnel sont flexibles et traduisent une transition graduelle sur l'appartenance à l'intervalle, elles peuvent être représentées par des nombres graduels [69][70]. Cette philosophie de représentation permet d'augmenter la spécificité d'un intervalle conventionnel et d'enrichir sa représentativité et sa manipulation à travers les théories des mesures de confiance non additives. Cette constatation a renforcé notre intérêt pour les intervalles graduels. Dans ce contexte, un intervalle réel  $a$  devient tout simplement un intervalle graduel  $a(\lambda)$  lorsque ses bornes sont des nombres graduels.

Un nombre graduel est modélisé par une fonction de  $(0,1]$  dans  $\mathfrak{R}$ . En d'autres termes, un nombre graduel est simplement un nombre paramétré par un degré de pertinence et/ou de vraisemblance  $\lambda \in (0,1]$ . Un exemple typique d'un nombre graduel est l'inverse de la fonction de répartition utilisée dans les simulations de Monte-Carlo [3]. Comme dans un intervalle conventionnel, un intervalle graduel est représenté par la paire ordonnée de ses deux bornes graduelles appelées profils gauche et droit. L'intervalle graduel est alors noté par :

$$a(\lambda) = [a^-(\lambda), a^+(\lambda)] ; \text{ avec : } a^-(\lambda) \leq a^+(\lambda)$$

où les bornes  $a^-(\lambda)$  et  $a^+(\lambda)$  sont des nombres graduels. Dans un contexte d'équivalence avec les intervalles flous, les bornes  $a^-(\lambda)$  et  $a^+(\lambda)$  sont supposées continues et leurs domaines ont été étendus sur  $[0, 1]$  (c'est-à-dire  $a^-(0)$  et  $a^+(0)$  sont définis).

Un intervalle conventionnel est un cas particulier d'intervalle graduel avec des profils constants. Dans ce cadre, il est clair qu'un intervalle graduel est beaucoup plus riche qu'un intervalle conventionnel. En effet, en plus de sa représentation de l'imprécision, il est à même de véhiculer de l'incertitude et de considérer dans un même formalisme des représentations pessimistes et optimistes.

Etant donné un intervalle graduel trapézoïdal  $a(\lambda)$  (cf. figure 22), le niveau 1 qui correspond à l'intervalle  $[a^-(1), a^+(1)]$  a une "vraisemblance" maximale. Cet intervalle est le plus précis mais le degré de certitude pour qu'une valeur se trouve effectivement dans cet intervalle est le plus faible (l'intervalle le plus risqué). Par écartement de bornes, on incorpore des valeurs qui sont de moins en moins vraisemblables pour finalement atteindre le niveau 0 qui fait référence à l'intervalle  $[a^-(0), a^+(0)]$ . Ce dernier est vu comme le plus imprécis mais considéré comme le plus "sûr" avec le degré de certitude le plus élevé pour qu'une valeur soit dans cet intervalle. En dehors de ce niveau 0, une valeur est considérée comme impossible.

Afin de spécifier la forme d'un intervalle graduel, deux fonctions (profils) additionnelles sont employées pour lier le niveau 0 au niveau 1 selon la dimension verticale. Par manque d'informations, les profils graduels sont souvent considérés comme linéaires. Cette supposition aboutit aux formes conventionnelles les plus exploitées dans la littérature, à savoir les formes triangulaires et trapézoïdales [32][86][87]. Ce choix de linéarité est également guidé par des considérations pratiques telles que la facilité d'identification, de manipulation et d'interprétation et la proximité avec des informations subjectives. Bien évidemment, d'autres formes non linéaires plus complexes peuvent être envisagées si la situation considérée l'exige. D'un point de vue implémentation, la définition de la forme des profils est réalisée sur la base des méthodes probabilistes et/ou des techniques d'apprentissage et de régression.

La figure 22 présente un exemple d'intervalle graduel trapézoïdal. Pour des raisons de simplicité d'interprétation et comme souvent exploité dans la représentation floue, une rotation de  $\pi/2$  est opérée sur la figure 22.a pour aboutir à la figure 22.b. Autrement dit, l'intervalle graduel est représenté avec les coordonnées  $(a(\lambda), \lambda)$  au lieu des coordonnées  $(\lambda, a(\lambda))$ .

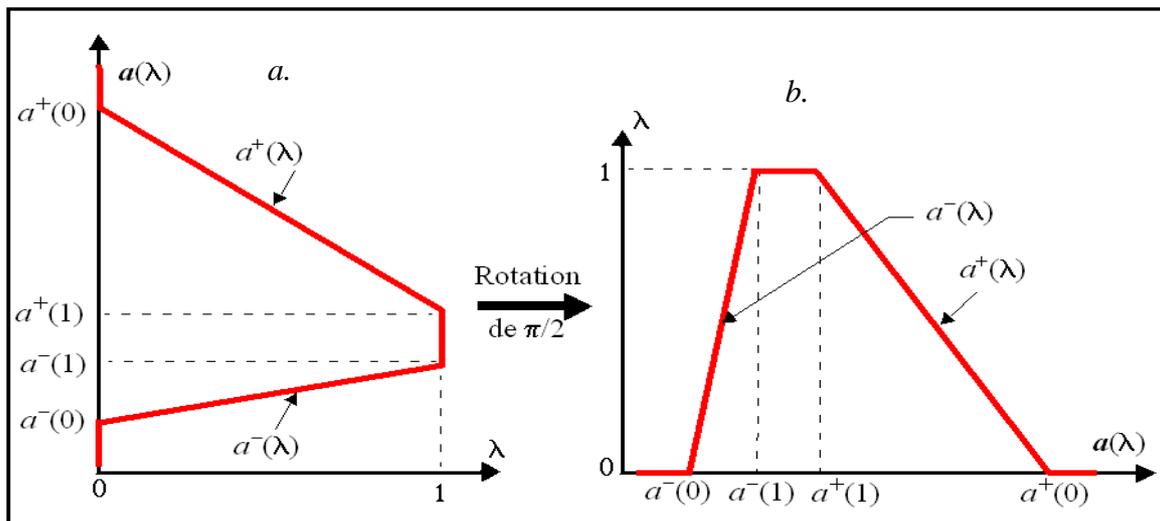


Figure 22 : Représentation d'un intervalle graduel trapézoïdal.

Pour éclaircir nos propos, reprenons l'exemple de la température. Supposons qu'on demande à un météorologue d'estimer la température  $\theta$  pour laquelle il ne dispose que de quelques mesures. L'expert nous fournit l'information suivante : "je suis certain que  $\theta$  se situe entre  $18^\circ$  et  $24^\circ$ , mais les valeurs entre  $19^\circ$  et  $21^\circ$  semblent être les plus vraisemblables". Cette information peut être traduite en un intervalle graduel. On peut donc définir l'intervalle dans lequel l'expert est certain de pouvoir trouver le vrai paramètre, c'est le niveau 0, correspondant à  $\lambda = 0$  (l'intervalle  $[18, 24]$ ). De plus, l'expert a apporté une information supplémentaire en exprimant sa préférence au sein de cet intervalle pour l'intervalle  $[19, 21]$  (le niveau 1), qui donne la précision la plus élevée à son estimation mais avec le degré de certitude le plus faible. Dans ce cas, la température peut être représentée ou approximée par l'intervalle graduel trapézoïdal illustré dans la figure 23 et donné par :

$$a(\lambda) = [a^-(\lambda), a^+(\lambda)] = [\lambda + 18, -3\lambda + 24].$$

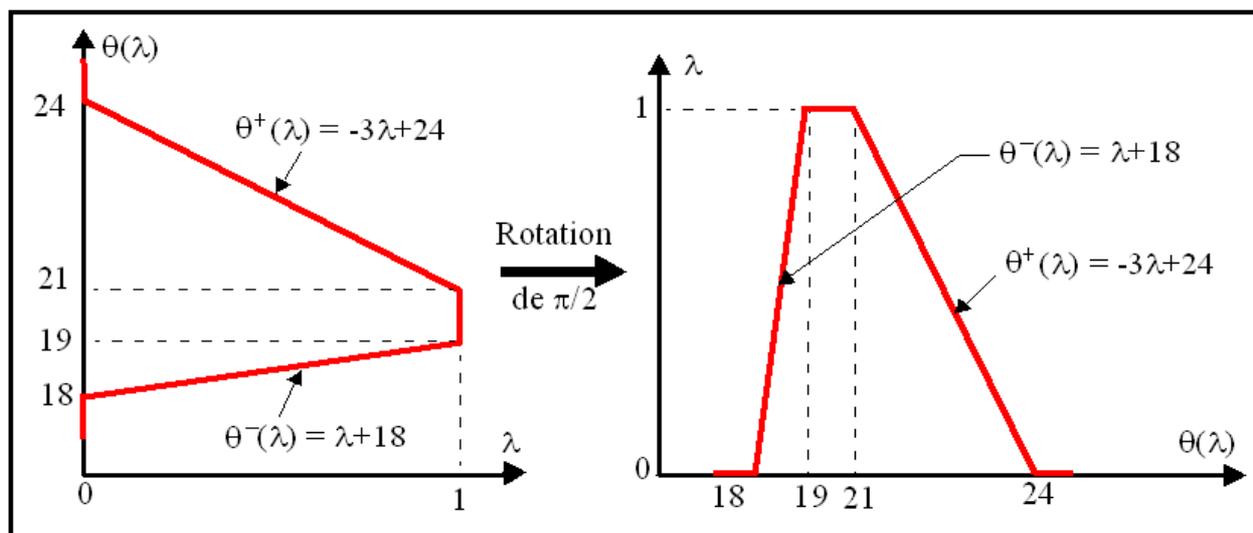


Figure 23 : Représentation de  $\theta$  par un intervalle graduel trapézoïdal.

Il est important d'insister sur le fait que dans un intervalle graduel aucune contrainte de monotonie n'est imposée aux nombres graduels représentant ses bornes. Bien évidemment, un nombre réel peut être vu comme un nombre graduel avec des profils constants [69][70].

La sémantique simplifiée associée à la représentation d'une variable  $a$  par un intervalle graduel trapézoïdal  $a(\lambda)$  est illustrée dans la figure 24. L'imprécision du paramètre  $a$  est associée à la dimension horizontale et elle est représentée par un intervalle de valeurs dont l'une est la vraie valeur de  $a$ . L'incertitude relative à ce paramètre  $a$  est exhibée sur la dimension verticale en fonction d'un degré  $\lambda$  entre 0 et 1. Ce degré peut être interprété en termes de mesures de possibilité et de nécessité dans le cadre de la théorie des possibilités. Il peut également être traduit par des mesures de croyance et de plausibilité à travers la théorie de l'évidence.

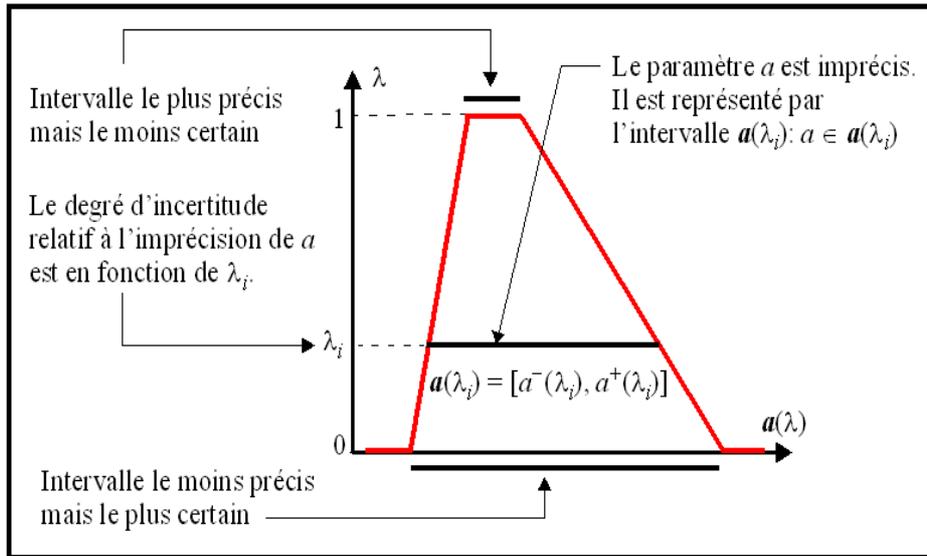


Figure 24 : Sémantique simplifiée associée à  $a(\lambda)$ .

Par analogie avec les intervalles conventionnels, il est possible de caractériser l'intervalle graduel  $a(\lambda)$  par son milieu (Midpoint)  $M_{a(\lambda)}(\lambda)$ , son rayon (Radius)  $R_{a(\lambda)}(\lambda)$  et son étendue relative (relative extent)  $RX_{a(\lambda)}(\lambda)$ . Pour alléger les notations, nous omettrons dans toute la suite le paramètre  $\lambda$  attaché à l'intervalle graduel quand aucune confusion n'est possible. Ainsi,  $M_{a(\lambda)}(\lambda)$  sera noté  $M_a(\lambda)$ . Il en sera de même pour  $R_a(\lambda)$  et  $RX_a(\lambda)$ .

La représentation *EP* et *MR* d'un intervalle graduel trapézoïdal  $a(\lambda)$  est illustrée par la figure 25.

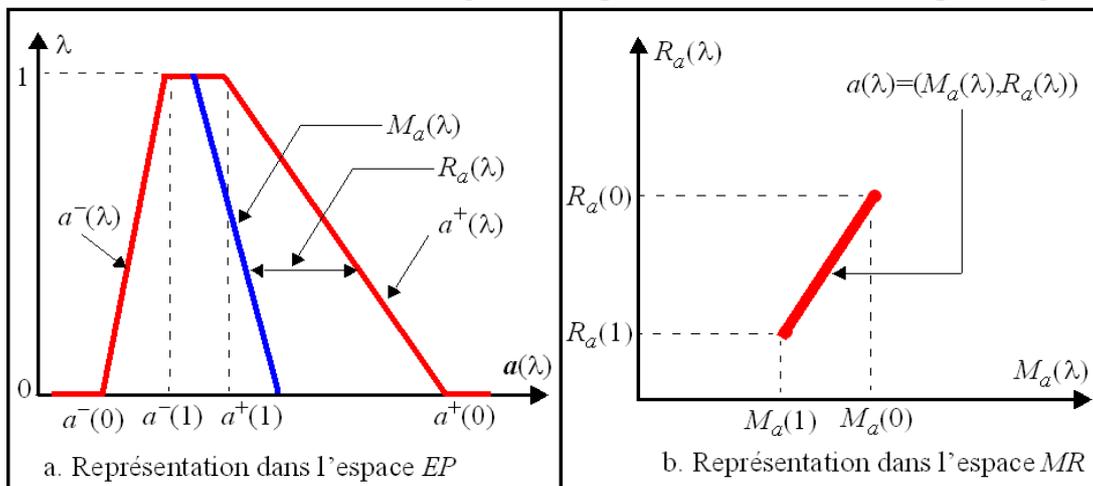


Figure 25 : Intervalle graduel dans les espaces *EP* et *MR*.

Dans ce contexte, en utilisant la représentation  $MR$ , un intervalle conventionnel devient un point avec les coordonnées  $(M_a(\lambda), R_a(\lambda))$ . En joignant (selon  $\lambda$ ) les intervalles de niveau 0 :  $(M_a(0), R_a(0))$  et de niveau 1 :  $(M_a(1), R_a(1))$ , nous obtenons la représentation  $MR$  d'un intervalle graduel (cf. figure 25.b).

Comme pour les intervalles conventionnels, il est nécessaire d'imposer un ordre sur les bornes des intervalles graduels, *i.e.*  $a^-(\lambda) \leq a^+(\lambda)$  ou  $R_a(\lambda) \geq 0; \forall \lambda \in [0,1]$ . On parlera alors d'Intervalles Graduels Propres et leur ensemble sera noté IGP. L'ensemble des intervalles graduels propres ne contenant pas 0 est noté IGP\*. Les Intervalles Graduels Impropres forment alors l'ensemble IGI (intervalles tels que  $\exists \lambda \in [0,1] : a^-(\lambda) > a^+(\lambda)$  ou  $R_a(\lambda) < 0$ ).

## 2.4 Intervalles graduels versus intervalles flous

### 2.4.1 Sous-ensembles flous de "type-1"

Une autre vision de l'imprécision concerne les informations dites "floues". Ces informations sont essentiellement dues à des caractéristiques vagues ou encore approximatives (limites mal définies) exprimées sous forme linguistique à travers un langage naturel. Par exemple, la proposition "la température  $\theta$  de la pièce est plaisante" est considérée comme vague car le ressenti de la température peut varier d'un individu à l'autre. De plus, la notion de "température plaisante" fait référence à un ensemble de valeurs mal défini [137].

Dans ce cadre, la théorie des sous-ensembles flous [208] (appelée théorie des ensembles flous par abus de langage) fournit un bon outil mathématique pour représenter explicitement des informations imprécises sous la forme de fonctions d'appartenance. Ces dernières permettent une progressivité de la notion d'appartenance d'un élément à un ensemble. Les ensembles flous sont construits par généralisation de la notion traditionnelle de la fonction caractéristique d'un ensemble (cf. figure 26). En effet, une information  $x$  est alors membre d'un ensemble flou  $F$  avec un certain degré d'appartenance dans l'intervalle  $[0, 1]$  (notion de degré de vérité). Il est important d'insister ici sur le fait qu'un degré de vérité ne représente en aucun cas un degré de certitude ou d'incertitude.

Sur un ensemble de référence  $X$ , un sous-ensemble flou  $F$  de ce référentiel est caractérisé par une fonction d'appartenance, notée  $\mu_F$ , de  $X$  dans l'intervalle des nombres réels  $[0,1]$  (degré d'appartenance). Cette fonction d'appartenance possède les propriétés suivantes :

- Le noyau (coupe au niveau 1) est un intervalle fermé  $[k^-, k^+]$ .
- Le support est un intervalle :  $\{x \mid \mu_F(x) > 0\}$ .
- $\mu_F(x)$  possède une partie non décroissante sur  $(-\infty, k^-]$ , notée  $\mu_{F^-}(x)$ .
- $\mu_F(x)$  possède une partie non croissante sur  $[k^+, +\infty)$ , notée  $\mu_{F^+}(x)$ .

En d'autres termes, les parties  $\mu_{F^-}(x)$  et  $\mu_{F^+}(x)$  sont des restrictions de  $\mu_F(x)$ , *i.e.* :

$$\mu_F(x) = \mu_{F^-}(x) \text{ pour } x \in (-\infty, k^-] ; \text{ et } \mu_F(x) = \mu_{F^+}(x) \text{ pour } x \in [k^+, +\infty)$$

A titre d'exemple, l'ensemble flou représenté dans la figure 26.a exprime la température "plaisante" de façon imprécise. La dénomination "plaisante" est un terme linguistique auquel est attribué une signification floue [210] représentée par  $F$ . Il est important de signaler ici qu'un intervalle conventionnel est un cas particulier d'ensemble flou avec une fonction d'appartenance rectangulaire (cf. figure 26.b). Il est clair que si la température est inférieure à  $18^\circ$  ou supérieure à  $24^\circ$  elle n'est absolument pas "plaisante" (degré d'appartenance = 0). Par contre, si la température est dans

l'intervalle [19, 21] elle est considérée comme vraiment "plaisante" avec un degré de vérité = 1. En dehors de ces deux zones, l'appartenance est progressive entre 0 et 1.

Comme détaillé dans le chapitre précédent, cette représentation par ensembles flous a été largement exploitée dans les problèmes du contrôle flou à base de règles (systèmes de Mamdani et systèmes TSK). Dans ce contexte, un mécanisme d'interpolation entre conclusions de règles est opéré sur la base des degrés de similarité entre une situation donnée (en fonction des mesures) et les situations "prototypiques" décrites dans les conditions des règles [51][52]. Les informations manipulées restent précises et l'analyse du fonctionnement du système flou révèle que les aspects imprécis et/ou incertains ne sont pas considérés.

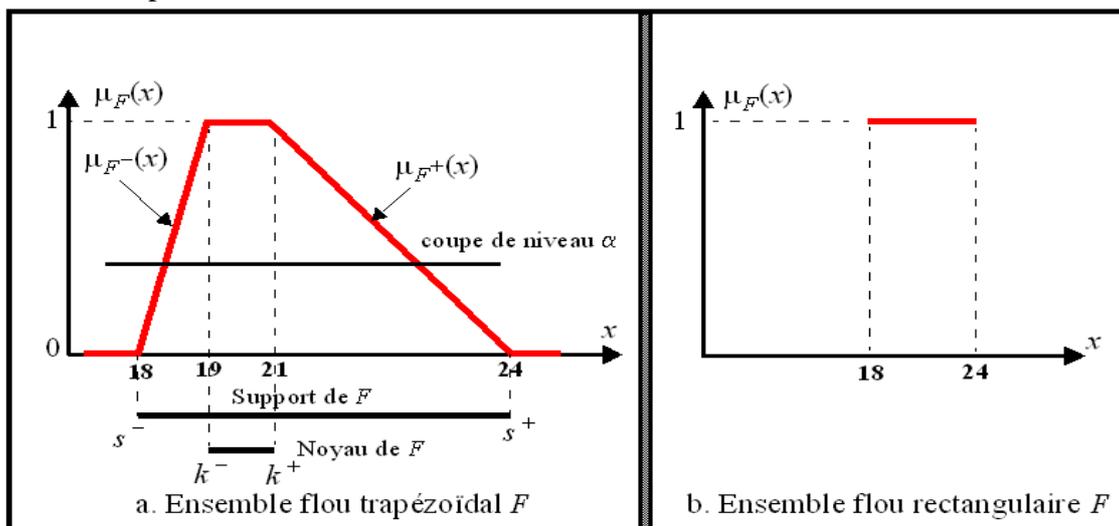


Figure 26 : Représentation de la température par sous-ensemble flou  $F$ .

## 2.4.2 Sous-ensembles flous de "type-2"

Afin de pouvoir intégrer les imprécisions et/ou les incertitudes dans les systèmes à base de règles, une approche à base de sous-ensembles flous de type-2 [106][122][140][141][142][144][212][215] a été souvent exploitée dans la littérature. D'une manière générale, un ensemble flou de type  $m$  est un ensemble flou dont les valeurs d'appartenance sont des ensembles flous de type  $m-1$  (pour  $m > 1$ ). Par exemple, un ensemble flou de type-2 est un ensemble dont les valeurs d'appartenance sont des ensembles flous de type-1.

Historiquement, le concept d'ensemble flou de type-2 a été initialement introduit par Zadeh [212] comme une extension de la notion d'ensemble flou conventionnel (connu également sous la dénomination ensemble flou de type-1). La réflexion initiale de Zadeh était motivée par des considérations relatives à la représentation des mots dans un langage naturel. Cette idée de base peut être résumée par la phrase suivante : "les mêmes mots signifient différentes choses pour différentes personnes". En d'autres termes, les imprécisions et les incertitudes sont inhérentes à la manipulation des mots dans un langage naturel. Quelques années plus tard, Zadeh avoua ses doutes sur la capacité des ensembles flous de type-1 à exhiber l'incertitude dans une représentation par des mots. En effet, l'utilisation des mots à travers le formalisme type-1, basé sur la manipulation des degrés d'appartenance précis, vide les mots de leur caractère incertain. Mendel [143] a exploité le principe dit de "falsification de Popper" pour exprimer un constat trivial : un ensemble flou de type-1 est certain et il ne peut pas représenter un mot par essence incertain. Sur la base du principe d'extension, les structures algébriques des type-2 ont alors été largement étudiées [149][150].

Durant les deux dernières décennies, la représentation par type-2 a connu un essor important grâce aux travaux de Mendel et ses collaborateurs [106][122][140][141][142][144]. En effet, les systèmes de type-2 ont été exploités dans de nombreuses applications de contrôle et de modélisation où des algorithmes pratiques pour l'implantation du principe d'extension [140][200] ont été proposés. Dans un contexte de contrôle flou, une attention particulière a été portée aux systèmes TSK à CC dans les travaux publiés dans la littérature. Les raisons évoquées dans le chapitre précédent concernant le choix de ce formalisme TSK [181] restent valables ici. Dans le formalisme de type-2 exploité dans le contrôle, les appartenances aux ensembles flous ne sont plus des valeurs réelles mais des intervalles (la valeur d'appartenance ne peut pas être définie de façon précise). Les conclusions peuvent être considérées comme des intervalles conventionnels ou des intervalles flous. Toutefois, dans la majorité des publications relatives au contrôle, les conclusions des règles sont données sous forme d'intervalles conventionnels.

Deux exemples de fonction d'appartenance unimodale de type-2 sont illustrés dans la figure 27. On peut constater que l'appartenance de  $x$  n'est plus un nombre réel mais un intervalle. Dans le cas gaussien (cf. figure 27.b), pour une valeur de  $x = x^* = 4$  son degré d'appartenance ou de vérité est donné par l'intervalle :

$$\mu_{\tilde{F}}(x^*) = [\mu_{\tilde{F}}^{\text{inf}}(x^*), \mu_{\tilde{F}}^{\text{sup}}(x^*)] = [0.07, 0.4]$$

D'une manière générale, la fonction d'appartenance de type-2 est représentée par deux fonctions d'appartenance de type-1. Ces deux dernières sont appelées respectivement fonction inférieure (inf) et fonction supérieure (sup). Dans ce contexte, un ensemble flou de type-2 est complètement défini par ses deux ensembles flous de type-1 sous la contrainte :  $\mu_{\tilde{F}}^{\text{inf}}(x) < \mu_{\tilde{F}}^{\text{sup}}(x)$ .

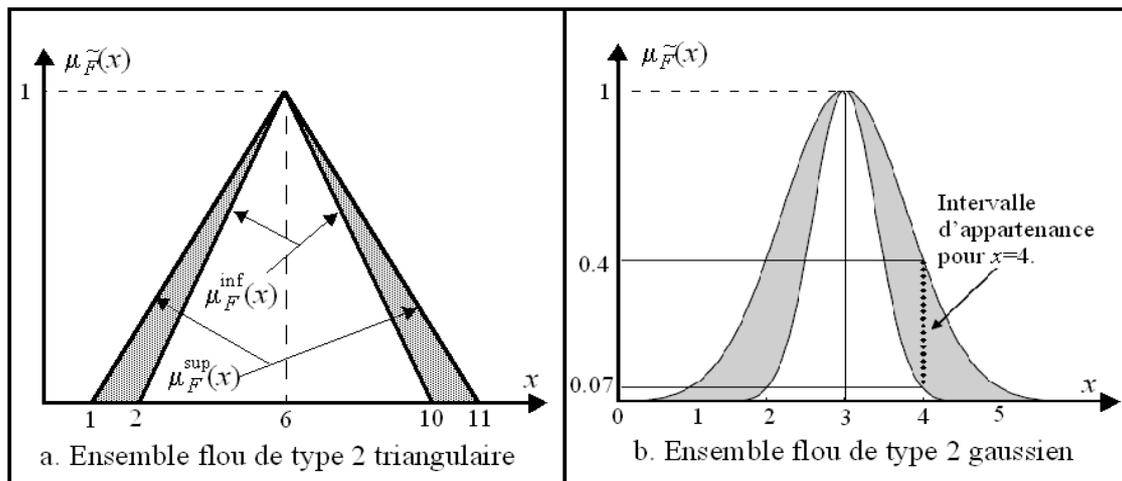


Figure 27 : Représentation d'un sous-ensemble de type-2.

D'une manière formelle, un système TSK à CC de type-2 à  $n$  variables d'entrées  $x_k \in X_k, k=1, \dots, n$  et une variable de sortie  $y$  s'exprime par une collection de règles sous la forme suivante :

$$\text{Si } x_1 \text{ est } \tilde{A}_1^{i_1} \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } \tilde{A}_n^{i_n} \text{ Alors } y = \varphi_{i_1, \dots, i_n} = [\varphi_{i_1, \dots, i_n}^-, \varphi_{i_1, \dots, i_n}^+] ; \text{ où :} \quad (18)$$

- $\tilde{A}_k^{i_k}, k= 1, \dots, n$  est un ensemble flou de type-2 associé à la variable  $x_k$ .
- $\varphi_{i_1, \dots, i_n}$  est la conclusion numérique de la règle (intervalle) indexée par  $(i_1, \dots, i_n)$ .
- $X_k$  est l'univers de discours associé à la variable  $x_k$ .

L'implantation d'un contrôleur flou de type-2 est régie par le schéma illustré dans la figure 28 où quatre étapes sont préconisées pour l'obtention de la sortie.

1. La fuzzification : elle consiste à associer aux entrées précises des degrés d'appartenance représentés par des intervalles. En effet, pour une entrée  $x_k = x_k^*$ , l'intervalle issu de la fuzzification s'exprime comme suit :

$$\mu_{\tilde{A}_k^{i_k}}(x_k = x_k^*) = [\mu_{A_k^{i_k}}^{\text{inf}}(x_k^*), \mu_{A_k^{i_k}}^{\text{sup}}(x_k^*)]$$

2. Le moteur d'inférence : il a pour objectif d'explicitier la relation entre les entrées  $x_1, \dots, x_n$  et la sortie  $y$ . Le mécanisme d'inférence dans un contexte type-2 reste similaire à son homologue de type-1 où l'opérateur produit est exploité pour implémenter le "et" et le "Alors". Sachant que les conclusions des règles sont des intervalles conventionnels, le résultat de l'inférence de la règle indexée par  $(i_1, \dots, i_n)$  est trivial. Ce dernier correspond à l'intervalle d'activation suivant :

$$A_{i_1, \dots, i_n} = [A_{i_1, \dots, i_n}^-, A_{i_1, \dots, i_n}^+] = [\prod_{k=1}^n \mu_{A_k^{i_k}}^{\text{inf}}(x_k^*), \prod_{k=1}^n \mu_{A_k^{i_k}}^{\text{sup}}(x_k^*)]$$

3. La réduction de type : cette phase consiste à combiner les intervalles d'activation des règles avec leurs conclusions. Dans ce cas, la méthode des centres des ensembles est souvent exploitée [140] pour extraire les bornes  $y^-$  et  $y^+$  de l'intervalle résultant. A notre sens, cette phase correspond tout simplement à l'évaluation de l'expression de la sortie d'un TSK à CC, donné par l'équation (2), en exploitant un algorithme numérique implémentant le principe d'extension.

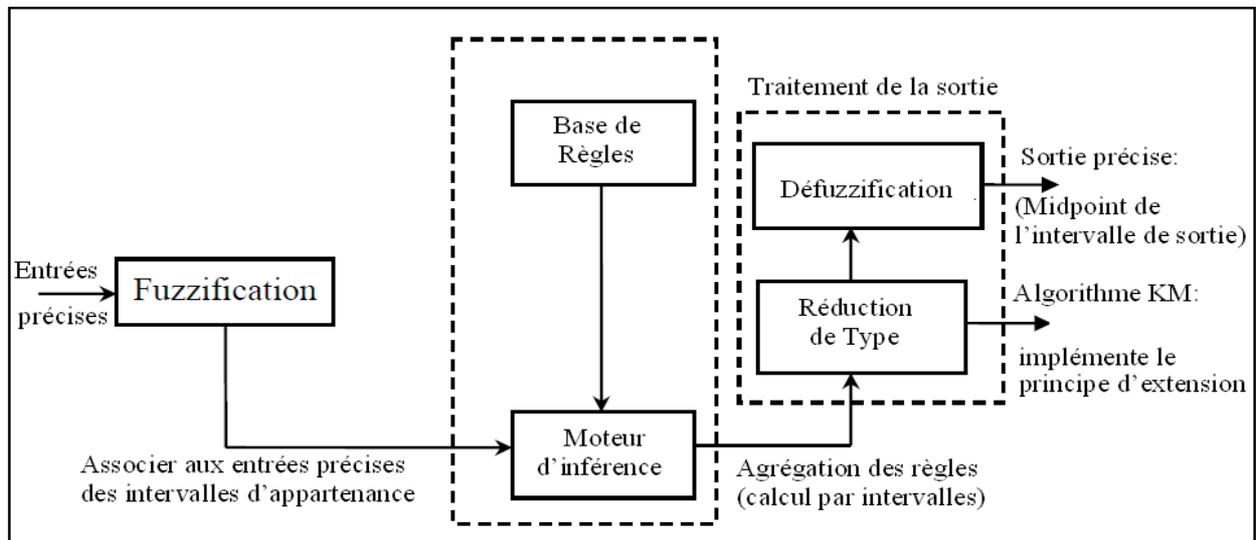


Figure 28 : Mécanisme d'implantation d'un contrôleur flou de type-2.

4. La défuzzification : une fois l'intervalle de sortie  $[y^-, y^+]$  obtenu, par application du centre de gravité, on obtient la sortie précise  $y_p$  du système :

$$y_p = (y^- + y^+) / 2$$

Autrement dit, cette opération consiste à prendre le Midpoint de l'intervalle de sortie comme sortie précise défuzzifiée.

Prenons maintenant un exemple illustratif pour exhiber le mécanisme calculatoire dans un système TSK à CC de type-2. La base de règles du système considéré est composée des 4 règles suivantes :

$$R^{(1,1)} : \text{Si } x_1 \text{ est } \tilde{A}_1^1 \text{ et } x_2 \text{ est } \tilde{A}_2^1 \text{ Alors } y = \varphi_{1,1} = [-1, -0.9]$$

$$R^{(1,2)} : \text{Si } x_1 \text{ est } \tilde{A}_1^1 \text{ et } x_2 \text{ est } \tilde{A}_2^2 \text{ Alors } y = \varphi_{1,2} = [-0.6, -0.4]$$

$$R^{(2,1)} : \text{Si } x_1 \text{ est } \tilde{A}_1^2 \text{ et } x_2 \text{ est } \tilde{A}_2^1 \text{ Alors } y = \varphi_{2,1} = [0.4, 0.6]$$

$R^{(2,2)}$  : Si  $x_1$  est  $\tilde{A}_1^2$  et  $x_2$  est  $\tilde{A}_2^2$  Alors  $y = \varphi_{2,2} = [0.9, 1.0]$

La répartition des symboles flous de type-2 sur leurs univers de discours est illustrée à la figure 29.

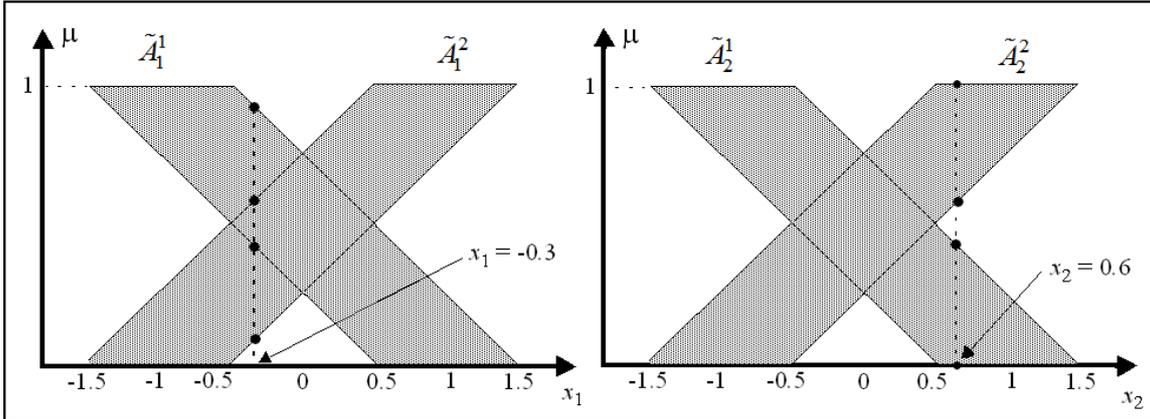


Figure 29 : Répartition des symboles flous de type-2 sur leurs univers de discours.

Evaluons la sortie de ce système pour les deux entrées précises  $x_1 = -0.3$  et  $x_2 = 0.6$ .

1. Le résultat de la fuzzification donne les intervalles suivants (cf. tableau 2) :

$[\mu_{A_1^-}^{\text{inf}}(x_1), \mu_{A_1^-}^{\text{sup}}(x_1)]$	$[\mu_{A_1^+}^{\text{inf}}(x_1), \mu_{A_1^+}^{\text{sup}}(x_1)]$	$[\mu_{A_2^-}^{\text{inf}}(x_2), \mu_{A_2^-}^{\text{sup}}(x_2)]$	$[\mu_{A_2^+}^{\text{inf}}(x_2), \mu_{A_2^+}^{\text{sup}}(x_2)]$
[0.4, 0.9]	[0.1, 0.6]	[0, 0.45]	[0.55, 1]

Tableau 2 : Résultats de la fuzzification pour  $x_1 = -0.3$  et  $x_2 = 0.6$ .

2. Les intervalles d'activation des règles, issus du mécanisme de l'inférence, sont résumés dans le tableau 3 suivant.

Règle	Intervalle des prémisses	Conclusion
$R^{(1,1)}$	$[A_{1,1}^-, A_{1,1}^+] = [\mu_{A_1^-}^{\text{inf}}(x_1) \cdot \mu_{A_2^-}^{\text{inf}}(x_2), \mu_{A_1^-}^{\text{sup}}(x_1) \cdot \mu_{A_2^-}^{\text{sup}}(x_2)] = [0, 0.405]$	$y = \varphi_{1,1} = [-1, -0.9]$
$R^{(1,2)}$	$[A_{1,2}^-, A_{1,2}^+] = [\mu_{A_1^-}^{\text{inf}}(x_1) \cdot \mu_{A_2^+}^{\text{inf}}(x_2), \mu_{A_1^-}^{\text{sup}}(x_1) \cdot \mu_{A_2^+}^{\text{sup}}(x_2)] = [0.22, 0.9]$	$y = \varphi_{1,2} = [-0.6, -0.4]$
$R^{(2,1)}$	$[A_{2,1}^-, A_{2,1}^+] = [\mu_{A_1^+}^{\text{inf}}(x_1) \cdot \mu_{A_2^-}^{\text{inf}}(x_2), \mu_{A_1^+}^{\text{sup}}(x_1) \cdot \mu_{A_2^-}^{\text{sup}}(x_2)] = [0, 0.27]$	$y = \varphi_{2,1} = [0.4, 0.6]$
$R^{(2,2)}$	$[A_{2,2}^-, A_{2,2}^+] = [\mu_{A_1^+}^{\text{inf}}(x_1) \cdot \mu_{A_2^+}^{\text{inf}}(x_2), \mu_{A_1^+}^{\text{sup}}(x_1) \cdot \mu_{A_2^+}^{\text{sup}}(x_2)] = [0.055, 0.6]$	$y = \varphi_{2,2} = [0.9, 1.0]$

Tableau 3 : Intervalles d'activation des règles pour  $x_1 = -0.3$  et  $x_2 = 0.6$ .

L'exploitation de l'algorithme *KM* [140], souvent utilisé dans la réduction du type, conduit au résultat suivant :

$$y^- = \frac{A_{1,1}^+ \cdot \varphi_{1,1}^- + A_{1,2}^- \cdot \varphi_{1,2}^- + A_{2,1}^- \cdot \varphi_{2,1}^- + A_{2,2}^- \cdot \varphi_{2,2}^-}{A_{1,1}^+ + A_{1,2}^- + A_{2,1}^- + A_{2,2}^-} = -0.716$$

$$y^+ = \frac{A_{1,1}^- \cdot \varphi_{1,1}^+ + A_{1,2}^+ \cdot \varphi_{1,2}^+ + A_{2,1}^+ \cdot \varphi_{2,1}^+ + A_{2,2}^+ \cdot \varphi_{2,2}^+}{A_{1,1}^- + A_{1,2}^+ + A_{2,1}^+ + A_{2,2}^+} = 0.624$$

Finalement, la sortie précise  $y_p$  est calculée par défuzzification :

$$y_p = M_y = (y^- + y^+) / 2 = -0.046.$$

Après avoir illustré le mécanisme calculatoire d'un système flou (contrôleur) de type-2, il nous paraît maintenant nécessaire de revenir sur quelques points importants concernant son fonctionnement.

- Bien que présentée dans la littérature comme une approche "originale", cette méthodologie d'implantation se contente d'étendre, *via* le principe d'extension, l'expression générique d'un système flou TSK à CC, donnée par l'équation (2), au cas imprécis où les poids des règles et les conclusions sont considérés comme imprécis et représentés par des intervalles conventionnels. Le mérite qu'on peut attribuer à cette approche réside dans sa capacité à proposer une implémentation algorithmique "efficace" de l'équation (2) au sens du principe d'extension. En d'autres termes, comme la sortie générée par un système flou TSK à CC précis n'est qu'une moyenne pondérée, l'implantation d'un type-2 est typiquement une extension de cette moyenne pondérée au cas imprécis où les informations manipulées sont représentées par des intervalles.
- Par opposition aux travaux existants, il est possible de proposer une vision différente où l'implantation d'un type-2 peut être réalisée à travers l'arithmétique par intervalles. Dans ce contexte, l'expression d'un TSK à CC peut être directement évaluée par des opérations sur les intervalles. En effet, la sortie du système peut s'exprimer par un calcul conventionnel sur les intervalles, donné par l'équation suivante :

$$y_{\text{intervalle}} = \sum_{(i_1, i_2) \in \{1,2\} \times \{1,2\}} A_{i_1, i_2}(x) \times \varphi_{i_1, i_2} / \sum_{(i_1, i_2) \in \{1,2\} \times \{1,2\}} A_{i_1, i_2}(x) = [-3.25, 2.45];$$

$$\text{et } y_p = M_{y_{\text{intervalle}}} = -0.402$$

Bien évidemment, le résultat obtenu souffrira des problèmes de surestimation liés au calcul par intervalles (en l'occurrence, l'absence de l'inverse pour l'opérateur produit). Toutefois, si nous disposons d'un opérateur de division "exact" et capable d'éviter cette surestimation, une implantation moins imprécise des type-2 peut être réalisée (cf. figure 30). Dans ce cadre, notre opérateur de division, proposé dans un cadre graduel [17][18], peut s'appliquer sur les intervalles et conduit au résultat suivant :

$$y_{\text{exacte}} = \sum_{(i_1, i_2) \in \{1,2\} \times \{1,2\}} A_{i_1, i_2}(x) \times \varphi_{i_1, i_2} / \sum_{(i_1, i_2) \in \{1,2\} \times \{1,2\}} A_{i_1, i_2}(x) = [-0.412, 0.31]$$

$$\text{et } y_p = M_{y_{\text{exacte}}} = -0.051$$

Ce point sera discuté en profondeur ultérieurement. D'une manière plus générale, les mécanismes calculatoires des systèmes TSK à CC développés dans le chapitre précédent restent valables. La différence principale réside dans le remplacement des entrées et des sorties par des intervalles, conduisant à des expressions sous forme des fonctions d'intervalles.

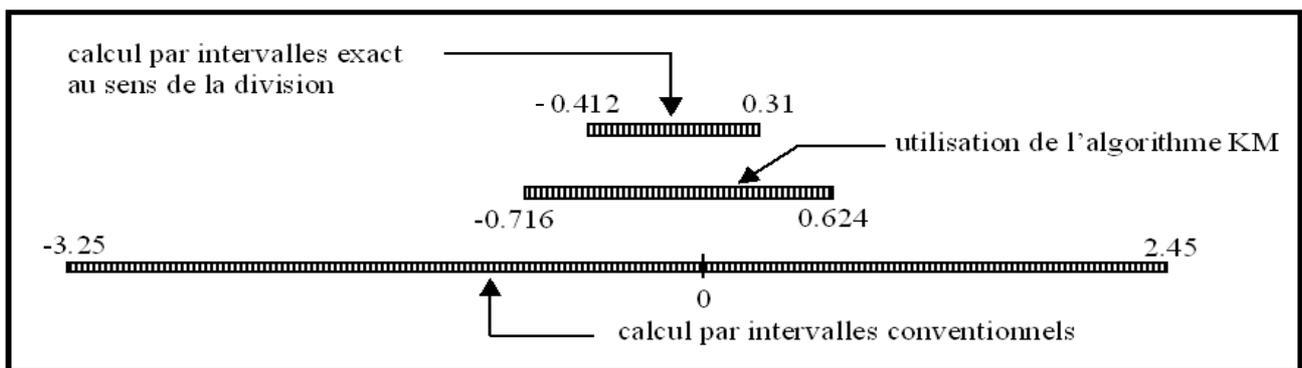


Figure 30 : Résultats de l'implantation d'un système TSK à CC imprécis.

- Dans un contexte de contrôle, la sémantique relative au type-2 demeure ambiguë. En effet, si cette représentation permet d'intégrer l'incertitude dans les réponses des experts et ainsi de considérer simultanément leurs différents avis, son exploitation dans une problématique de

contrôle flou reste dominée par une vision imprécise. En effet, pour une entrée précise, l'intervalle d'appartenance imprécis est absolument certain et le mécanisme calculatoire associé à ce formalisme n'exhibe aucun caractère incertain. A nos yeux, l'intérêt des systèmes flous de type-2 en contrôle incertain est marginal. En effet, malgré nos nombreuses expériences, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence des améliorations notables dans les performances des structures de commande à base de type-2. Au contraire, il existe une espèce de paradoxe qui consiste à détruire, par le mécanisme de défuzzification, les efforts effectués dans la représentation et le traitement des entrées et des sorties. Ces constatations nous ont conduits à nous interroger sérieusement sur l'intérêt de cette approche. Nous avons alors décidé de l'exclure des orientations à suivre pour nos travaux de recherche.

### 2.4.3 Intervalles graduels et intervalles flous

#### 2.4.3.1 Intervalles de "type-1"

Dans la littérature, un ensemble flou est parfois et abusivement appelé "nombre flou". D'une manière générale, la dénomination de nombre flou fait référence à un ensemble flou dont chaque  $\alpha$ -coupe  $F_\alpha = [F_\alpha^-, F_\alpha^+] = \{x \mid \mu_F(x) > \alpha\}$  est un intervalle conventionnel :

$$F_\alpha^- = \inf\{x \mid \mu_F(x) \geq \alpha\} \text{ et } : F_\alpha^+ = \sup\{x \mid \mu_F(x) \geq \alpha\} ; \text{ où } [s^-, s^+] \text{ est le support.}$$

Cependant et comme discuté dans [55][70], cette appellation de "nombre flou" est discutable et critiquable. En effet, un nombre flou ne généralise pas le concept d'un nombre réel, mais plutôt le concept d'un intervalle de réels. Dans ce cadre, il doit hériter des propriétés des intervalles et non pas des nombres réels. C'est pour cette raison, tout au long de ce document, que le terme intervalle flou est utilisé à la place de "nombre flou".

Un intervalle flou  $F$  est un sous-ensemble flou normalisé de réels de fonction d'appartenance  $\mu_F$ . Il est évident qu'un intervalle conventionnel peut être considéré comme un intervalle flou particulier dont la fonction d'appartenance prend la valeur 1 dans l'intervalle et 0 ailleurs (fonction d'appartenance rectangulaire). Un intervalle flou est un ensemble flou convexe (toutes ses  $\alpha$ -coupes sont des intervalles). La semi-continuité supérieure de  $\mu_F$  est équivalente au fait que les  $\alpha$ -coupes sont des intervalles fermés. Dans ce cadre, un intervalle flou peut être vu comme un empilement d'intervalles emboîtés définis *via* le concept des  $\alpha$ -coupes.

Le concept des nombres graduels fournit une nouvelle lecture des intervalles flous basée sur la fonction d'affectation utilisée pour représenter la gradualité des nombres. Dans ce contexte, un intervalle flou peut être vu comme un intervalle aux bornes graduelles. Il peut être représenté par une paire ordonnée de nombres graduels. En effet, l'intervalle flou  $F$  représenté par l'ensemble flou donné dans la figure 26 peut être vu comme l'intervalle graduel  $a(\lambda) = [a^-(\lambda), a^+(\lambda)]$ , illustré dans la figure 31. Les bornes graduelles  $a^-(\lambda)$  et  $a^+(\lambda)$  sont alors définies par les fonctions inverses  $(\mu_{F^-})^{-1}(\lambda)$  et  $(\mu_{F^+})^{-1}(\lambda)$  de  $(0, 1]$  dans  $\mathfrak{R}$  :

$$\begin{cases} a^-(\lambda) = \inf\{x \mid \mu_F(x) \geq \lambda\} = (\mu_{F^-})^{-1}(\lambda) \\ a^+(\lambda) = \sup\{x \mid \mu_F(x) \geq \lambda\} = (\mu_{F^+})^{-1}(\lambda) \end{cases}$$

En particulier,  $a^-(1) = k^-$  et  $a^+(1) = k^+$ .

A l'inverse, un intervalle graduel  $[a^-(\lambda), a^+(\lambda)]$  peut être interprété comme un intervalle flou si les bornes  $a^-(\lambda)$  et  $a^+(\lambda)$  sont injectives et respectivement non décroissante et non croissante. D'une

manière générale, si un intervalle flou est un intervalle graduel particulier, la réciproque est fautive dans la mesure où aucune contrainte de monotonie n'est associée aux nombres graduels. Le concept d'intervalles graduels est beaucoup plus général que celui d'intervalles flous. La figure 31 présente un intervalle flou trapézoïdal ainsi que sa représentation en intervalle graduel.

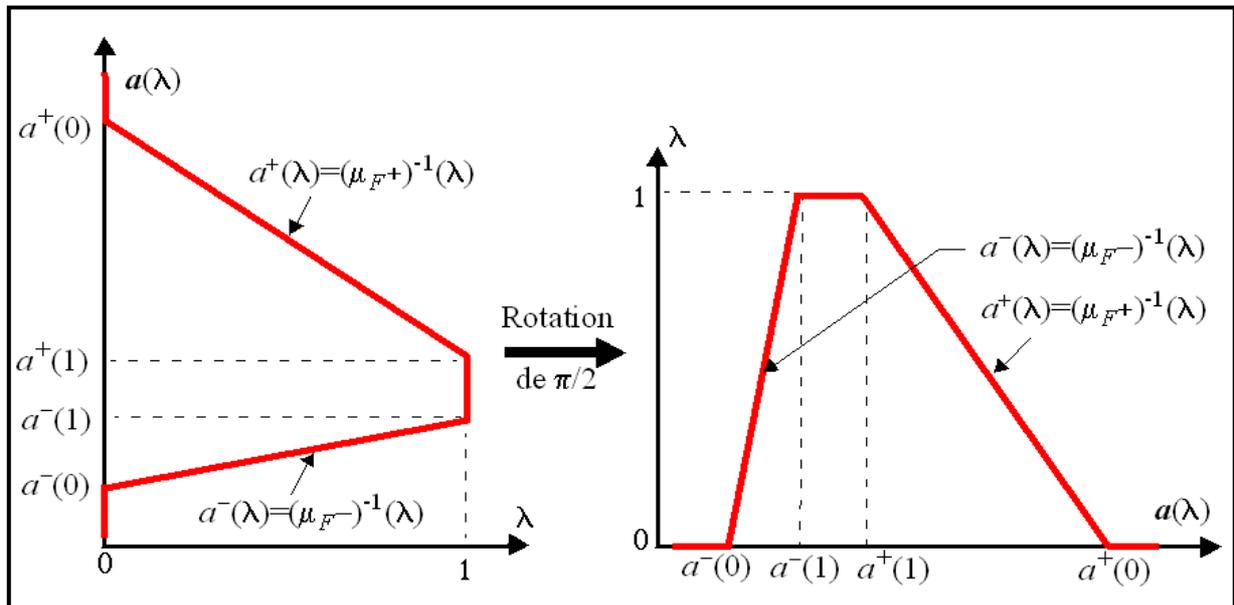


Figure 31 : Représentation d'un sous-ensemble flou par un intervalle graduel

De la même manière, la figure 32 présente deux intervalles graduels  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  non représentables par des intervalles flous.

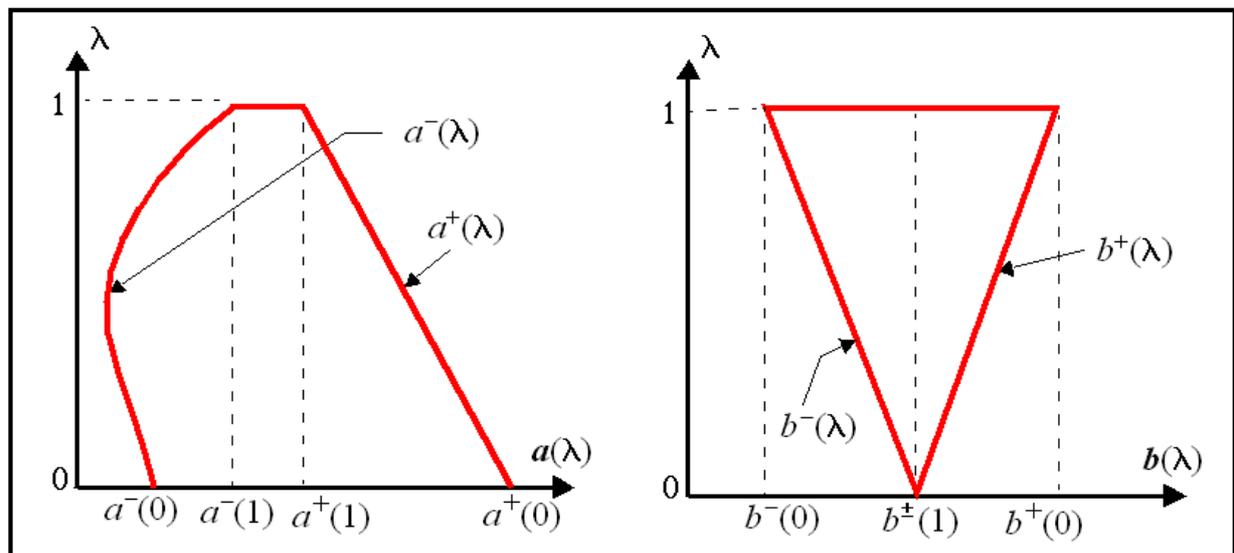


Figure 32 : Intervalles graduels non représentables par des intervalles flous.

Dans la suite de ce document et quand aucune confusion n'est possible, les intervalles graduels non représentables par des intervalles flous sont nommés "intervalles graduels purs". De la même manière, un intervalle graduel où les profils  $a^-(\lambda)$  et  $a^+(\lambda)$  sont respectivement non décroissant et non croissant est appelé intervalle graduel monotone (ou encore intervalle flou).

Dans un contexte d'équivalence entre intervalles flous et graduels, la figure 33 présente sur le même schéma un intervalle flou trapézoïdal ainsi que sa représentation en intervalle graduel. Les réels sont

représentés sur l'axe horizontal où l'on retrouve simultanément les valeurs de  $x$  et celles attachées à  $a(\lambda)$ . L'axe vertical est l'intervalle unitaire où l'on peut lire à la fois les degrés de pertinence  $\lambda$  et les degrés d'appartenance à  $F$ .

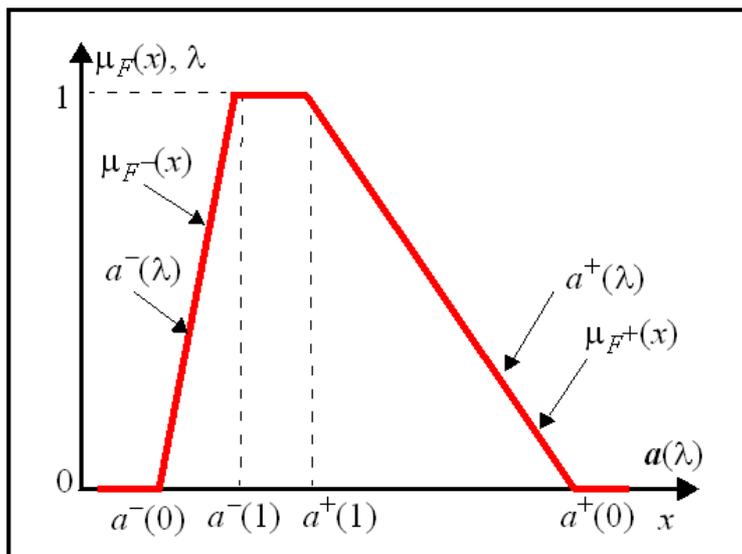


Figure 33 : Equivalence entre un sous-ensemble flou et un intervalle graduel.

A titre d'exemple, le principe d'équivalence entre intervalles flous et intervalles graduels est exhibé à travers une illustration donnée en annexe 2 (illustration 1).

### 2.4.3.2 Intervalles de "type-2"

Un intervalle graduel de type-2 noté  $\tilde{a}(\lambda)$  peut être défini par deux intervalles graduels respectivement inférieur  $a^{inf}(\lambda)$  et supérieur  $a^{sup}(\lambda)$  sous la contrainte d'inclusion  $a^{inf}(\lambda) \subseteq a^{sup}(\lambda)$ . Cette condition se traduit par :

$$a^{inf}(\lambda) \subseteq a^{sup}(\lambda) \Leftrightarrow |\Delta_M(\lambda)| \leq \Delta_R(\lambda); \text{ où : } \begin{cases} \Delta_M(\lambda) = M_{a^{sup}}(\lambda) - M_{a^{inf}}(\lambda) \\ \Delta_R(\lambda) = R_{a^{sup}}(\lambda) - R_{a^{inf}}(\lambda) \end{cases}$$

Sur un plan mathématique, nous définissons un intervalle graduel de type-2 comme suit :

$$\tilde{a}(\lambda) = \{a^{inf}(\lambda), a^{sup}(\lambda) \mid a^{inf}(\lambda) \subseteq a^{sup}(\lambda)\}$$

A l'instar des intervalles graduels de type-1 et dans un contexte d'équivalence, la figure 34 présente sur le même schéma un intervalle flou triangulaire de type-2 ainsi que sa représentation en intervalle graduel de type-2.

Si nous adoptons la vision préconisée dans la représentation graduelle de type-1, il est clair que pour un degré  $\lambda_i$  sur la dimension verticale, deux intervalles conventionnels imprécis  $a^{inf}(\lambda_i)$  et  $a^{sup}(\lambda_i)$  seront obtenus. Ces deux intervalles peuvent être considérés comme des imprécisions inférieure et supérieure pour un paramètre  $a$  précis. Dans ce cadre, nous avons été confrontés à un problème de sémantique concernant l'interprétation de cette imprécision. Quelle signification ou quel sens peut-on donner à cette double imprécision ? Quelle utilité peut-on associer à cette représentation dans un contexte de régression et/ou de contrôle ? A travers notre réflexion et comme pour les fonctions d'appartenance de type-2, nous n'avons trouvé aucun intérêt et aucune justification valable pour exploiter cette méthodologie et plus particulièrement dans notre problématique de contrôle. C'est pourquoi cette représentation graduelle de type-2 n'a pas été exploitée dans nos travaux de recherche.

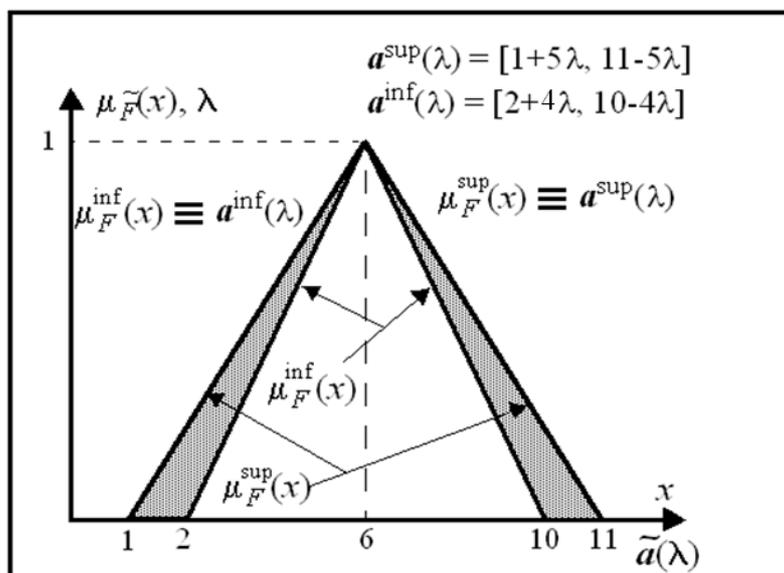


Figure 34 : Intervalle graduel et intervalle flou de type-2.

## 2.5 Intervalles graduels versus distributions de possibilité

La théorie des possibilités est une approche non probabiliste qui vise à faire le pont entre imprécision et incertitude. Les prémisses philosophiques des concepts possibilistes ont été énoncées par Aristote (autour des années -350 de notre ère) à travers des propositions du type : "si un événement est nécessaire, c'est que son contraire est impossible" [15]. Il faudra attendre les premiers travaux de Zadeh [213] pour voir se concrétiser ces concepts à travers la théorie des possibilités. Cette théorie a largement été étudiée, développée et enrichie par Dubois et Prade [48] à partir de la théorie des sous-ensembles flous.

Cette théorie est un outil mathématique qui repose sur des mesures non additives. Elle permet une représentation de l'imprécision et de l'incertitude par l'intermédiaire de distributions de possibilité et de deux mesures caractérisant les événements : la possibilité et la nécessité. La première mesure permet de décrire l'incertitude d'un événement par le degré de possibilité qu'une variable prenne une valeur sur l'ensemble des valeurs (que peut prendre la variable). Quant à la deuxième, elle exhibe le degré de possibilité de l'événement contraire qui s'interprète comme un degré de nécessité (dans le sens de la certitude). Les distributions de possibilité peuvent être vues comme des fonctions d'appartenance ou encore des intervalles flous.

D'une manière plus formelle, cette théorie consiste à représenter l'information dont on dispose sur une variable  $a$  par une distribution de possibilité. Soit  $a$  une variable définie sur un ensemble de référence  $X$ , la distribution de possibilité  $\pi_a$  est alors une fonction de  $X \rightarrow [0,1]$ . Etant donné un élément  $x$  de  $X$ ,  $\pi_a(x)$  donne le degré de possibilité pour que  $a = x$ . Si  $\pi_a(x) = 0$  alors  $a = x$  est impossible. Dans le cas inverse, si  $\pi_a(x) = 1$  alors  $a = x$  est totalement possible [54]. Dans la définition de  $\pi_a$ , la condition de normalisation  $\pi_a(x)=1$  est souvent imposée. En effet, nous supposons qu'au moins un élément de  $X$  est possible.

Une distribution fournit une mesure non additive de possibilité qui peut exprimer le degré de possibilité d'un intervalle  $a$ , notée  $\Pi$  et définie par  $\Pi(a) = \sup_{x \in a} \pi_a(x)$ . Ce degré de possibilité évalue la confiance que l'on peut avoir sur l'affirmation " $a \in a$ " avec  $a \subseteq X$ . Cette mesure de possibilité doit respecter les axiomes des possibilités à savoir :

$$\begin{cases} \forall a \subseteq X ; (\Pi(\emptyset) = 0) \leq \Pi(a) \leq (\Pi(X) = 1) \\ \forall a, b \subseteq X ; \Pi(a \cup b) = \max(\Pi(a), \Pi(b)) \end{cases}$$

Il est clair qu'une réalisation possible de  $a$  n'interdit pas que la réalisation contraire "non  $a$ " le soit également. Cette conception possibiliste peut conduire à une situation d'ignorance totale, à savoir  $\forall a \subseteq X ; \Pi(a) = 1$ . Pour remédier à cette situation, une mesure de nécessité  $N(a)$ , duale de  $\Pi(a)$ , a été introduite. Cette dernière mesure le degré avec lequel la réalisation de  $a$  est certaine. Dans ce cadre, l'information  $a$  est nécessaire si son contraire est impossible ( $\Pi(a^c) = 0$ ), d'où la relation entre les deux mesures :

$$N(a) = 1 - \Pi(a^c) = \inf_{x \notin a} (1 - \pi_a(x))$$

Il est bien connu qu'un intervalle conventionnel  $a$  est un cas particulier d'une distribution de possibilité. En effet,  $a \in a$  est certain si et seulement si  $a \notin a$  est impossible. Le principe de la spécificité minimale [201] conduit à une distribution de possibilité considérée comme la fonction caractéristique de l'intervalle  $a$ .

Supposons que nous disposons d'un paramètre  $a$  (imprécis et incertain). Ce dernier est représenté par une distribution de possibilité vue comme un intervalle graduel monotone  $a(\lambda)$  (les profils  $a^-(\lambda)$  et  $a^+(\lambda)$  sont respectivement non décroissant et non croissant). Calculons le degré de possibilité et de nécessité d'un intervalle  $b = [b^-, b^+]$  par rapport à l'information disponible, c'est-à-dire  $a(\lambda)$ . Autrement dit, l'objectif est de déterminer le degré de confiance que l'on peut attribuer à la proposition : "le paramètre  $a$  est dans  $b$ ". Les résultats sont illustrés dans la figure 35. Dans ce cas, la mesure de possibilité est donnée par :

$$\Pi(b) = \max(\pi_a(x) \mid x \in b) = \text{hauteur } (b \cap a(\lambda))$$

Nous pouvons constater que  $\Pi(b)$  est une mesure du degré de cohérence entre  $b$  et l'information disponible. En d'autres termes, nous mesurons à quel point  $b$  n'est pas incompatible avec  $a(\lambda)$ . De la même manière, la nécessité est donnée par :

$$N(b) = 1 - \Pi(b^c) = \min(1 - \pi_a(x) \mid x \notin b)$$

Cette mesure peut être interprétée comme le degré d'inclusion de  $a(\lambda)$  dans  $b$ . En d'autres termes, nous mesurons à quel point  $b$  se déduit de l'information  $a(\lambda)$ .

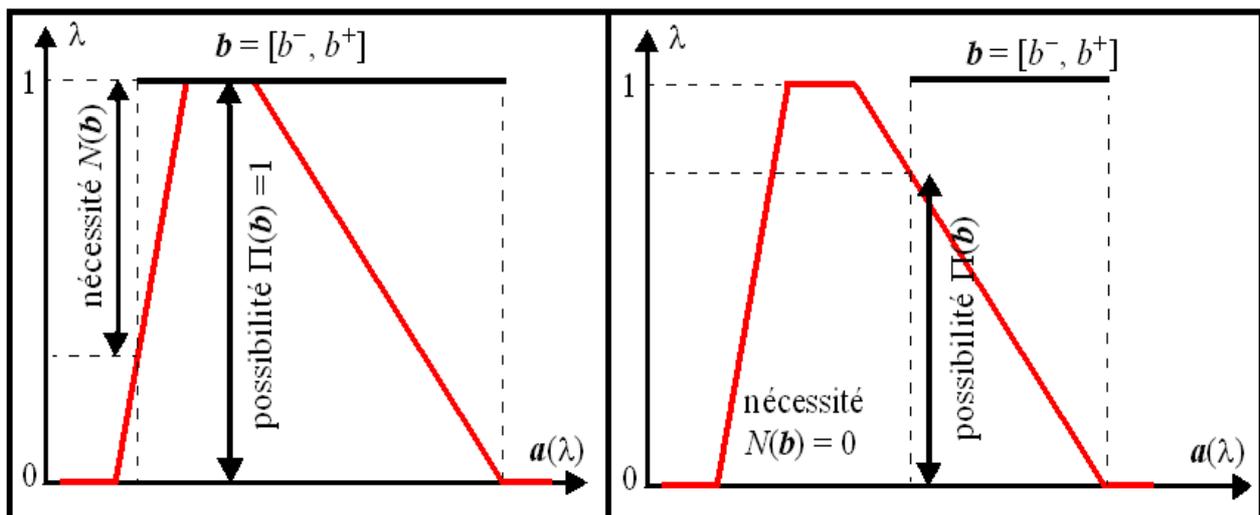


Figure 35 : Interprétation des degrés de possibilité et de nécessité.

A partir des mesures de nécessité  $N$  et de possibilité  $\Pi$ , il est possible de vérifier la validité des propriétés suivantes :

$$N(\mathbf{b}) + \Pi(\mathbf{b}^c) = 1, N(\mathbf{b}) + N(\mathbf{b}^c) \leq 1, \Pi(\mathbf{b}) + \Pi(\mathbf{b}^c) \geq 1 \text{ et } N(\mathbf{b}) \leq \Pi(\mathbf{b})$$

Le lecteur intéressé trouvera en annexe 2 (illustration 2) un exemple simple de calcul des degrés de possibilité et de nécessité.

D'une manière générale, un intervalle graduel monotone peut être vu comme un ensemble d'intervalles de confiance emboîtés  $\mathbf{a}(\lambda_i) = [a^-(\lambda_i), a^+(\lambda_i)]$  (cf. figure 36). Le degré de nécessité pour que l'intervalle  $\mathbf{a}(\lambda_i)$  contienne la valeur du paramètre  $a$  est  $N(\mathbf{a}(\lambda_i)) = 1 - \lambda_i$ .

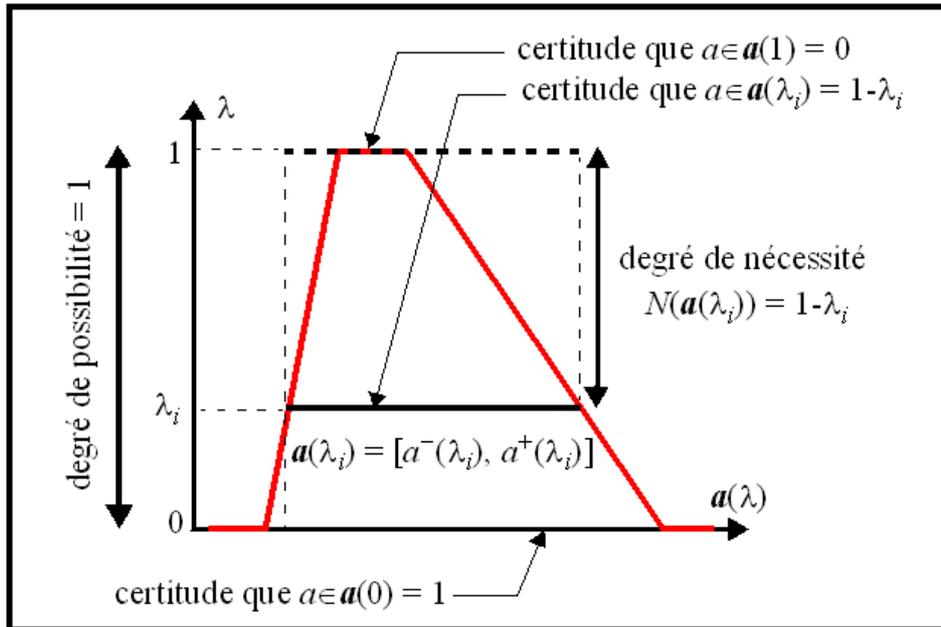


Figure 36 : Intervalles de confiance et distribution de possibilité.

De la même manière, un ensemble d'intervalles de confiance emboîtés  $\mathbf{a}(\lambda_i)$  auxquels sont associés des degrés de certitude  $\omega_i = (1 - \lambda_i)$  est équivalent à une distribution de possibilité [8]:

$$\pi_a(x) = \min_{i=1, \dots, n} (1 - \omega_i), x \in \mathbf{a}(\lambda_i)$$

Dans ce contexte, l'intervalle de confiance  $\mathbf{a}(\lambda_i)$  peut être interprété de la façon suivante: "Je suis certain avec un degré  $(1 - \lambda_i)$  que le paramètre  $a$  est dans l'intervalle  $\mathbf{a}(\lambda_i) = [a^-(\lambda_i), a^+(\lambda_i)]$ ". En effet,  $a \in \mathbf{a}(\lambda_i)$  est certain si et seulement si  $a \notin \mathbf{a}(\lambda_i)$  est impossible. En accord avec le principe de la spécificité minimale, pour un intervalle de confiance  $\mathbf{a}(\lambda_i)$  nous avons :

$$a \in \mathbf{a}(\lambda_i) \text{ est } (1 - \lambda_i) \text{ certain si et seulement si } a \notin \mathbf{a}(\lambda_i) \text{ est } \lambda_i \text{ impossible}$$

Dans ce cas, la distribution de possibilité illustrée dans la figure 37 et donnée par l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbf{a}(\lambda_i) \\ \lambda_i, & \text{si } x \notin \mathbf{a}(\lambda_i) \end{cases}$$

De la même manière, il est trivial de constater que le degré de possibilité  $\Pi(\mathbf{a}(\lambda_i)) = \Pi([a^-(\lambda_i), a^+(\lambda_i)]) = 1$  et le degré de nécessité  $N(\mathbf{a}(\lambda_i)) = N([a^-(\lambda_i), a^+(\lambda_i)]) = 1 - \lambda_i$ . De manière évidente nous avons  $N(\mathbf{a}(\lambda_i)) = 1 - \Pi(\mathbf{a}^c(\lambda_i))$ .

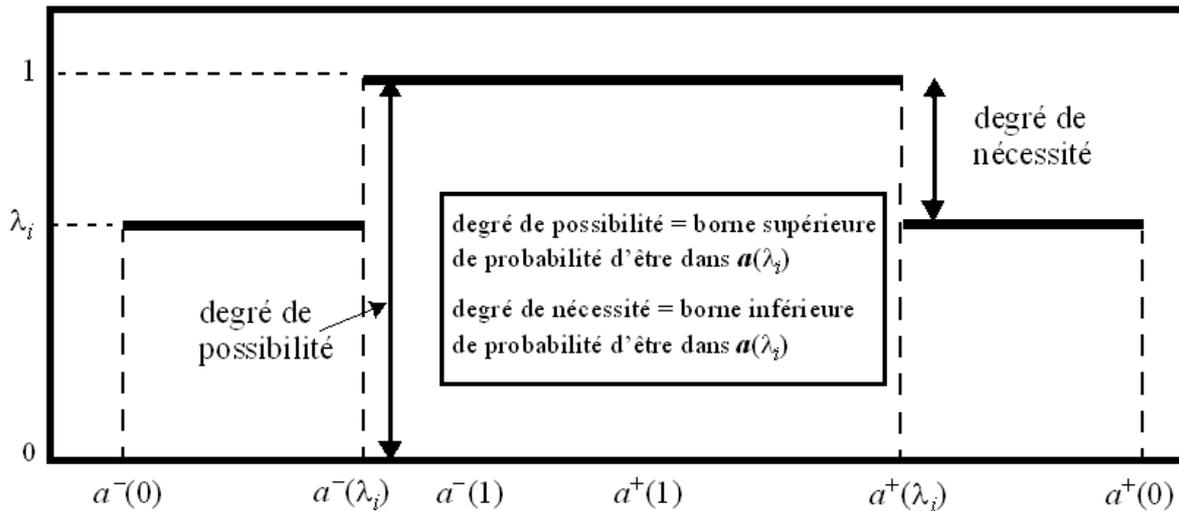


Figure 37 : Distribution de possibilité associée à "je suis  $(1-\lambda_i)$  certain que  $a \in \mathbf{a}(\lambda_i)$ ".

La probabilité pour que  $a \in \mathbf{a}(\lambda_i)$  est d'au moins  $1-\lambda_i$ . De la même manière, la probabilité que  $a \notin \mathbf{a}(\lambda_i)$  est d'au plus  $\lambda_i$  [8]. Dans ce cas, il est possible de construire une mesure de probabilité  $\Xi(\Pi)$  [8] comme suit :

$$\Xi(\pi) = \{ \text{Prob} \mid \text{Prob}(a \in \mathbf{a}(\lambda_i)) \geq 1-\lambda_i \text{ tel que : } \forall \text{ Prob} \in \Xi(\Pi), 1-\lambda_i \leq \text{Prob}(a \in \mathbf{a}(\lambda_i)) \leq 1 \}$$

Dans ce cadre, on peut constater que la probabilité la plus basse est égale à  $(1-\lambda_i)$  et elle fait référence au degré de nécessité. De la même manière, la probabilité la plus haute (égale à 1) nous renseigne sur le degré de possibilité [8].

## 2.6 Intervalles graduels versus fonctions de croyance

La quantification de l'incertitude des intervalles graduels à travers la théorie des possibilités exige que ces derniers soient représentables par des distributions de possibilité. Or, dans certaines situations pratiques des intervalles graduels purs peuvent se produire. Ces derniers sont généralement caractérisés par un non emboîtement des intervalles imprécis selon la dimension verticale. Dans ce contexte, afin de pouvoir évaluer l'incertitude de ces intervalles graduels, la théorie des fonctions de croyance peut représenter une bonne alternative.

La théorie des fonctions de croyance est issue des travaux de Dempster [38], repris par Shafer [170] sous le nom de "theory of evidence". Elle a été largement développée par Smets dans les années 90 [174][175][176]. Cette théorie a été inspirée de la théorie des probabilités inférieures et supérieures [38][170]. Dans ce cadre, Shafer a exhibé l'intérêt des fonctions de croyance pour la modélisation des informations incertaines. Un large panorama concernant la théorie de l'évidence est donné dans [193].

Le principe de cette théorie repose sur la modélisation de la croyance en un événement à l'aide de fonctions définies sur des sous-ensembles et non sur des singletons comme dans la théorie conventionnelle des probabilités. Par exemple, une connaissance imparfaite (imprécise et/ou incertaine) sur un élément  $\mathbf{a}$  de  $X$  (référentiel ou encore ensemble de discernement) est représentée par une masse de croyance définie comme une fonction, appelée fonction d'allocation de masse, de  $2^X \rightarrow [0, 1]$  vérifiant la propriété  $\sum_{\mathbf{a} \subseteq X} m(\mathbf{a}) = 1$ . Les éléments  $\mathbf{a}$  de  $X$  tels que  $m(\mathbf{a}) > 0$  sont appelés les éléments focaux. En d'autres termes, cette théorie assigne des masses de probabilités à des éléments focaux.

Dans la théorie des fonctions de croyance, il est possible d'allouer de la masse à des sous-ensembles de  $X$  et non uniquement à des singletons. Dans ce contexte, il est possible de représenter des informations imprécises et/ou incertaines. L'ignorance complète correspond à  $m(X)=1$  alors qu'une information précise correspond à l'attribution de la totalité de la masse à un singleton de  $X$ . Une information imprécise se traduira par l'allocation de la masse à un élément focal non singleton (un intervalle  $a$  par exemple). Une information incertaine correspondra à l'allocation des fractions de la masse à plusieurs singletons. Enfin une information imprécise et incertaine correspond à l'allocation des fractions de la masse unité à plusieurs éléments focaux non singletons (plusieurs intervalles par exemple).

D'une manière générale, les éléments focaux sont interprétés comme des intervalles adjacents dans le cas d'une densité de probabilité (les éléments focaux sont les intervalles obtenus par découpage vertical de la densité de probabilité) [8]. La masse de probabilité associée à un élément focal est alors égale à l'aire associée à l'intervalle. Dans le cadre d'une distribution de possibilité, les éléments focaux sont les intervalles obtenus par découpage horizontal de la distribution. En d'autres termes, les éléments focaux sont des intervalles emboîtés et les masses de probabilités sont en fonction de ce découpage (la précision dépendra de ce découpage) [8]. Dans un langage simple, on peut dire que la théorie des fonctions de croyance "probabilise" l'approche ensembliste (par intervalles) de l'imprécis et elle peut donc représenter l'imprécision et l'incertitude.

Dans ce contexte, la véracité d'une information est jugée à travers deux mesures non additives, à savoir la crédibilité ou la croyance ( $Bel$ ) et la plausibilité ( $PL$ ) de  $2^X \rightarrow [0, 1]$ . Dans ce cadre, pour un intervalle  $a$  de  $X$ , ces deux mesures s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} \forall a \subseteq X ; Bel(a) = \sum_{b \subseteq a} m(b) \\ \forall a \subseteq X ; PL(a) = \sum_{b \cap a \neq \emptyset} m(b) \end{cases}$$

La fonction de crédibilité (de croyance) représente la somme des masses de tous les éléments focaux qui impliquent forcément  $a$ . La plausibilité fait référence à la somme des masses de tous les éléments focaux qui ne contredisent pas nécessairement  $a$ . Une probabilité  $Prob(a)$  inconnue est toujours dans l'intervalle  $[Bel(a), PL(a)]$  [8]. La différence  $PL(a) - Bel(a)$  mesure l'ignorance relative à  $a$ . La relation entre une réalisation  $a$  et son contraire est donnée par :

$$Bel(a) = 1 - PL(a^c)$$

En d'autres termes, plus on augmente la croyance dans une hypothèse, moins l'hypothèse contraire devient plausible. Il est clair que cette représentation différencie le cas de l'ignorance du cas d'une répartition uniforme :

$$\begin{cases} \forall a \subset X ; Bel(X) = 1; Bel(a) = 0 \rightarrow \text{ignorance totale} \\ \forall a \subseteq X, PL(a) = \text{constante} \rightarrow \text{équirépartition} \end{cases}$$

Un autre intérêt de cette représentation réside dans la possibilité de pouvoir représenter une connaissance incomplète (notion du monde ouvert). En fait la masse  $m(\emptyset)$  est interprétée par "la vérité se trouve ailleurs que dans  $X$ ". Si  $m(\emptyset) = 0$ , alors nous sommes en présence d'un monde fermé.

Un intervalle graduel monotone (ou encore un intervalle flou) peut s'exprimer à l'aide des fonctions de croyance [8]. Comme illustré dans la figure 38 où une approximation inférieure est exploitée, les éléments focaux correspondent aux intervalles :

$$a(\lambda_i)_{i=1,\dots,n} \text{ avec } \lambda_n > 0, \lambda_{n+1} = 0, \lambda_1 = 1 \text{ et } a(\lambda_i) \subseteq a(\lambda_{i+1}).$$

La masse associée à chaque élément focal  $a(\lambda_i)$  est donnée par :  $m(a(\lambda_i)) = (\lambda_i - \lambda_{i+1})_{i=1,\dots,n}$ . Cette masse attribuée à l'intervalle est interprétée comme la probabilité pour que  $a$  appartienne à l'intervalle  $a(\lambda_i)$ .

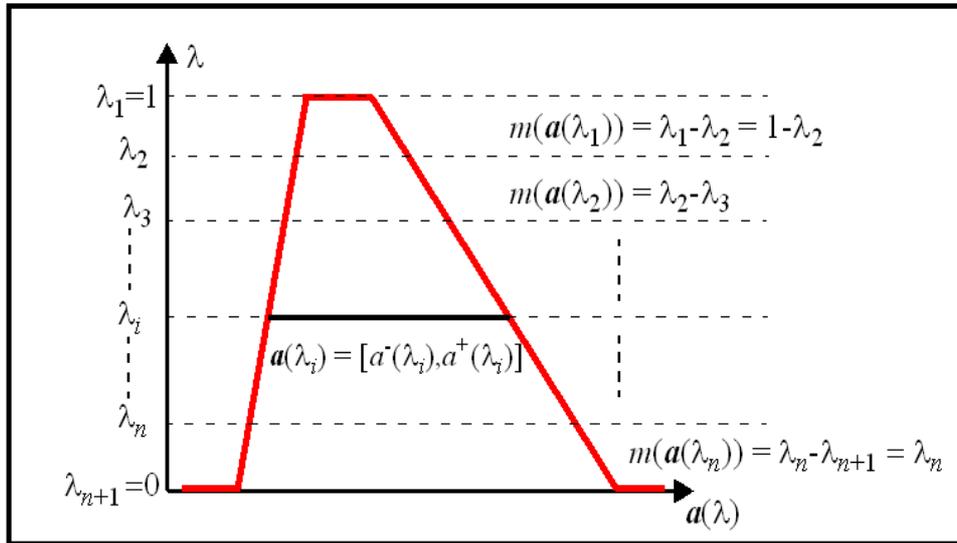


Figure 38 : Approximation inférieure d'une distribution de possibilité par des masses de croyance.

A partir de cette définition des masses, on peut constater que la somme des masses est égale à 1.

Calculons alors les mesures de croyance et de plausibilité :

$$Bel(a(\lambda_i)) = \sum_{b \subseteq a(\lambda_i)} m(b) = m(a(\lambda_1)) + \dots + m(a(\lambda_i)) = 1 - \lambda_i = N(a(\lambda_i))$$

La mesure de croyance évalue à quel point il est certain que l'information disponible représentée par la masse  $m(a(\lambda_i))$  implique que  $a \in a(\lambda_i)$ . Nous pouvons constater ici qu'une mesure de croyance est une mesure de nécessité.

$$PL(a(\lambda_i)) = \sum_{b \cap a(\lambda_i) \neq \emptyset} m(b) = m(a(\lambda_1)) + \dots + m(a(\lambda_{n+1})) = 1 = \Pi(a(\lambda_i))$$

La mesure de plausibilité évalue à quel point l'information disponible représentée par la masse  $m(a(\lambda_i))$  ne contredit pas la proposition  $a \in a(\lambda_i)$ .

Comme rappelé dans [8], une mesure de possibilité est une mesure de plausibilité et une mesure de nécessité est une mesure de croyance. Nous signalons ici que la théorie des fonctions de croyance peut s'appliquer en présence d'intervalles de confiance non emboîtés. Dans ce cas, les mesures de plausibilité et de croyance ne coïncident plus avec les mesures de possibilité et de nécessité.

## 2.7 Intervalles graduels purs : interprétation et approximation

D'une manière générale, dans une problématique de contrôle les imprécisions sur les informations manipulées (entrées, sorties et paramètres) sont souvent énoncées en termes d'intervalles conventionnels (la variable  $a \in a$ ). Leurs incertitudes sont liées à la confiance ou à la probabilité que l'on peut avoir sur des affirmations du type " $a \in a$ ".

Dans ce contexte, les distributions de possibilité sont parmi les outils les plus répandus pouvant représenter ces informations imprécises et incertaines. En effet, en présence d'un ensemble

d'intervalles de confiance, une distribution de possibilité peut être déterminée où des approximations supérieure ou inférieure sont exploitées pour déterminer la forme des profils [8][47][49].

Pour bien illustrer cette construction des distributions de possibilité, nous exploitons la méthodologie donnée dans [8]. Nous considérons alors les avis imprécis et incertains d'un expert automaticien concernant son estimation de la constante de temps d'un moteur électrique. L'expert nous donne les propositions suivantes avec leur degré d'incertitude:

- P1 : ma certitude pour que  $\tau$  soit dans l'intervalle [4, 17] est de 100%.
- P2 : ma certitude pour que  $\tau$  soit dans l'intervalle [5, 16] est de 80 %.
- P3 : ma certitude pour que  $\tau$  soit dans l'intervalle [6, 15] est de 60 %.
- P4 : ma certitude pour que  $\tau$  soit dans l'intervalle [7, 14] est de 40 %.
- P5 : ma certitude pour que  $\tau$  soit dans l'intervalle [8, 13] est de 20 %.

Par exemple et comme détaillé dans le paragraphe 2.5, la proposition P4 est traduite par la distribution de possibilité illustrée dans la figure 39.

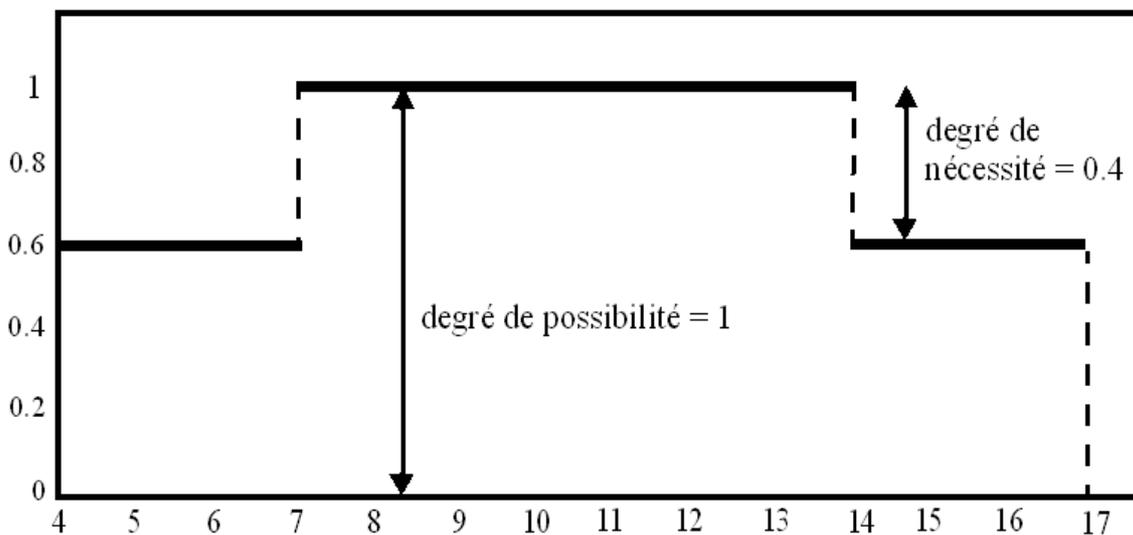


Figure 39 : Distribution de possibilité de "je suis sûr à 40% que  $\tau \in [7, 14]$ ".

La représentation de toutes les propositions de l'expert (par approximation supérieure [8][47][49]) conduit à une distribution de possibilité vue comme un intervalle graduel  $\alpha(\lambda)$ . Cette dernière est illustrée dans la figure 40 et elle est représentée par l'intervalle graduel  $\alpha(\lambda) = [4+5\lambda, 17-5\lambda]$ . Comme expliqué dans le paragraphe 2.6, cette construction peut être interprétée également en termes de masses et de fonctions de croyance à travers la théorie de l'évidence.

Cette méthodologie offre une plus grande souplesse lors de la modélisation. Cette maniabilité, justifiée par la facilité de construction, est considérée parfois comme un inconvénient car l'obtention de ces intervalles graduels (ou les distributions de possibilité) reste un problème laborieux, plus particulièrement dans un contexte de systèmes complexes, manipulant plusieurs entrées, sorties et paramètres. Pour remédier à ces problèmes, il est possible de faire appel à des techniques régressives capables, à partir des entrées et des sorties disponibles, d'estimer ces intervalles au sens d'un critère à optimiser. Ce dernier point sera détaillé dans le chapitre 3 de ce document.

D'une manière plus générale, la propagation des informations (intervalles flous et distributions de possibilité) à travers des modèles mathématiques peut conduire à des intervalles graduels purs (par exemple, au moins une borne est non monotone). Dans un contexte de calcul purement graduel

puisque aucune hypothèse de monotonie n'est faite sur les quantités graduelles manipulées, deux stratégies interprétatives peuvent être envisagées.

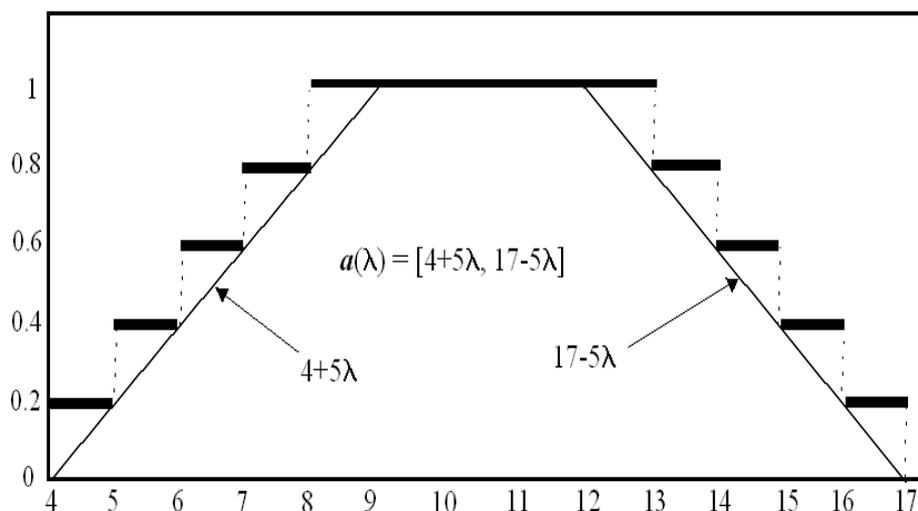


Figure 40 : Distribution de possibilité des avis de l'expert.

### 2.7.1 Approximation par des distributions de possibilité

Il est important de rappeler que seul un intervalle graduel monotone  $a(\lambda)$  peut représenter une distribution de possibilité. Dans ce cadre, il convient d'étudier dans quelle mesure l'intervalle graduel obtenu est interprétable en termes d'une distribution de possibilité. En effet, si le résultat obtenu *via* un modèle analytique est un intervalle graduel pur, une stratégie d'approximation pour déterminer l'intervalle flou le plus proche peut être envisagée. L'objectif de cette approximation est de pouvoir quantifier par la suite les incertitudes propagées à l'aide des mesures de possibilité et de nécessité. Toutefois, cette approximation peut induire un pessimisme au niveau de l'imprécision (augmentation de l'imprécision).

Considérons un intervalle graduel pur  $a(\lambda)$  et donc non représentable par une distribution de possibilité. Si une interprétation possibiliste est exigée, l'objectif est alors orienté vers la recherche d'un intervalle monotone  $b(\lambda)$ , qui est l'approximation la plus proche de  $a(\lambda)$  au sens d'une métrique  $D$  [17][86][87]. Dans ce cadre, nous avons proposé une méthode d'approximation basée sur la minimisation d'une distance  $L_2$  *via* une problématique de régression [17].

En effet, le domaine de  $\lambda$  a été discrétisé en  $n$  valeurs  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  pour collecter un ensemble de  $n$  données où la  $i^{\text{ème}}$  donnée est représentée par le couple  $(\lambda_i, a(\lambda_i))$ ,  $i = 1, \dots, n$ . L'identification de l'intervalle flou  $b(\lambda)$  est vue comme un problème d'optimisation avec des données de type intervalles conventionnels dans lequel les entrées sont les valeurs précises de  $\lambda_i$  et les sorties sont les intervalles  $a(\lambda_i)$ . Dans cette procédure d'optimisation, deux types de problèmes émergent à savoir la spécification de la structure de l'intervalle flou et l'estimation des paramètres. Connaissant la structure paramétrique de  $a(\lambda)$ , cette dernière est exploitée pour  $b(\lambda)$ . Bien évidemment, d'autres formes d'intervalles plus simples (triangulaires, trapézoïdales) peuvent être sélectionnées sous peine de pénaliser la performance de l'approximation. Dans ce contexte, le problème d'optimisation se réduit à un problème d'estimation paramétrique par minimisation de la distance  $L_2$  entre les deux intervalles. D'autres critères peuvent être considérés comme ceux proposés dans [85][86][87] dans le cadre d'une approximation floue trapézoïdale. Reste à définir les contraintes à introduire dans le problème d'optimisation pour garantir l'obtention d'un intervalle flou, c'est-à-dire d'un intervalle

graduel monotone. Dans ce cadre, trois types de contraintes peuvent être différenciées selon qu'elles soient associées, au concept d'intervalle graduel propre, à la notion de monotonie et à la ressemblance entre  $\mathbf{a}(\lambda)$  et  $\mathbf{b}(\lambda)$ .

- Contraintes d'intervalle propre :  $\mathbf{b}(\lambda)$  est un intervalle graduel propre si et seulement si pour tout  $\lambda_i$ ,  $[b^-(\lambda_i), b^+(\lambda_i)]$  est un intervalle propre, ce qui se traduit par la contrainte :

$$\text{pour } i = 1, \dots, n : R_b(\lambda_i) \geq 0$$

- Contraintes de monotonie : dans un contexte flou, les contraintes de monotonie sur  $b^-(\lambda)$  et  $b^+(\lambda)$  se traduisent par la contrainte d'inclusion suivante :

$$\text{pour } i = 1, \dots, n-1 : \forall \lambda_{i+1} \geq \lambda_i : \mathbf{b}(\lambda_{i+1}) \subseteq \mathbf{b}(\lambda_i) \Leftrightarrow \left| M_{b(\lambda_i)} - M_{b(\lambda_{i+1})} \right| \leq R_{b(\lambda_i)} - R_{b(\lambda_{i+1})}$$

- Contraintes de ressemblance entre  $\mathbf{a}(\lambda)$  et  $\mathbf{b}(\lambda)$  : ces contraintes sont facultatives. Elles permettent d'exprimer le souhait de propager à  $\mathbf{b}(\lambda)$  des propriétés de  $\mathbf{a}(\lambda)$ . Par exemple, si on souhaite que le niveau 1 de  $\mathbf{a}(\lambda)$  soit préservé dans l'approximation par  $\mathbf{b}(\lambda)$  alors la contrainte additionnelle suivante sera introduite dans la procédure d'optimisation :

$$M_a(1) = M_b(1) \text{ et } R_a(1) = R_b(1)$$

De la même manière, les approches de régression "dite possibiliste" de Tanaka [189][190] peuvent également être exploitées dans le contexte de l'approximation considérée. Dans ce cas, l'objectif est de déterminer un intervalle flou  $\mathbf{b}(\lambda)$  enveloppant au plus près l'intervalle graduel  $\mathbf{a}(\lambda)$  (contraintes d'inclusion). Ces approches de régression possibiliste seront détaillées dans le chapitre 3.

### 2.7.2 Interprétation par des fonctions de croyance

Dans la situation où l'intervalle graduel pur, résultant d'une opération de propagation est conservé et aucune approximation par distribution de possibilité n'est souhaitée, l'incertitude peut être quantifiée en termes de fonctions de croyance à travers la théorie de l'évidence. En effet, un intervalle graduel pur se caractérise par un empilement d'intervalles non nécessairement emboîtés. Dans ce cas, la théorie de l'évidence est armée pour prendre en compte de telles configurations.

Si un échantillonnage vertical peut être opéré sur l'intervalle graduel pour assigner des masses de probabilités aux intervalles non emboîtés, alors la probabilité pour qu'un paramètre  $a \in \mathbf{a}$  (son intervalle de vraisemblance) peut être encadrée par les mesures de plausibilité et de croyance, *i.e.* :

$$Bel(\mathbf{a}) \leq Prob(a \in \mathbf{a}) \leq PL(\mathbf{a})$$

Pour illustrer le mécanisme calculatoire en présence d'intervalles non emboîtés, prenons un exemple pédagogique. Nous disposons d'un appareil de mesure très sensible aux conditions d'utilisation et à son environnement. Cet appareil présente une erreur aléatoire (variabilité) et une erreur d'imprécision. On effectue une série de mesures imprécises sur un paramètre. On obtient 5 intervalles supposés contenir la vraie valeur du paramètre avec les probabilités correspondantes. Chaque probabilité est vue comme la fréquence d'apparition de la mesure dans cet intervalle lors de l'expérience de mesure [8]. Les mesures obtenues sont illustrées dans la figure 41.

Nous construisons un espace de discernement  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$ . Nous disposons maintenant d'une information  $\mathbf{a} = [2, 8]$  et nous cherchons à évaluer la probabilité pour qu'une mesure précise  $a$  soit à l'intérieur de cet intervalle  $\mathbf{a}$ . Calculons les degrés de croyance et de plausibilité. Les résultats suivants sont obtenus :

$$Bel(a) = Bel([2, 8]) = \sum_{a_i \subseteq a} m(a_i) = m(a_2) + m(a_3) = 0.35$$

$$PL(a) = PL([2, 8]) = \sum_{a_i \cap a \neq \emptyset} m(a_i) = m(a_1) + m(a_2) + m(a_3) + m(a_4) = 0.9$$

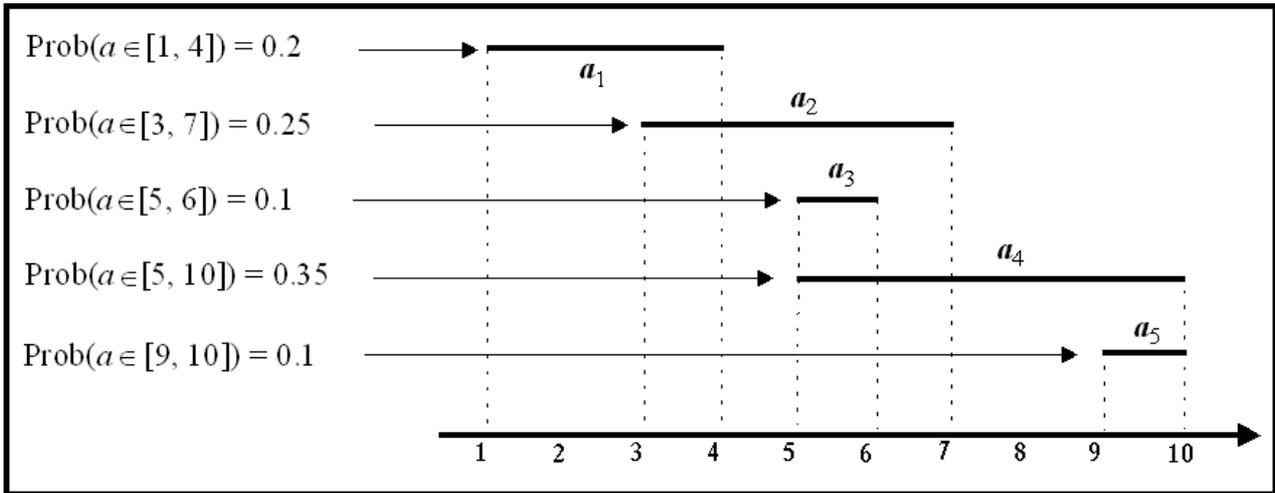


Figure 41: Intervalles de mesures et probabilités associées.

Il est possible maintenant d'estimer l'incertitude relative à la proposition " $a \in a = [2, 8]$ " par la quantité  $\text{Prob}(a \in a = [2, 8])$ . Sachant qu'une mesure de probabilité est encadrée par les mesures de croyance et de plausibilité, il est possible d'écrire :

$$Bel(a) \leq \text{Prob}(a \in a) \leq PL(a) \Rightarrow 0.35 \leq \text{Prob}(a \in a) \leq 0.9$$

## 2.8 Outils de propagation

Une fois l'imprécision et l'incertitude représentées, nous avons proposé un mécanisme capable de propager et de combiner ces informations à travers un modèle analytique, notamment dans des problématiques de contrôle et de prise de décision. Les informations manipulées, bien qu'associées à des sémantiques et des utilisations différentes (intervalles, intervalles flous, distributions de possibilité, etc.), sont combinées et propagées à travers les mêmes outils mathématiques, basés sur un calcul graduel. Cette méthodologie s'inscrit dans la même philosophie que celle développée dans la littérature où la propagation des distributions de possibilité est réalisée à travers l'arithmétique floue [48][79][107][110].

Dans la littérature, l'arithmétique floue et l'extension de l'arithmétique par intervalles au cas flou ne sont pas des problèmes nouveaux [39][45][53][66][111][121]. Il est bien connu que le principe d'extension de Zadeh [212] conduit à un problème d'optimisation non trivial (nécessitant un temps de calcul important), pour lequel de nombreuses approches algorithmiques ont été proposées [44][157]. Considérer les intervalles flous comme une collection de  $\alpha$ -coupes reste une approche conventionnelle [16][77][78][89][107], largement traitée dans la littérature. Ces méthodes, bien qu'elles fournissent une technicité maniable pour calculer des expressions floues, souffrent des mêmes lacunes que le calcul par intervalles, à savoir l'effet enveloppant, l'absence d'éléments inverses pour l'addition et la multiplication et les problèmes de dépendance et de surestimation. Cette constatation est en accord avec la remarque de Piegat dans [161] "*the standard fuzzy arithmetic does not take into account all the information available, and the obtained results are more imprecise than necessary or in some cases, even incorrect*". De plus, et comme discuté par Klir dans [111], les

opérations arithmétiques floues prennent en considération seulement l'information contenue dans les opérandes et ignorent complètement les informations supplémentaires qui peuvent émaner de la signification de ces opérandes.

Afin de remédier à ces problèmes, une arithmétique floue sous contraintes a été proposée [111][161]. L'idée exploitée dans ces travaux consiste à aborder l'arithmétique avec des contraintes dictées par le contexte du problème. En pratique, les contraintes sont réalisées en supposant que les  $\alpha$ -coupes de deux variables sont identiques. L'approche est ainsi efficace pour éviter la surestimation due à l'occurrence des variables interactives. Cependant, les résultats obtenus peuvent encore être pessimistes en termes de précision. Une autre vision de l'arithmétique contrainte a été proposée dans [31][127] pour obtenir les opérations inverses. Dans ce contexte, un intervalle est transformé en une fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  et calculée à chaque  $\alpha$ -coupe. Cette méthodologie a conduit à la proposition des opérateurs C-différence et C-division [31]. Comme mentionné dans [127], les résultats de cette technique sont équivalents à ceux obtenus par l'arithmétique sur les profils [69][70]. Dans le même contexte, Stefanini [178][179] a proposé des opérateurs inverses nommés gH-différence et g-division sur la base de la généralisation de la différence de Hukuhara [95].

A travers nos travaux, nous avons proposé une autre relecture de l'arithmétique floue par le biais de la représentation graduelle et l'arithmétique de Kaucher [108]. Dans cette dernière, bien que surprenante et critiquable, une relation d'ordre entre les bornes des intervalles n'est pas requise dans leur représentation. Depuis les travaux de Kaucher [108], cette arithmétique a été étudiée sur un plan théorique et exploitée dans de nombreux contextes applicatifs (cf. les travaux publiés dans [42][80][134][162][167]). Les travaux présentés ici sur l'arithmétique étendue s'inscrivent dans la lignée des travaux publiés dans la littérature relative à ce domaine où l'objectif est d'essayer de résoudre les problèmes de dépendance entre variables et les inconvénients de la surestimation des résultats.

La méthodologie proposée repose sur la construction d'un ensemble étendu d'intervalles graduels qui, muni des lois d'addition et de multiplication, possède une structure algébrique de groupe. Cette construction algébrique nécessite d'adjoindre à l'ensemble des intervalles propres, l'ensemble des intervalles impropres pour constituer l'ensemble des intervalles étendus. Cette méthodologie de conception permet la définition des opérations "exactes" pour la soustraction et la division. Les résultats produits sont des intervalles généralisés, objets mathématiques non toujours physiquement interprétables (l'ordre entre les bornes de l'intervalle est parfois non respecté).

Il est important de rappeler ici que le mécanisme de propagation est réalisé à travers un calcul d'intervalles selon une vision ontique. Toutefois, dans des applications pratiques de contrôle et/ou de prise de décision, une interprétation selon une sémantique épistémique peut être réalisée afin d'extraire un résultat précis de l'information propagée.

Dans ce document et pour des raisons de lisibilité, nous avons opté pour une séparation entre les opérations arithmétiques et les opérateurs "ensemblistes". En réalité, ces deux types d'opérations coexistent et utilisent souvent les mêmes outils de représentation et de propagation.

### **2.8.1 Opérations arithmétiques élémentaires**

Dans toute la suite, la formalisation des opérateurs arithmétiques est proposée dans l'espace *MR*. Toutefois, pour des raisons de facilité d'interprétation et comme souvent exploité dans la littérature, les résultats obtenus sont translatés et tracés dans l'espace *EP*. Nous nous intéressons ici aux

opérations arithmétiques élémentaires. Cependant, la méthodologie proposée peut s'appliquer sur d'autres types d'opérateurs.

### 2.8.1.1 Opérations dans IGP

L'extension de l'arithmétique par intervalles dans l'espace  $MR$  [136] au cas graduel est donnée dans les tableaux 4 et 5 [17][18]. Pour un niveau  $\lambda$  choisi, le calcul graduel est typiquement un calcul par intervalles conventionnels.

Opération	Définition de l'opération
Addition	$\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGP}, \forall \mathbf{b}(\lambda) \in \text{IGP}: \mathbf{a}(\lambda) + \mathbf{b}(\lambda) = (M_a(\lambda) + M_b(\lambda), R_a(\lambda) + R_b(\lambda))$
Négation	$\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGP}, \text{neg}(\mathbf{a}(\lambda)) = -\mathbf{a}(\lambda) = (-M_a(\lambda), R_a(\lambda))$
Soustraction	$\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGP}, \forall \mathbf{b}(\lambda) \in \text{IGP}: \mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{a}(\lambda) + \text{neg}(\mathbf{b}(\lambda))$ $= (M_a(\lambda) - M_b(\lambda), R_a(\lambda) + R_b(\lambda))$
Multiplication par un scalaire	$\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGP}, \forall \omega \in \mathbb{R}, \omega \times \mathbf{a}(\lambda) = \omega \times (M_a(\lambda), R_a(\lambda))$ $= (\omega \times M_a(\lambda),  \omega  \times R_a(\lambda))$
Multiplication	$\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGP}, \forall \mathbf{b}(\lambda) \in \text{IGP}: \mathbf{a}(\lambda) \times \mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{c}(\lambda) = (M_c(\lambda), R_c(\lambda))$ L'expression analytique de $\mathbf{c}(\lambda)$ dépend des valeurs d'étendues relatives de $\mathbf{a}(\lambda)$ et $\mathbf{b}(\lambda)$ .
Réciproque	$\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGP}^*, \text{rec}(\mathbf{a}(\lambda)) = 1/\mathbf{a}(\lambda) = \delta_a(\lambda) \times \mathbf{a}(\lambda);$ avec: $\delta_a(\lambda) = (M_a^2(\lambda) - R_a^2(\lambda))^{-1}$
Division	$\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGP}, \forall \mathbf{b}(\lambda) \in \text{IGP}^*, \mathbf{a}(\lambda)/\mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{a}(\lambda) \times \text{rec}(\mathbf{b}(\lambda))$ $= \delta_b(\lambda) \times \mathbf{a}(\lambda) \times \mathbf{b}(\lambda)$

Tableau 4 : Opérations arithmétiques graduelles dans IGP (espace  $MR$ ).

L'expression de  $\mathbf{c}(\lambda)$ , résultat de l'opération de multiplication de  $\mathbf{a}(\lambda)$  par  $\mathbf{b}(\lambda)$  est donnée dans le tableau 5.

Cas	Expression de $\mathbf{c}(\lambda)$
Si $ RX_a(\lambda)  \leq 1$ et $ RX_b(\lambda)  \leq 1$	$M_c(\lambda) = (M_a(\lambda) \times M_b(\lambda) + s(\lambda) \times R_a(\lambda) \times R_b(\lambda))$ $R_c(\lambda) =  M_a(\lambda)  \times R_b(\lambda) +  M_b(\lambda)  \times R_a(\lambda)$ avec: $s(\lambda) = \text{sign}(M_a(\lambda) \times M_b(\lambda))$
Si $ RX_a(\lambda)  > 1 \geq  RX_b(\lambda) $ ou $ RX_a(\lambda)  \geq  RX_b(\lambda)  > 1$	$M_c(\lambda) = \theta_b(\lambda) \times M_a(\lambda)$ $R_c(\lambda) =  \theta_b(\lambda)  \times R_a(\lambda)$ avec: $\theta_b(\lambda) = \text{sign}(M_b(\lambda)) \times ( M_b(\lambda)  + R_b(\lambda))$
Si $ RX_b(\lambda)  > 1 \geq  RX_a(\lambda) $ ou $ RX_b(\lambda)  \geq  RX_a(\lambda)  > 1$	$M_c(\lambda) = \theta_a(\lambda) \times M_b(\lambda)$ $R_c(\lambda) =  \theta_a(\lambda)  \times R_b(\lambda)$ avec: $\theta_a(\lambda) = \text{sign}(M_a(\lambda)) \times ( M_a(\lambda)  + R_a(\lambda))$

Tableau 5 : Expression du produit en fonction de l'étendue relative des intervalles.

L'utilisation des opérations dans IGP conduit fréquemment à des résultats contrintuitifs. Ce problème est lié à l'absence d'éléments inverses pour l'addition et la multiplication. Par exemple, nous constatons aisément que :

$$\mathbf{b}(\lambda) + (\mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{b}(\lambda)) \neq \mathbf{a}(\lambda) \text{ et } \mathbf{b}(\lambda) \times (\mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{b}(\lambda)) \neq \mathbf{a}(\lambda)$$

$$\text{et : } \mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{a}(\lambda) \neq \mathbf{0}(\lambda) \text{ et } \mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{a}(\lambda) \neq \mathbf{1}(\lambda)$$

où  $\mathbf{0}(\lambda)$  et  $\mathbf{1}(\lambda)$  représentent respectivement les intervalles graduels réduits aux réels 0 et 1, c'est-à-dire en coordonnées *MR* et *EP* :

$$\mathbf{0}(\lambda) = [0, 0] = (0, 0) \text{ et } \mathbf{1}(\lambda) = [1, 1] = (1, 0)$$

Pour remédier à ces constatations, il est nécessaire de sortir du cadre conventionnel de l'arithmétique des intervalles. Aussi avons-nous proposé de "nouveaux" opérateurs de soustraction et de division. Ces derniers sont les opérateurs inverses "exactes" de l'addition et de la multiplication dans un espace étendu d'intervalles graduels (IGE). L'idée sous-jacente derrière l'exactitude des opérations est en concordance avec la philosophie exploitée dans la construction des opérateurs gH-différence et g-division [178][179]. En d'autres termes, la soustraction et la division sont exactes dans le sens où :

$$\mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{x}(\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a}(\lambda) = \mathbf{b}(\lambda) + \mathbf{x}(\lambda) \\ \mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{a}(\lambda) + (-\mathbf{x}(\lambda)) \end{cases}; \text{ et}$$

$$\mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{x}(\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a}(\lambda) = \mathbf{b}(\lambda) \times \mathbf{x}(\lambda) \\ \mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{x}(\lambda) \end{cases}; \text{ avec } 0 \notin \mathbf{b}(\lambda)$$

### 2.8.1.2 Opérations dans IGE

D'une manière générale, il est bien connu que les structures algébriques  $(\mathbb{IP}, +)$  et  $(\mathbb{IP}^*, \times)$  ne sont que des semi-groupes [134][147]. Ainsi, de la même manière que le semi-groupe  $(\mathfrak{R}^+, +)$  est étendu au groupe  $(\mathfrak{R}, +)$ , les semi-groupes  $(\mathbb{IP}, +)$  et  $(\mathbb{IP}^*, \times)$  peuvent être étendus en groupes sur l'ensemble des intervalles étendus  $\mathbb{IE} = \mathbb{IP} \cup \mathbb{II}$  (intervalles propres et impropres). Les structures algébriques  $(\mathbb{IP}, +)$  et  $(\mathbb{IP}^*, \times)$  sont plongées dans  $(\mathbb{IE}, +)$  et  $(\mathbb{IE}^*, \times)$  en conservant les opérateurs usuels d'addition et de multiplication d'intervalles. Ainsi, les structures  $(\mathbb{IE}, +)$  et  $(\mathbb{IE}^*, \times)$  construites par symétrisation sont des groupes et possèdent des opérateurs inverses pour l'addition  $+$  et la multiplication  $\times$ .

La stratégie de construction des structures algébriques  $(\mathbb{IE}, +)$  et  $(\mathbb{IE}^*, \times)$  est exploitée de manière directe pour des intervalles graduels étendus (IGE), sur la base de l'arithmétique de Kaucher sur des intervalles réels. Dans ce cadre, les ensembles IGP et IGI forment l'ensemble des intervalles graduels étendus  $\mathbb{IGE} = \mathbb{IGP} \cup \mathbb{IGI}$ . Dans un premier temps, les opérateurs unaires *dual*, *opp* et *inv* sont définis pour tout élément  $\mathbf{a}(\lambda)$  de IGE ou de  $\mathbb{IGE}^*$ . Par la suite, la soustraction étendue (respectivement la division) est définie de manière naturelle. Ces opérations sont données dans le tableau 6 [17][18].

Quelques remarques et considérations sur ces opérateurs méritent d'être mentionnées :

- D'une manière évidente,  $\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \mathbb{IGE}, \mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{a}(\lambda) = \mathbf{0}(\lambda)$ . L'intervalle  $\mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{b}(\lambda)$  est propre si son Radius est positif. Autrement dit,  $\mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{b}(\lambda) \in \mathbb{IGP}$  si et seulement si  $R_a(\lambda) \geq R_b(\lambda)$ . Cette condition s'interprète de la manière suivante : on ne peut pas soustraire d'une quantité imprécise une autre quantité plus imprécise sans risquer d'augmenter l'imprécision du résultat de l'opération. Si ce principe est violé, l'opération conduit à un intervalle impropre dans IGI. Dans tous les cas, l'opérateur de soustraction est l'opérateur inverse de l'addition *i.e.*  $\mathbf{b}(\lambda) + (\mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{b}(\lambda)) = \mathbf{a}(\lambda)$ .

Opération	Définition de l'opération
Dual	Le dual de $\mathbf{a}(\lambda)$ est obtenu en permutant les bornes de $\mathbf{a}(\lambda)$ , ou de manière similaire en changeant le signe du radius de $\mathbf{a}(\lambda)$ : $\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGE} : \text{dual}(\mathbf{a}(\lambda)) = (M_a(\lambda), -R_a(\lambda))$
Opposé	L'opposé est la négation du dual, c'est-à-dire : $\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGE}, \text{opp}(\mathbf{a}(\lambda)) = \text{neg}(\text{dual}(\mathbf{a}(\lambda))) = (-M_a(\lambda), -R_a(\lambda))$
Inverse	L'inverse est la réciproque du dual : $\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGE}, \text{inv}(\mathbf{a}(\lambda)) = \text{rec}(\text{dual}(\mathbf{a}(\lambda))) = 1/\text{dual}(\mathbf{a}(\lambda))$ $= \delta_a(\lambda) \times \text{dual}(\mathbf{a}(\lambda)) = \delta_a(\lambda) \times (M_a(\lambda), -R_a(\lambda))$
Soustraction	La soustraction est l'addition avec l'opposé : $\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGE}, \forall \mathbf{b}(\lambda) \in \text{IGE}, \mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{a}(\lambda) + \text{opp}(\mathbf{b}(\lambda))$ $= (M_a(\lambda) - M_b(\lambda), R_a(\lambda) + R_b(\lambda))$
Division	La division est la multiplication par l'inverse : $\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGE}, \forall \mathbf{b}(\lambda) \in \text{IGE}^*, \mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{a}(\lambda) \times \text{inv}(\mathbf{b}(\lambda))$ $= \delta_b(\lambda) \times \mathbf{a}(\lambda) \times \text{dual}(\mathbf{b}(\lambda))$

Tableau 6 : Opérations arithmétiques graduelles dans IGE (espace  $MR$ ).

- D'une manière évidente,  $\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGE}^*$ ,

$$\mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{a}(\lambda) = \delta_a(\lambda) \times \mathbf{a}(\lambda) \times \text{dual}(\mathbf{a}(\lambda)) = \delta_a(\lambda) \times (1, 1/\delta_a(\lambda)) = \mathbf{1}(\lambda)$$

L'intervalle  $\mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{b}(\lambda)$  est propre si son Radius est positif. Autrement dit,  $\mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{b}(\lambda) \in \text{IGP}$  si et seulement si  $|RX_a(\lambda)| \geq |RX_b(\lambda)|$ . Cette condition peut être traduite de la manière suivante : on ne peut pas diviser une quantité imprécise par une autre plus imprécise au sens de l'étendue relative sans risquer d'augmenter l'imprécision du résultat de l'opération. Si ce principe n'est pas respecté, l'opération conduit à un intervalle impropre dans IGI. Dans tous les cas, l'opérateur de division est l'opérateur inverse de la multiplication, *i.e.*  $\mathbf{b}(\lambda) \times (\mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{b}(\lambda)) = \mathbf{a}(\lambda)$ .

- Les opérateurs proposés sont développés dans un cadre ontique (les intervalles sont considérés comme des entités compactes) et peuvent s'interpréter naturellement dans un environnement épistémique. Dans ce contexte, les opérations de soustraction et de division sont réalisées sur les variables  $a \in \mathbf{a}$  et  $b \in \mathbf{b}$  en supposant que  $a$  et  $b$  sont contraints par des positions identiques dans leurs intervalles. En effet,  $a$  et  $b$  sont transformés en deux fonctions d'une variable  $\sigma$ , spécifiant leurs positions dans les intervalles de la manière suivante :

$$a = (1 - \sigma) \cdot a^- + \sigma \cdot a^+; \quad b = (1 - \sigma) \cdot b^- + \sigma \cdot b^+; \quad \sigma \in [0, 1]$$

Cette philosophie rejoint la méthodologie du calcul contraint par intervalles proposée dans [31][127] où les résultats obtenus sont équivalents aux nôtres.

- D'un point de vue pratique, nous avons proposé deux indicateurs pour comparer les résultats produits par les opérateurs définis dans IGP et IGE [18]. Le premier indicateur, de nature qualitative, concerne l'inclusion :

$$\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGP}, \forall \mathbf{b}(\lambda) \in \text{IGP}, \forall \diamond \in \{-, /\}: (\mathbf{a}(\lambda) \diamond \mathbf{b}(\lambda))^{\text{IGE}} \subseteq (\mathbf{a}(\lambda) \diamond \mathbf{b}(\lambda))^{\text{IGP}}$$

Le second indicateur, de nature quantitative, consiste à évaluer le gain en précision :

$$\forall \mathbf{a}(\lambda) \in \text{IGP}, \forall \mathbf{b}(\lambda) \in \text{IGP}, \forall \diamond \in \{-, /\}: \Xi_{\diamond}(\lambda) = (R_{\mathbf{a} \diamond \mathbf{b}}(\lambda))^{\text{IGE}} / (R_{\mathbf{a} \diamond \mathbf{b}}(\lambda))^{\text{IGP}}$$

Dans la définition de  $\Xi_{\blacklozenge}(\lambda)$ , le résultat de la division 0/0 est interprété comme valant 1. Nous avons démontré dans [17][18] que  $\Xi_{\blacklozenge}(\lambda) \leq 1$ . De plus, la valeur de cet indicateur (cf. tableau 7) peut s'interpréter comme suit :

Condition	Interprétation
$\Xi_{\blacklozenge}(\lambda) < 0$	L'opération inverse dans IGE fournit un résultat impropre et non interprétable.
$\Xi_{\blacklozenge}(\lambda) = 0$	L'opération inverse dans IGE fournit un résultat précis (un nombre graduel).
$0 < \Xi_{\blacklozenge}(\lambda) < 1$	L'opération inverse dans IGE a divisé l'imprécision d'un facteur $1/\Xi_{\blacklozenge}(\lambda)$ .
$\Xi_{\blacklozenge}(\lambda) = 1$	Les opérations dans IGP et dans IGE fournissent les mêmes résultats.

Tableau 7 : Interprétation de l'indicateur  $\Xi_{\blacklozenge}(\lambda)$ .

- Afin de s'imprégner de la technicité de manipulation des intervalles graduels à travers les opérateurs IGE, le lecteur trouvera en annexe 2 dans l'illustration 3 trois exemples illustratifs (exemples 1, 2 et 3). Ces derniers mettent en évidence le gain en précision apporté par les opérateurs IGE et leur intérêt dans un contexte de calcul arithmétique graduel.
- L'opérateur de division proposé peut être utilisé pour résoudre l'équation  $\mathbf{a}(\lambda) \times \mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{b}(\lambda)$  où  $\mathbf{a}(\lambda)$ ,  $\mathbf{x}(\lambda)$  et  $\mathbf{b}(\lambda)$  sont des intervalles graduels (pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter l'exemple 4 de l'illustration 3 en annexe 2). Dans ce cas, la solution de cette équation est  $\mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{b}(\lambda) / \mathbf{a}(\lambda)$ . La sémantique interprétative associée à cette résolution réside dans la recherche de l'ensemble  $\Omega_{\forall\exists}$  des solutions  $x$  de l'équation  $\mathbf{a}(\lambda) \times x \subseteq \mathbf{b}(\lambda)$  telles que [128] :

$$\Omega_{\forall\exists} = \{x \mid \forall a \in \mathbf{a}(\lambda) \exists b \in \mathbf{b}(\lambda) : a(\lambda) \times x \subseteq b(\lambda)\}$$

En d'autres termes, nous cherchons toutes les solutions  $x$  afin d'assurer que  $\mathbf{a}(\lambda) \times x$  ne quitte pas la zone délimitée par  $\mathbf{b}(\lambda)$ . Dans ce cas, l'intervalle  $\mathbf{b}(\lambda)$  est vu comme une contrainte. En effet, pour tout  $x$  précis choisi dans l'intervalle  $\mathbf{x}(\lambda)$  (relatif à un niveau  $\lambda$  donné), *i.e.*  $x \in \mathbf{x}(\lambda)$ , on peut garantir que  $\mathbf{a}(\lambda) \times x \subseteq \mathbf{b}(\lambda)$ . En d'autres termes,  $\mathbf{x}(\lambda)$  peut être interprété comme l'ensemble de solutions  $\Omega_{\forall\exists}$ .

- Il est important de mentionner ici que les opérateurs proposés sont équivalents aux opérations "gH-difference" et "g-division" données dans [95][178][179] et aux opérateurs "C-difference" et "C-division" développées dans [31].
- Dans l'évaluation des expressions mathématiques graduels à travers les opérations dans IGE, des formes impropres intermédiaires peuvent survenir (cf. illustration 3 – exemple 5 en annexe 2). Il est important d'insister sur le fait qu'un intervalle impropre est un concept purement "imaginaire" qui n'a pas de signification physique. Une analogie peut être faite avec les nombres complexes. Ces derniers sont employés pour le calcul mais des nombres réels sont exigés pour le résultat final. Dans ce contexte, le passage par des formes impropres avant le résultat final n'est pas problématique. De plus, nous disposons de conditions capables de vérifier, *a priori*, la nature du résultat (propre ou impropre). Il est également possible d'imposer des conditions garantissant l'obtention d'un intervalle propre. Toutefois, cette garantie peut conduire à une augmentation de l'imprécision.
- En se basant sur la propriété que n'importe quel intervalle graduel est son propre inverse dans IGE (*i.e.*  $\mathbf{a}(\lambda) - \mathbf{a}(\lambda) = \mathbf{0}(\lambda)$  et  $\mathbf{a}(\lambda) / \mathbf{a}(\lambda) = \mathbf{1}(\lambda)$ ), la simplification des fonctions pour réduire les copies multiples d'une variable est possible (cf. l'illustration 3 – exemple 6 en annexe 2).

- Les opérateurs inverses développés représentent la base du mécanisme de la propagation inverse proposée. Dans ce cas, l'extension des stratégies d'inversion développées dans le chapitre 1 au cas graduel est possible. En effet, en se basant sur l'arithmétique dans IGE, il est possible de construire des inverses à gauche et à droite d'un modèle régressif sous la forme (17). Ce point sera discuté dans la suite de ce document.

### 2.8.2 Les opérateurs *min* et *max* graduels

D'une manière générale, dans les problèmes d'agrégation et de prise de décision, nous disposons de trois grandes familles d'opérateurs pour la combinaison des informations incertaines et imprécises, à savoir les opérateurs conjonctifs, disjonctifs ou de compromis. Dans ce contexte, le *min* et le *max* représentent une des épines dorsales de ces opérateurs. C'est pourquoi une attention particulière a été portée à ces deux relations.

Les nombres réels sont totalement ordonnés. Ainsi, il est évident que pour deux nombres réels quelconques,  $x$  et  $y$ , soit  $x \leq y$  ou  $x > y$ . Ordonner n'importe quelle paire de nombres réels peut être réalisé par les deux opérateurs *min* et *max*. Cependant, ces deux relations ne peuvent pas être directement appliquées pour ordonner des intervalles conventionnels ou des intervalles graduels. En effet, cette opération exige une relation d'ordre totale non disponible pour les intervalles. Dans ce contexte, il est clair que la définition des opérations *min* et *max* sur des intervalles doit être différente et le calcul associé est relativement plus complexe.

Les opérations *min* et *max* sur les réels peuvent être étendues au cas flou à travers le principe d'extension de Zadeh. Ce concept n'est pas nouveau et des travaux le concernant ont été déjà publiés [35][145]. A notre connaissance, aucune expression générique et récursive des opérations *min* et *max* entre intervalles flous ou graduels n'a encore été proposée. Dans ce cadre, une réponse a été apportée à cette problématique dans [20][138] où des expressions du *min* et du *max* sont données pour des intervalles flous triangulaires et trapézoïdaux. Nous donnons ici une nouvelle formalisation à travers la notion d'intervalles graduels. Dans un premier temps le calcul est effectué sur des intervalles conventionnels puis généralisé aux quantités graduelles. L'originalité de la méthodologie proposée réside dans l'extension des relations entre intervalles au cas graduel [109][118][169].

#### 2.8.2.1 Le *min* et le *max* entre intervalles conventionnels

En fonction de la position relative de deux intervalles  $a$  et  $b$ , trois situations peuvent être déterminées (cf. figure 42). Notons ici que le cas d'égalité peut être vu comme une situation particulière de chevauchement ou d'inclusion.

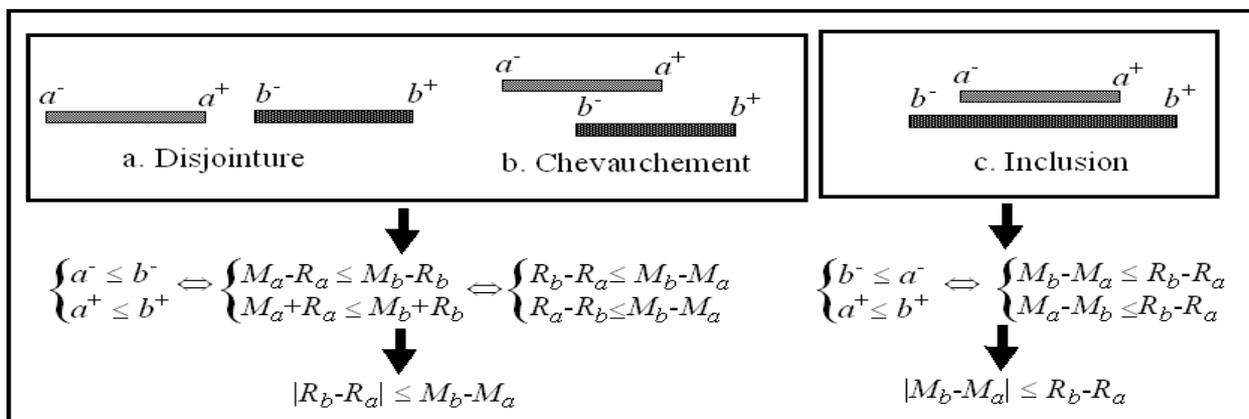


Figure 42 : Relations entre intervalles conventionnels dans l'espace EP.

On peut alors définir (cf. tableau 8) les relations d'ordre partiel et les expressions du *min* et du *max* suivantes :

Relation	Condition	$\min(a,b)$	$\max(a,b)$
$a \leq b$	$ R_b - R_a  \leq M_b - M_a$	$a = [a^-, a^+]$	$b = [b^-, b^+]$
$a \geq b$	$ R_a - R_b  \leq M_a - M_b$	$b = [b^-, b^+]$	$a = [a^-, a^+]$
$a \subseteq b$	$ M_b - M_a  \leq R_b - R_a$	$[b^-, a^+]$	$[a^-, b^+]$
$a \supseteq b$	$ M_a - M_b  \leq R_a - R_b$	$[a^-, b^+]$	$[b^-, a^+]$

Tableau 8 : Relations partielles entre intervalles conventionnels.

Ces relations entre intervalles sont résumées, dans l'espace *MR*, dans la figure 43.

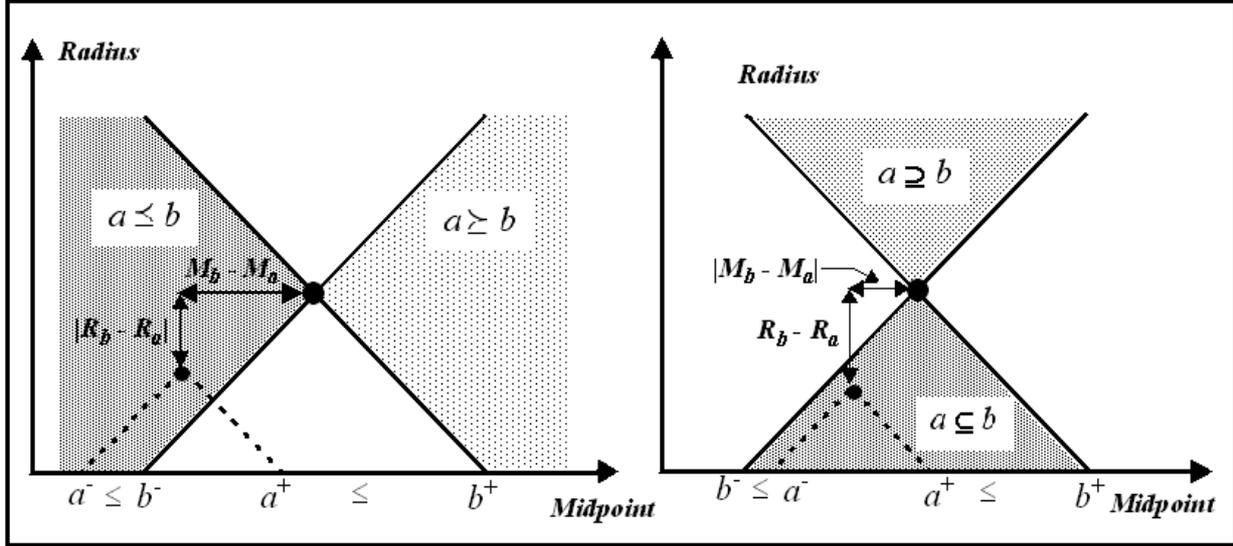


Figure 43 : Relations entre intervalles conventionnels dans l'espace *MR*.

Ces relations respectent les conditions des relations d'ordre partiel à savoir la réflexivité, la transitivité et l'antisymétrie.

Nous avons proposé dans [20][138] des expressions génériques pour calculer le *min* et le *max* entre deux intervalles *a* et *b*. Ces dernières sont reformulées ici par :

$$\begin{cases} \min(a,b) = DC(a,b) \times \Psi_{DC}(a,b) + I(a,b) \times \Psi_I(a,b) \\ \max(a,b) = \min(b,a) \end{cases} \quad (19)$$

où  $DC(a,b)$  et  $I(a,b)$  sont des indicateurs booléens et  $\Psi_{DC}$  et  $\Psi_I$  sont des intervalles. L'indicateur  $DC$  regroupe les cas de Disjointure et Chevauchement et  $I$  est l'indicateur d'Inclusion. Ces expressions sont données par l'équation suivante :

$$\begin{cases} DC(a,b) = |R_b - R_a| \leq |M_b - M_a| ; I(a,b) = |M_b - M_a| \leq |R_b - R_a| \\ \Psi_{DC}(a,b) = [\Psi_{DC}^-(a,b), \Psi_{DC}^+(a,b)] ; \Psi_I(a,b) = [\Psi_I^-(a,b), \Psi_I^+(a,b)] \end{cases} \quad (20)$$

avec :

$$\begin{cases} \Psi_{DC}^-(a,b) = a^- \cdot \gamma_{DC} + b^- \cdot (1 - \gamma_{DC}) ; \Psi_{DC}^+(a,b) = a^+ \cdot \gamma_{DC} + b^+ \cdot (1 - \gamma_{DC}) \\ \Psi_I^-(a,b) = a^- \cdot \gamma_I + b^- \cdot (1 - \gamma_I) ; \Psi_I^+(a,b) = b^+ \cdot \gamma_I + a^+ \cdot (1 - \gamma_I) \\ \gamma_{DC} = (1 + \text{sign}(M_b - M_a)) / 2 ; \gamma_I = (1 - \text{sign}(R_b - R_a)) / 2 \\ \text{sign}(x) = 1 \text{ si } x \geq 0 \text{ et } -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

### 2.8.2.2 Le *min* et le *max* entre intervalles graduels

D'un point de vue théorique, les opérations *min* et *max* sur les intervalles sont directement transposables sur les intervalles graduels. En s'appuyant sur les résultats donnés dans [20][138], nous développons ici un cadre plus formel.

Etant donné deux intervalles graduels  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$ , les opérations *min* et *max* sont élaborées par une extension des expressions (19) et (20) au cas graduel. Cette extension conduit à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \min(a(\lambda), b(\lambda)) = DC(a(\lambda), b(\lambda)) \times \Psi_{DC}(a(\lambda), b(\lambda)) + I(a(\lambda), b(\lambda)) \times \Psi_I(a(\lambda), b(\lambda)) \\ \max(a(\lambda), b(\lambda)) = \min(b(\lambda), a(\lambda)) \end{cases} \quad (21)$$

Les indicateurs  $DC$  et  $I$  et les intervalles  $\Psi_{DC}$  et  $\Psi_I$  sont des versions graduelles des expressions données par (20).

Toutefois, d'un point de vue pratique, des différences existent. En effet, contrairement à une représentation par intervalles où une seule dimension est considérée, un intervalle graduel est représenté selon deux dimensions. Dans ce cadre, une attention particulière sera portée aux points d'intersection entre profils. En effet, ces points de cassure qui délimitent des zones sur la dimension verticale doivent être déterminés préalablement afin d'appliquer les expressions du *min* et du *max*. Pour des intervalles graduels linéaires par morceaux, le résultat à travers des opérateurs linéaires est aussi un intervalle graduel linéaire par morceaux [70].

Contrairement aux intervalles conventionnels où seule une relation d'ordre  $\in \{\leq, \geq, \subseteq, \supseteq\}$  peut exister entre deux intervalles  $a$  et  $b$ , plusieurs relations peuvent coexister dans le contexte graduel en fonction des points d'intersection entre les profils (cf. figure 44).

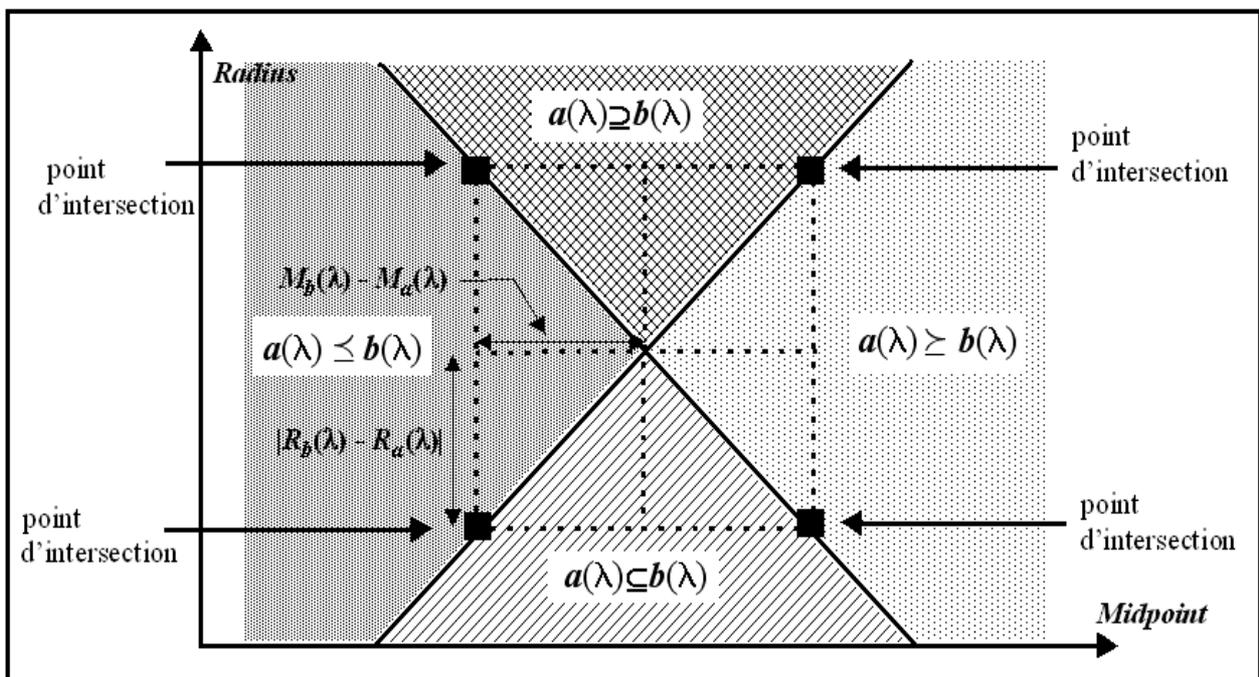


Figure 44 : Relations d'ordre en fonction des points d'intersection.

En effet, en parcourant  $\lambda$  de 0 à 1, nous constatons qu'à chaque intersection entre deux profils ascendants (respectivement descendants) gauche ou droite, la relation d'ordre entre les deux intervalles graduels change selon un ordre d'adjacence bien défini (cf. figure 44). Cette constatation est en concordance avec les propositions données dans [48] où les intersections entre les parties

ascendantes (respectivement descendantes) des distributions de possibilité provoquent un changement d'ordre.

Le passage brusque entre les relations  $\subseteq$  et  $\supseteq$  ou  $\leq$  et  $\geq$  est impossible pour des intervalles graduels monotones (intervalles flous). En effet, et comme illustré dans la figure 45, ces deux configurations correspondent à des situations particulières d'intervalles graduels purs (non représentables par des intervalles flous).

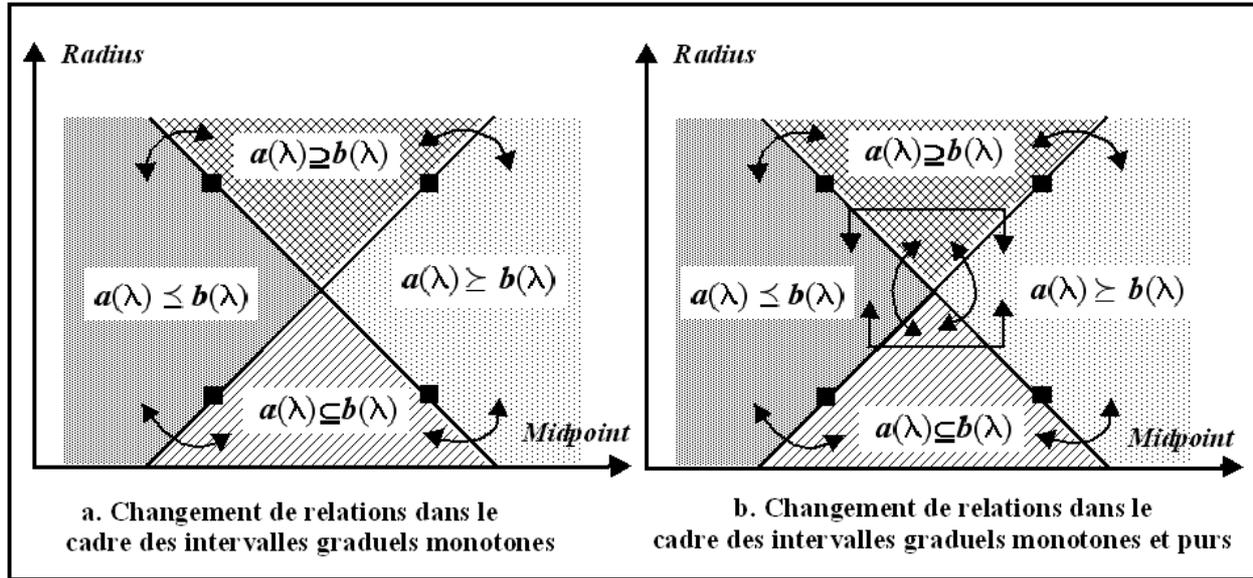


Figure 45 : Changement de relations entre intervalles graduels.

Pour plus de lisibilité, les différentes relations résumées dans les figures 44 et 45 sont explicitées dans la situation de deux intervalles graduels triangulaires  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  dans l'annexe 2 (illustration 4). Dans chaque situation, le *min* et le *max* entre les intervalles sont calculés. Dans ce contexte, il est possible de constater les changements de relations partielles entre intervalles en fonction de l'intersection des profils ascendants (respectivement descendants). Pour exhiber le mécanisme calculatoire relatif au *min* et au *max*, le lecteur trouvera en annexe 2 (illustration 5) un exemple démonstratif.

## 2.9 Mécanismes et méthodologies de propagation

### 2.9.1 Application à la propagation inverse

Étant donné un modèle graduel sous la forme (17), donné par l'expression suivante :

$$y(\lambda) = a_0(\lambda) + \sum_{i=1}^n a_i(\lambda) \times \Phi_i(x(\lambda)) ; \text{ et } x(\lambda) = (x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda)) \quad (22)$$

Les principes d'inversion à gauche et à droite détaillés dans le chapitre 1 restent valables dans un contexte graduel [18]. En effet, supposons que notre objectif est d'inverser le modèle (22) par rapport à l'entrée  $x_n$  (inversion à gauche). La propriété de multi-linéarité des fonctions  $\Phi_i$  va nous permettre l'écriture du modèle (22) sous une forme affine en  $x_n$  et donnée par l'équation suivante :

$$y(\lambda) = \alpha(a_0(\lambda), \dots, a_n(\lambda), x_1(\lambda), \dots, x_{n-1}(\lambda)) + \beta(a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda), x_1(\lambda), \dots, x_{n-1}(\lambda)) \times x_n(\lambda)$$

Dans ce cas, la sémantique associée au problème d'inversion consiste à trouver toutes les solutions  $x_n$  telles que :

$$\alpha(a_0(\lambda), \dots, a_n(\lambda), x_1(\lambda), \dots, x_{n-1}(\lambda)) + \beta(a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda), x_1(\lambda), \dots, x_{n-1}(\lambda)) \times x_n \subseteq y(\lambda)$$

Analytiquement,  $x_n(\lambda)$  peut être calculé comme suit :

$$x_n(\lambda) = \frac{y(\lambda) - \alpha(a_0(\lambda), \dots, a_n(\lambda), x_1(\lambda), \dots, x_{n-1}(\lambda))}{\beta(a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda), x_1(\lambda), \dots, x_{n-1}(\lambda))}$$

La solution  $x_n(\lambda)$  représente l'ensemble de toutes les solutions  $x_n \in x_n(\lambda)$ . Comme expliqué dans [17][18], ce résultat n'est pas toujours représentable par des intervalles propres. En effet,  $x_n(\lambda) \in \text{IGP}$  si et seulement si la condition suivante est garantie :

$$R_y(\lambda) \geq R_\alpha(\lambda) + |M_y(\lambda) - M_\alpha(\lambda)| \times |RX_\beta(\lambda)| \quad (23)$$

Cette condition est une limite inférieure assurant une solution graduelle propre. Une limite supérieure vue comme une contrainte de saturation peut également être imposée sur la solution  $x(\lambda)$  afin de garantir des valeurs acceptables et raisonnables (zone de saturation ou zone de non admissibilité). Ce point a été proposé et analysé dans notre publication [18]. Pour plus de détails, le lecteur intéressé trouvera en annexe 2 (illustration 8), une implémentation de ce principe d'inversion à gauche à travers un modèle économique linéaire (modèle producteur-consommateur). Le problème d'inversion à droite peut s'appliquer de la même manière. Il sera discuté dans le chapitre 3 de ce document dans une problématique de contrôle.

## 2.9.2 Application à la propagation directe

### 2.9.2.1 Moyenne graduelle pondérée

La moyenne pondérée floue (*MPF*) est probablement la méthode la plus simple et la plus répandue dans l'agrégation des informations imprécises et incertaines. Dans un environnement où l'information est mal définie, il est plus approprié de représenter les scores et les coefficients de pondération par des intervalles flous. Dans ce cadre, en considérant  $n$  intervalles flous  $x_i$  avec leurs poids flous associés  $w_i$ , la *MPF* est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \text{MPF}(x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda), w_1(\lambda), \dots, w_n(\lambda)) = \text{num}(\lambda) / \text{den}(\lambda) ; \text{ avec :} \\ \text{num}(\lambda) = x_1(\lambda) \times w_1(\lambda) + \dots + x_n(\lambda) \times w_n(\lambda) ; \text{ den}(\lambda) = w_1(\lambda) + \dots + w_n(\lambda) \end{cases} \quad (24)$$

Dans les trois dernières décennies, bon nombre de chercheurs ont proposé divers algorithmes pour calculer une solution exacte et discrète de la *MPF*. Toutes les méthodes proposées sont basées sur le principe des  $\alpha$ -coupes, couplé à l'analyse par intervalles. Des algorithmes efficaces existent pour des classes spécifiques de fonctions, particulièrement pour la classe des fonctions linéaires fractionnelles [119]. Dans ce cadre, Liou et Wang [124] ont été les premiers à constater que puisque les scores apparaissent seulement dans le numérateur de la moyenne, seules les plus petites valeurs de ces scores sont employées pour calculer la plus petite valeur de la moyenne, et *vice versa*. Cette décomposition est employée pour réduire la complexité algorithmique dans des approches récentes [33][125][126]. Dernièrement, la *MPF* a été traitée par programmation fractionnelle en utilisant la règle de Charnes et de Cooper [88][105]. Dans la même optique, une solution analytique a été proposée sur la base de l'algorithme de Karnik-Mendel [125][126], largement exploité dans l'implantation des systèmes flous de type-2.

Même si les procédures mentionnées ci-dessus peuvent déterminer la solution exacte pour la *MPF*, les calculs restent complexes. En particulier, aucune méthodologie analytique et calculatoire capable d'implémenter la *MPF* par des opérations élémentaires n'est disponible. De plus, l'inconvénient de la non idempotence de la *MPF*, inhérent au calcul par intervalles, persiste. En effet, le remplacement de chaque score  $x_i$  par la *MPF* mène à un résultat qui diffère de la *MPF*. En contrepartie des travaux

existants, nous avons proposé une vision différente où une moyenne graduelle pondérée (*MGP*) a été proposée [17][18]. Cette dernière repose sur l'arithmétique graduelle étendue. En effet, la *MGP* est formulée comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{MGP}(\mathbf{x}_1(\lambda), \dots, \mathbf{x}_n(\lambda), \mathbf{w}_1(\lambda), \dots, \mathbf{w}_n(\lambda)) = \mathbf{num}(\lambda) / \mathbf{den}(\lambda) \\ = \delta_{den}(\lambda) \times \mathbf{num}(\lambda) \times \mathbf{dual}(\mathbf{den}(\lambda)) \end{cases} \quad (25)$$

Bien évidemment, la *MGP* peut toujours être calculée mais elle peut mener parfois à un résultat purement graduel. Signalons ici que le remplacement de chaque score  $\mathbf{x}_i(\lambda)$  par la *MGP* redonne cette dernière. Ainsi, la propriété d'idempotence est respectée.

La performance et la validité de la *MGP* en termes de réduction de l'imprécision ont été mesurées sur des exemples issus de la littérature récente relative à la *MPF*. Le premier exemple donné en annexe 2 (illustration 6) est extrait de [126] et traité dans notre publication [17]. Dans cet exemple, les résultats de la *MGP* ont été comparés à ceux produits par la *MFP* exacte selon le principe d'extension de Zadeh en appliquant l'algorithme récent de Karnik-Mendel [126] et la *MPF* en utilisant les opérateurs IGP. Le deuxième exemple (illustration 7), est extrait de [44][105][126] et traité dans notre publication [17]. Il exhibe l'aspect purement graduel de la *MGP* et son approximation par une distribution de possibilité (un intervalle flou).

### 2.9.2.2 Application à l'intégrale de Choquet 2-additive

L'intégrale de Choquet a été retenue pour sa capacité à modéliser conjointement l'importance relative des critères et leurs interactions tout en exhibant un compromis de satisfaction entre critères [82][83][84][133][145]. L'intégrale de Choquet 2-additive a été exploitée pour illustrer la potentialité calculatoire des opérateurs développés.

On considère un ensemble d'alternatives  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$  à agréger. Ces dernières sont représentées par des distributions de possibilité (vues comme des intervalles graduels) et associées à un ensemble de critères  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ . L'intégrale de Choquet 2-additive peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} IC(\mathbf{a}_1(\lambda), \dots, \mathbf{a}_n(\lambda)) = & \sum_{I_{ij} > 0} \min(\mathbf{a}_i(\lambda), \mathbf{a}_j(\lambda)) \times I_{ij} + \\ & \sum_{I_{ij} < 0} \max(\mathbf{a}_i(\lambda), \mathbf{a}_j(\lambda)) \times |I_{ij}| + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i(\lambda) \times (v_i - 0.5 \sum_{i \neq j} |I_{ij}|) \end{aligned} \quad (26)$$

avec  $(v_i - 0.5 \sum_{i \neq j} |I_{ij}|) \geq 0$  et  $v_i$  est l'indice de Shapley donnant l'importance du critère  $i$  par rapport aux autres critères ( $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ ). Les  $I_{ij}$  représentent les interactions entre les paires de critères  $(i, j)$  et prennent une valeur dans l'intervalle  $[-1, 1]$ . Une valeur de "1" signifie qu'il y a un effet synergique positif entre les deux critères, une valeur de "-1" signifie qu'il y a une synergie négative et une valeur nulle représente des critères indépendants.

D'une manière générale, l'agrégation des distributions de possibilité relatives à des critères à travers l'intégrale de Choquet est réalisée par le principe d'extension de Zadeh. Comme discuté précédemment, l'implantation de ce principe conduit à des opérations très lourdes. A travers les opérateurs proposés, il est possible d'aborder l'intégrale de Choquet par un calcul graduel purement analytique. Cette vision a été mise en valeur dans [20]. Les résultats obtenus par la méthode proposée sont équivalents et en concordance avec ceux obtenus par l'utilisation du théorème donné dans [81]. A travers le formalisme proposé, il est possible d'aborder non seulement l'imperfection des alternatives mais aussi d'intégrer des imprécisions et des incertitudes sur les indices d'interaction.

Une illustration de ce mécanisme calculatoire à travers l'intégrale de Choquet 2-additive est donnée en annexe 2 (illustration 9).

## 2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, des outils de propagation et de combinaison des informations incertaines et imprécises ont été proposés. La méthodologie graduelle proposée généralise le concept d'intervalles conventionnels et permet d'introduire et de manipuler l'incertitude. La conception développée est cohérente avec une représentation floue, possibiliste et/ou à base de fonctions de croyance. Dans ce contexte, des réponses ont été apportées aux problèmes et inconvénients de l'arithmétique floue à travers des mécanismes calculatoires exactes et purement analytiques.

Quelques considérations et remarques méritent d'être explicitées.

- Il est important de signaler qu'en plus de sa possible interprétation comme une distribution de possibilité, un intervalle graduel monotone peut aussi être vu comme un intervalle aléatoire "consonnant" ou comme une famille de mesures de probabilités. Une étude comparative détaillée sur ces concepts est donnée dans [3].
- Il est important de mentionner ici que les opérateurs inverses proposés donnent des résultats équivalents à ceux obtenus par le calcul sur les fonctions [70], par l'arithmétique floue sous contraintes ou par l'utilisation des opérateurs "gH-différence" et "g-division" [95][178][179]. Toutefois, la méthodologie développée apporte des conditions d'existence compactes pour obtenir des résultats graduels appropriés et elle peut quantifier le gain apporté en termes de précision. En effet, notre méthode est employée dans un contexte purement graduel et elle rend possible de vérifier, *a priori*, si les résultats obtenus seront des intervalles propres ou non. Ces conditions sont très utiles dans le domaine des sciences de l'ingénieur.
- Un débat philosophique peut être entamé sur la signification d'un intervalle graduel pur (non monotone) ou sur la pertinence d'un intervalle graduel impropre. Pour le premier, nous pensons que ce principe n'est pas conflictuel avec une conception imprécise de l'information. Toutefois, si une interprétation floue et/ou possibiliste sont exigées, alors une approximation peut être envisagée. Quant à la notion d'intervalle impropre, elle correspond à un objet purement "imaginaire" qui n'a pas de signification physique (une analogie peut être faite avec des nombres complexes). A notre sens, le passage par des formes impropres avant le résultat final n'est pas contestable. De plus, des conditions garantissant l'obtention d'un intervalle propre ont été proposées et elles peuvent être imposées. Toutefois, cette garantie de résultats induira une augmentation de l'imprécision.
- Les opérateurs de propagation et de combinaison exploités (largement étudiés dans la littérature) respectent la propriété de fermeture et fournissent un résultat de même nature que les informations de départ. Dans ce cas, les intervalles résultants ont donc la même interprétation en termes d'imprécision et/ou d'incertitude à travers les théories de possibilités (mesures de possibilité et de nécessité) et des fonctions de croyance (mesures de croyance et de plausibilité). Se posent maintenant les questions d'identification de ces modèles à base d'intervalles flous ou plus généralement à base d'intervalles graduels. Quelle signification peut-on attribuer à ces modèles et à leur représentativité ? Comment les exploiter dans un contexte de contrôle ? Les réponses à ces questions feront l'objet du chapitre 3 où une vision régressive est proposée.



# Chapitre 3 : Identification et Contrôle graduels

## 3.1 Introduction

Un modèle mathématique quel qu'il soit ne peut être qu'une approximation de la réalité. Des hypothèses sont en effet souvent énoncées pour pouvoir l'obtenir. Dans ce contexte, deux méthodes sont couramment employées pour obtenir de tels modèles. La première méthode vise à déterminer un modèle mathématique de connaissance en s'appuyant sur des lois physiques bien connues. De par la complexité des systèmes, cette approche s'avère souvent infructueuse. On s'oriente alors vers la deuxième approche qui ambitionne l'obtention d'un modèle de représentation à partir d'un jeu de données entrées-sorties observé sur le système considéré. Ce modèle (statistique, data-mining ou encore de régression) permet d'exhiber le comportement d'un système à travers des relations mathématiques dépendantes entre ses entrées et ses sorties. C'est cette dernière philosophie qui est exploitée dans ce chapitre.

Dans la construction du modèle de représentation, il est primordial de faire appel à des méthodes d'identification ainsi qu'à des techniques d'estimation, capables de fournir les modèles les plus adéquats. Comme discuté dans le chapitre précédent, nous avons opté pour un modèle paramétrique sous la forme (17). Une fois la structure du modèle choisie, le problème d'identification est réduit à un problème d'estimation des paramètres. Dans ce contexte, la régression paramétrique occupe une place importante dans l'identification des modèles considérés.

D'une manière générale, en présence d'informations imprécises et/ou incertaines, trois actions s'offrent à nous.

- Soit nous cherchons à les supprimer.
- Soit nous les tolérons en dehors du modèle en faisant en sorte que les algorithmes d'identification et de commande proposés soient robustes face à ces imperfections.
- Soit nous cherchons à les intégrer dans le modèle et à étudier leur propagation et leur signification afin d'enrichir le modèle et sa représentativité.

La première idée est classiquement exploitée dans un environnement stochastique, relatif aux problèmes de filtrage. La deuxième correspond à la vision utilisée en automatique et plus particulièrement dans le contexte du contrôle flou conventionnel. Cette approche a été discutée et analysée dans le chapitre 1 de ce document. Quant à la troisième, elle permet la proposition des modèles et des structures de commande capables de tirer profit de leur environnement imprécis et/ou incertain. C'est cette dernière vision qui a été exploitée dans nos travaux de recherche à travers une conception par modèles régressifs.

La vérification des hypothèses dans le cadre d'une régression statistique implique souvent de disposer d'un grand nombre d'observations. Or, dans de nombreux cas pratiques, ces dernières sont

insuffisantes en quantité et/ou en qualité car les coûts et les délais ne permettent pas d'obtenir des données riches et suffisantes. De plus, ces informations sont souvent entachées d'erreurs de mesure et d'imperfections en général. Dans certaines situations, des observations subjectives sous forme d'intervalles de confiance et/ou de distributions de possibilité (intervalles flous) peuvent être énoncées sur les variables et les paramètres du modèle. Dans ce contexte, la régression par intervalles et/ou la régression floue peuvent représenter des alternatives intéressantes.

Deux grandes familles de méthodes de régression "floue" sont considérées dans la littérature :

- les méthodes dites "possibilistes", introduites par Tanaka [189][190] et développées dans [76][91][97][191]. Cette dénomination, bien que contestable, est due à la représentation des paramètres par des fonctions d'appartenance qui peuvent être vues comme des distributions de possibilité;
- les méthodes dites de "Moindres Carrés – MC", proposées par Diamond [41] et développées dans [58][93][94]. Ces méthodes représentent une extension, au cas flou, des méthodes conventionnelles à base de moindres carrés.

La distinction entre les deux méthodologies (possibiliste ou MC) réside dans la formulation de l'objectif d'optimisation. Pour les MC, l'objectif est de minimiser l'erreur totale entre les sorties observées et les sorties du modèle (au sens des MC) alors que dans le cas possibiliste, il s'agit d'identifier le modèle le moins imprécis possible qui respecte des contraintes d'inclusion entre sorties observées et sorties prédites par le modèle de régression.

De nombreuses critiques ont été formulées sur ces approches, notamment lorsque l'inclusion des sorties observées dans les sorties prédites est requise dans une approche englobante, aboutissant à une grande imprécision du modèle. En outre, ces approches souffrent d'un manque de représentativité vis-à-vis de la tendance des imprécisions et exploitent des critères d'optimisation non robustes.

Nous avons proposé, dans un premier temps, de revisiter ces approches en développant une nouvelle relecture de la régression floue à travers la notion d'intervalles graduels. L'objectif était d'identifier des modèles régressifs à partir de données entrées-sorties imprécises et incertaines, représentées par des intervalles conventionnels et/ou intervalles graduels. L'ensemble de ces travaux a été initié dans le cadre de la thèse de Bisserier [13]. Pour des raisons de cohérence, les approches de régression ont été d'abord développées dans un environnement à base d'intervalles conventionnels puis généralisées dans un contexte graduel.

Dans un second temps, les modèles régressifs proposés ont été exploités dans des structures de commande indirectes et directes. Dans l'approche indirecte, le contrôleur est conçu par une stratégie d'inversion de modèle pour résoudre les problèmes de régulation et de suivi de trajectoires. Quant aux techniques directes, elles visent à augmenter les contrôleurs flous (conçus à base d'expertises) par des organes de niveau supérieur, capables d'améliorer les performances globales du système.

### **3.2 Régression à base d'intervalles conventionnels**

Ce problème de régression a été traité dans la littérature selon différents points de vue et en considérant différents types de données entrées-sorties. En effet, selon la nature des données, deux problèmes de régression peuvent être distingués. La première approche suppose que les entrées sont précises et les sorties sont imprécises. Dans ce cas, les imprécisions propagées en sortie du modèle sont uniquement dues aux paramètres imprécis [11][12][189][190]. Le deuxième problème, plus

général, est consacré aux systèmes où les entrées et sorties sont considérées comme imprécises [60][92][168][199]. C'est cette deuxième méthodologie, plus globale, qui a été retenue dans nos travaux. Nous insistons ici sur le fait que dans un contexte de régression floue, une fois le principe des  $\alpha$ -coupes retenu, la régression floue peut être vue comme une régression à base d'intervalles conventionnels. Pour des raisons de simplicité de calcul et d'interprétation, les méthodes proposées sont illustrées ici sur un modèle linéaire d'ordre 1.

### 3.2.1 Sémantique de la régression à base d'intervalles

D'une manière générale, un système de régression précise est formalisé comme suit :

$$y_r(x) = a_0 + a_1 \cdot x + e$$

où :  $y_r$  est la sortie (la variable dépendante),  $x$  est l'entrée (variable indépendante),  $e$  est l'erreur associée au problème de régression et  $a_0$  et  $a_1$  sont les paramètres à déterminer. Supposons un ensemble de données précises, relatives à l'entrée  $x$  et à la sortie  $y$ , l'objectif de la régression est alors de déterminer un modèle précis  $M$  sous la forme :

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x ; \text{ où : } y \text{ est la sortie prédite par le modèle.}$$

Dans la construction du modèle  $M$ , la vision de régression proposée dans ce document distingue deux approches différentes. En effet, si l'approche possibiliste vise à englober toutes les données mesurées dans le modèle, la méthode au sens des MC cherche à ajuster le modèle par rapport aux données en minimisant l'écart entre les observations et les prédictions. Ces principes de régression (approche par MC et approche possibiliste), dans un cas linéaire, sont illustrés dans les figures 46 et 47 pour deux jeux de données entrée-sortie précis, relatifs au même système.

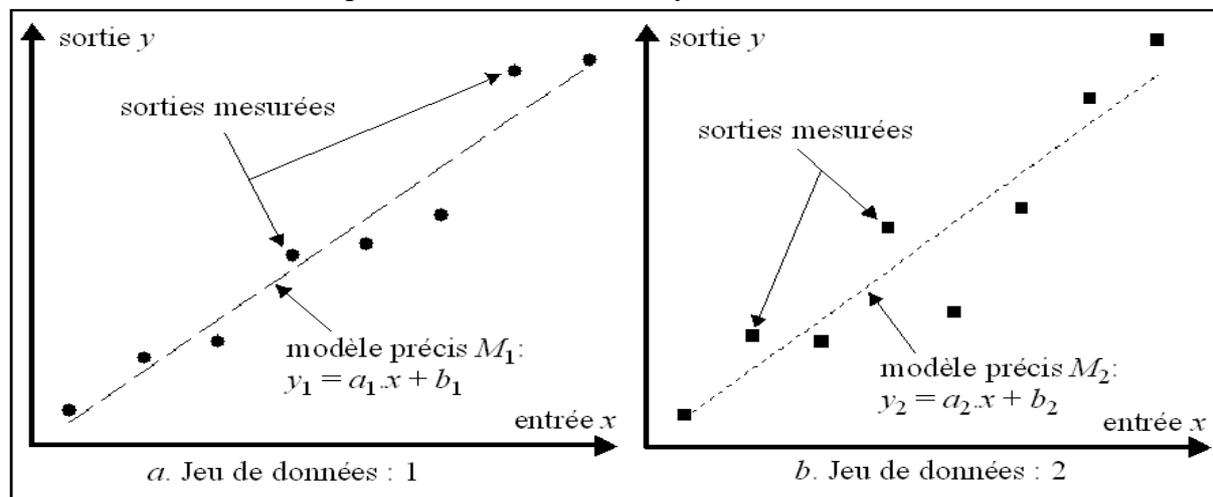


Figure 46 : Régression au sens des moindres carrés avec des données précises.

Il est important de signaler ici qu'en présence d'entrées-sorties précises, la régression par MC est typiquement une régression statistique, largement exploitée dans la littérature. Contrairement à la méthode des MC qui conduit à l'obtention d'un modèle  $M$  précis, la méthode possibiliste aboutit à un modèle  $M$  imprécis où les paramètres sont représentés par des intervalles. Dans le contexte possibiliste, si un modèle précis est souhaité alors la tendance du Midpoint de la sortie peut être considérée comme la sortie de ce modèle. Bien évidemment, d'autres modèles peuvent être choisis au sens d'un critère. Cette conception peut alors être considérée comme une alternative aux approches statistiques en présence d'un manque d'informations et/ou de forte variabilité des données. D'après nos "expériences", la tendance du Midpoint dans un modèle possibiliste est toujours

comparable à une sortie obtenue par régression statistique (au sens des MC). Bien que ce résultat relève plus d'une validation expérimentale que d'une vérité scientifique, il mérite d'être mentionné.

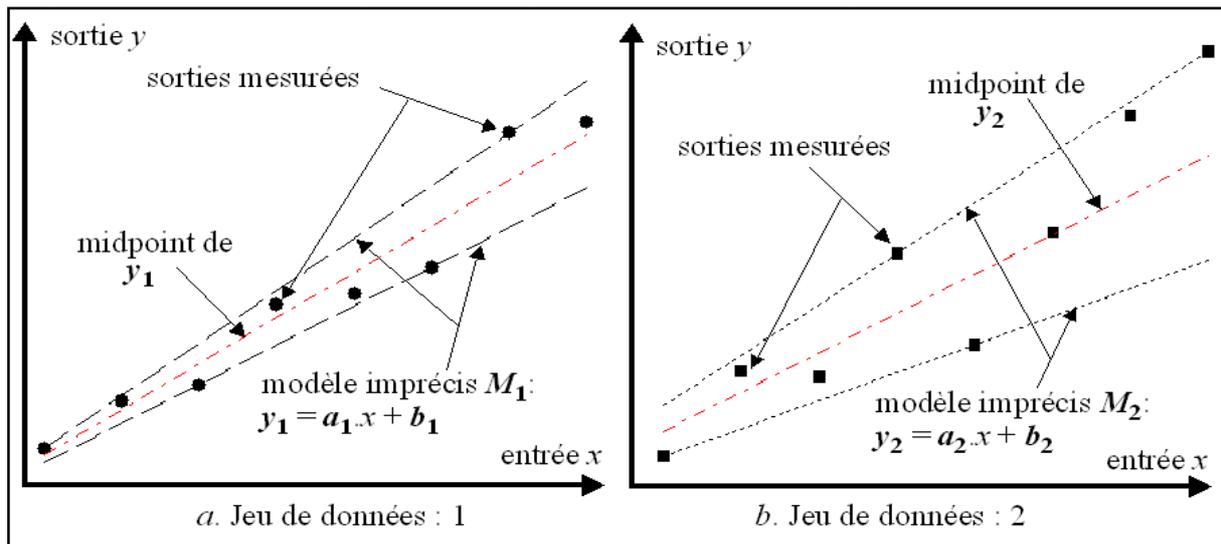


Figure 47 : Régression possibiliste avec des données précises.

Supposons que toutes les réalisations possibles de la sortie  $y$ , relatives à une entrée précise  $x$ , soient rangées ou instanciées dans leur intervalle d'appartenance. Dans ce cas, l'objectif est d'identifier un modèle imprécis où les sorties sont représentées par des intervalles. Ces derniers sont manipulés, dans le problème de régression, comme des entités compactes selon une vision ontique. Cette méthodologie est illustrée dans les figures 48 et 49 dans un cas linéaire (pour des entrées précises et des sorties sous forme d'intervalles) à travers les approches possibiliste et au sens des MC. On remarquera que si les données des jeux 1 et 2 sont visualisées dans leur intervalle d'appartenance, ces derniers sont supposés construits à partir de multiples réalisations.

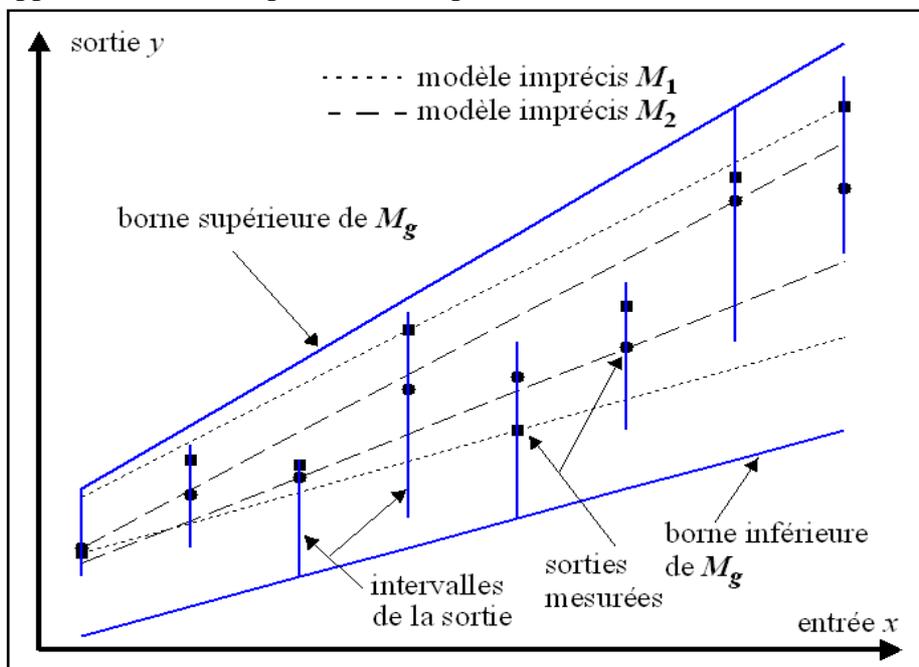


Figure 48 : Régression possibiliste avec des données "intervalles".

D'une manière évidente, si les deux méthodologies (possibiliste et par MC) aboutissent à un modèle imprécis global  $M_g$ , leur sémantique interprétative diffère. En effet, le modèle  $M_g$  issu d'une

approche possibiliste est vu comme une famille de modèles imprécis  $M \subseteq M_g$ . Quand il est obtenu par la technique des MC, le modèle  $M_g$  est considéré comme une collection de modèles précis  $M \in M_g$ .

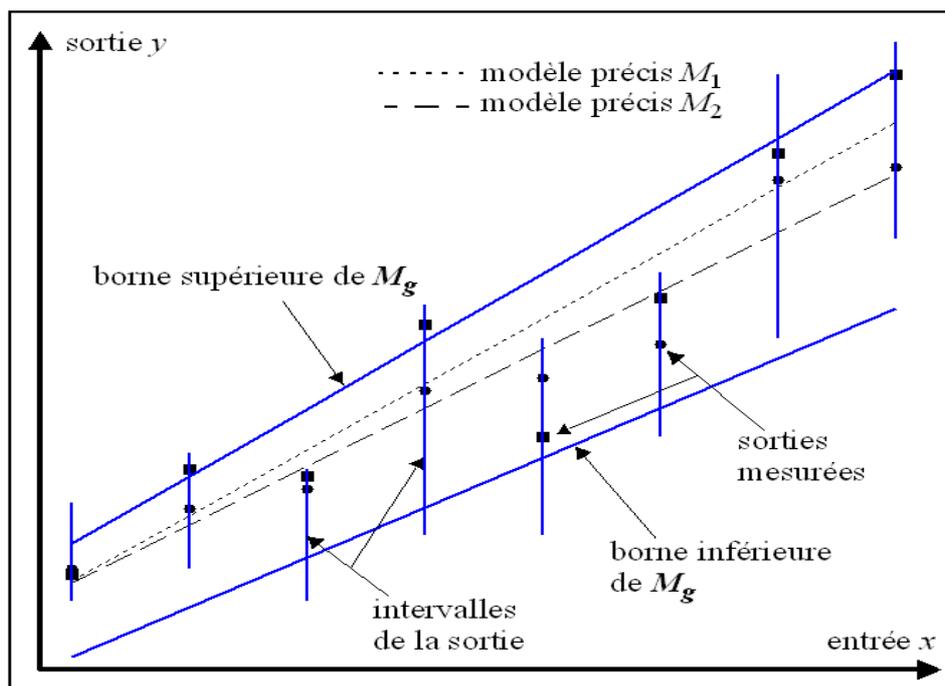


Figure 49 : Régression au sens des MC avec des données "intervalles".

Il est important de signaler ici que, contrairement à la méthode possibiliste, la régression par MC peut conduire à une exclusion d'une partie des données du modèle. En d'autres termes, sur un plan épistémique, certaines réalisations possibles pour le comportement entrée-sortie ne sont pas exhibées dans le modèle. Cette constatation peut parfois mettre en doute la pertinence et la validité du modèle de représentation identifié. Dans les applications réelles, une attention particulière doit être portée sur ces informations exclues ou rejetées du modèle (données aberrantes par exemple) avant la validation du modèle. D'une manière générale, la régression conventionnelle au sens MC est mal adaptée pour appréhender la représentation des données imprécises sous forme d'intervalles (selon une vision ontique). Dans ce travail, notre référence reste la méthode possibiliste.

D'une manière globale, la régression imprécise à base d'intervalles est énoncée en les termes suivants : supposons un ensemble de  $K$  échantillons de données "construits" sous forme d'intervalles, dont chaque échantillon est représenté par le couple  $(x_j, y_j^{obs})$ ,  $j = 1, \dots, K$  où les  $x_j$  sont les intervalles de l'entrée et les  $y_j^{obs}$  sont les intervalles de la sortie. L'objectif de la régression est alors de déterminer un modèle global imprécis  $M_g$  à base d'intervalles de la forme :

$$y(x) = a_0 + a_1 \times x \quad (27)$$

où  $y$  est la sortie prédite par le modèle et  $a_0$  et  $a_1$  sont les paramètres (intervalles) à déterminer.

Dans le problème de régression par intervalles abordé dans ce document, les intervalles sont considérés à travers une approche ontique où chaque intervalle relatif à une variable (entrée et/ou sortie) représente l'ensemble des situations possibles pour cette dernière. Toutefois, le modèle global imprécis obtenu peut être exploité selon une vision épistémique. Dans ce cadre, étant donné un ensemble précis d'observations sur le comportement entrée-sortie où chaque mesure est instanciée à travers son intervalle de vraisemblance, la régression "précise" consiste à sélectionner un modèle précis  $M \in M_g$ , le plus adéquat et le plus pertinent au sens d'un critère à définir (cf. figure 50) [96].

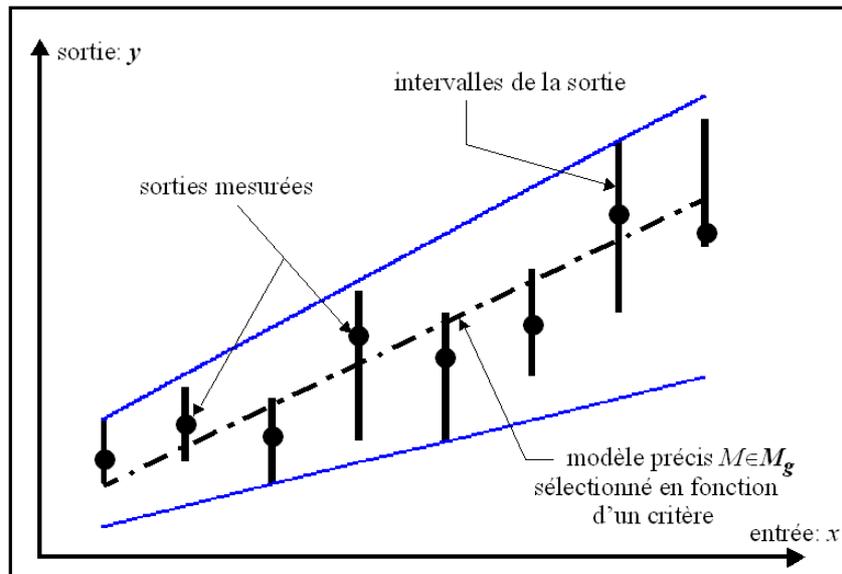


Figure 50 : Interprétation épistémique de la régression possibiliste.

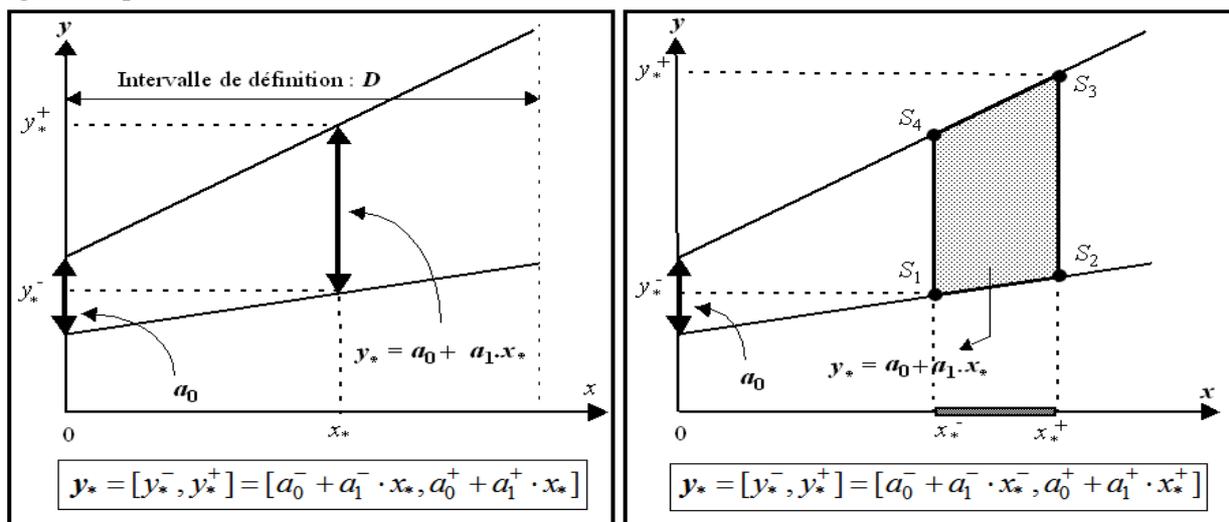
Généralement, dans les méthodologies de régression à base d'intervalles publiées dans la littérature, deux problèmes émergent : le manque de représentativité du modèle d'une part et l'évolution de sa tendance imprécise d'autre part.

### 3.2.2 Représentativité du modèle

La représentation dans l'espace  $EP$  est la plus exploitée dans la littérature. Dans ce cadre classique, tous les intervalles des entrées sont inclus dans un intervalle, noté  $D = [D^-, D^+]$ . En considérant l'ensemble des observations, il est possible de déterminer  $D$  correspondant à la plage de variations des entrées. Celles-ci étant imprécises, l'intervalle  $D$  est donné par :

$$D = [\min_j x_j^-, \max_j x_j^+] ; j = 1, \dots, K$$

La représentation  $EP$  souffre d'un manque de représentativité de l'imprécision. En effet, prenons le cas particulier du modèle (27) où  $a_1$  et  $x$  sont des intervalles positifs. Cette situation est illustrée dans la figure 51 pour une entrée  $x = x_*$ .



a. Modèle pour une entrée précise

b. Modèle pour une entrée sous forme d'intervalle

Figure 51 : Représentation du modèle dans l'espace  $EP$ .

L'intervalle  $x^*$  est représenté sur une seule dimension, ce qui mène à un manque de représentativité de son incertitude (son Radius). De plus, la sortie du modèle est définie sur un quadrilatère délimité par les sommets ( $S_1, S_2, S_3, S_4$ ). Si les sommets  $S_1$  et  $S_3$  montrent les limites de la sortie, les autres ( $S_2$  et  $S_4$ ) n'ont réellement aucune interprétation utile par rapport à la sortie. Dans ce contexte, ni le domaine de définition, ni l'imprécision de la sortie sur ce dernier ne peuvent être correctement exhibés dans un espace 2D. Cette conception limite l'interprétation graphique de ce genre de représentation [92][168].

Les inconvénients de la représentation  $EP$  nous ont amenés à lui préférer une représentation  $MR$ . Par exemple, toujours dans le cas particulier où  $a_1$  et  $x$  sont des intervalles positifs, la sortie du modèle dans l'espace  $MR$  est donnée par l'expression suivante :

$$y_* = (M_{y_*}, R_{y_*}) = (M_{a_0} + M_{a_1 \cdot x_*}, R_{a_0} + R_{a_1 \cdot x_*})$$

Dans ce contexte, les évolutions du Midpoint et du Radius sont illustrées dans la figure 52.

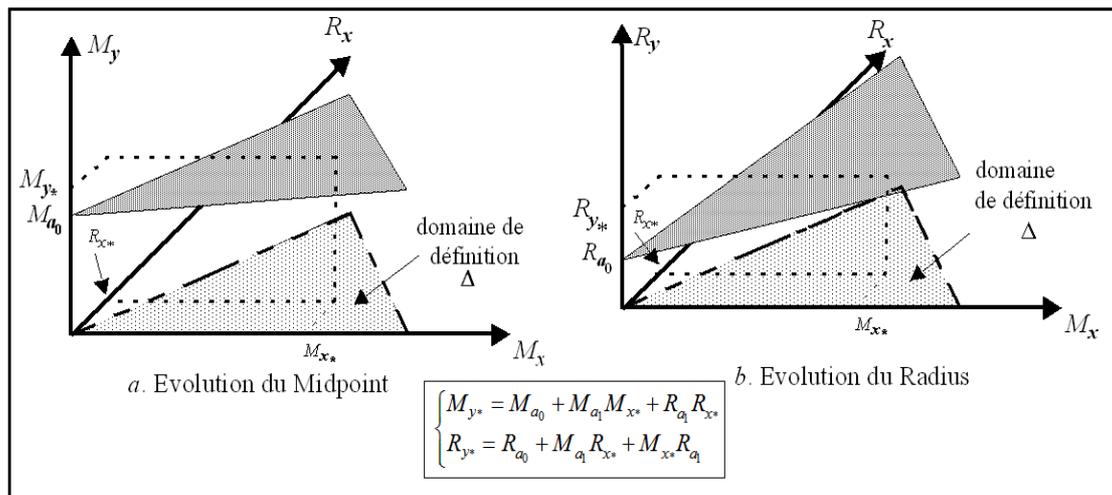


Figure 52 : Evolutions du Midpoint et du Radius.

La juxtaposition des deux figures (figure a. et figure b) précédentes conduit à l'évolution globale de la sortie du modèle en fonction du Midpoint et du Radius. Cette dernière est illustrée à la figure 53.

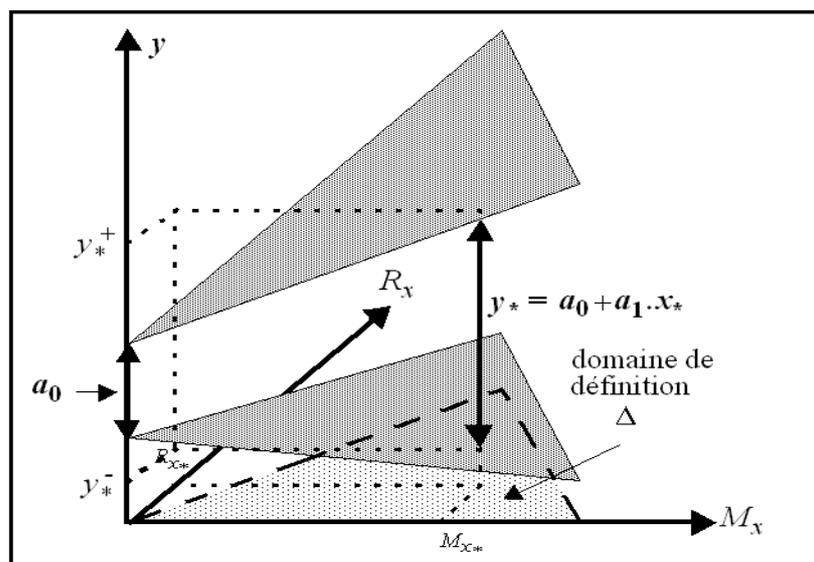


Figure 53 : Représentation du modèle dans l'espace  $MR$ .

Dans cette représentation, un seul intervalle est requis pour représenter une entrée considérée. La sortie du modèle exhibe les contributions du Midpoint et du Radius de cette entrée. Selon cette représentation, l'origine de l'imprécision dans la sortie peut être déterminée (les contributions du paramètre et/ou de l'entrée). Dans l'espace  $MR$ , l'intervalle  $D$  est exprimé avec son Midpoint et son Radius comme suit :

$$M_D = (\text{Min } x_j^- + \text{Max } x_j^+) / 2 \text{ et } R_D = (\text{Max } x_j^+ - \text{Min } x_j^-) / 2 ; j = 1, \dots, K$$

L'entrée imprécise du modèle peut donc être tout intervalle inclus dans  $D$ . L'ensemble de tous les intervalles inclus dans  $D$ , noté  $\Delta$ , est considéré comme le domaine de définition du modèle de régression.

Ce domaine de définition est illustré dans la figure 54 dans un espace  $MR$ .

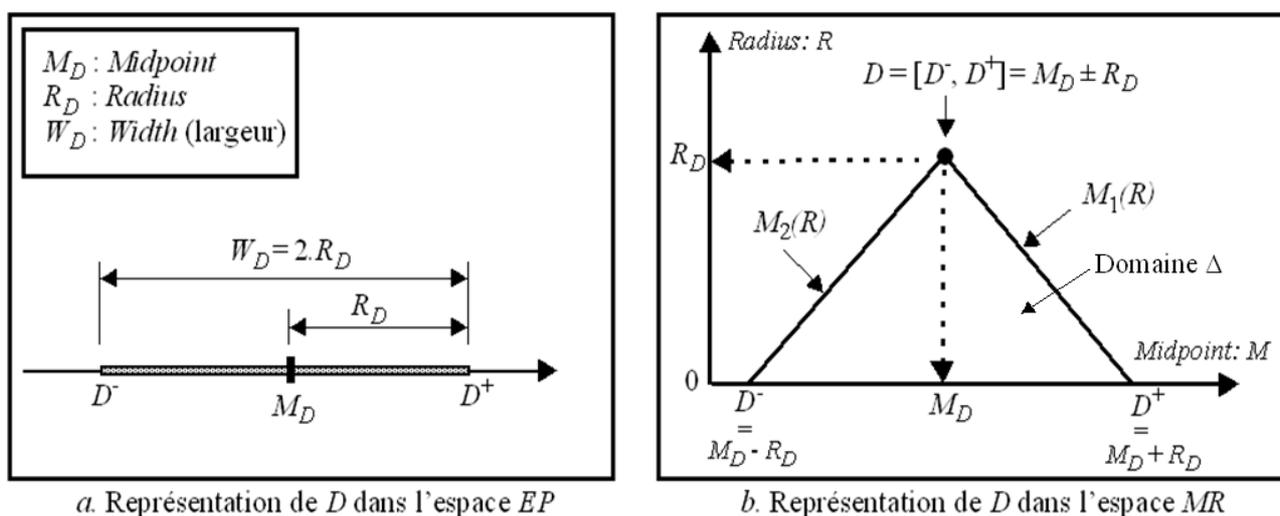


Figure 54 : Représentation du domaine de définition.

Le domaine de définition est également donné par l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \{(M, R) \in \mathfrak{R}^2 \mid 0 \leq R \leq R_D ; M_2(R) \leq M \leq M_1(R)\} \\ \text{avec : } M_1(R) = M_D - R_D + R ; M_2(R) = M_D + R_D - R \end{array} \right.$$

L'élément le plus imprécis du domaine de définition est l'intervalle  $D$  lui-même (Radius maximal), c'est-à-dire le sommet du triangle symbolisant ce domaine. La base du triangle correspond à l'ensemble des valeurs précises du domaine de définition. Ce domaine permet donc de considérer aussi bien des entrées imprécises, c'est-à-dire tous les intervalles inclus dans  $D$ , que des entrées précises, c'est-à-dire l'ensemble des réels appartenant à  $D$ .

### 3.2.3 Tendence du modèle

Un deuxième point important en relation avec le manque de représentativité des modèles à base d'intervalles concerne l'imprécision. En effet, le pouvoir expressif de ces modèles arithmétiques reste limité vis-à-vis de la tendance variable de l'imprécision. Par exemple, dans le cas du modèle (27) où l'entrée  $x$  est considérée comme précise, le Radius de l'intervalle de sortie ne peut que croître (resp. décroître) avec  $x$  si  $x$  est positif (resp. négatif). A titre illustratif, les deux sous-systèmes imprécis (quadrants  $x$  positif et  $x$  négatif) de la figure 55 ne sont pas représentables par de simples

modèles à base d'intervalles. En effet, pour une entrée précise  $x$ , l'expression du Radius de la sortie donnée par l'équation suivante ne peut qu'augmenter.

$$R_{y(x)} = R_{a_0} + R_{a_1} \cdot x = R_{a_0} + |x| \cdot R_{a_1} \text{ et } \frac{dR_{y(x)}}{dx} = R_{a_1} \cdot \text{sign}(x)$$

Cette constatation est en concordance avec les nombreuses critiques de l'approche possibiliste, notamment lorsque l'inclusion des sorties dans les prédictions est requise (approche englobante). En effet, la tendance croissante du Radius de la sortie impose l'obtention d'un modèle identifié trop imprécis. Si l'on analyse les arguments donnés dans la littérature en illustration de cette critique, ils correspondent la plupart du temps aux cas de la figure 55.a où le modèle recherché n'est pas représentable par un modèle arithmétique imprécis à base d'intervalles. En effet, l'identification aboutit à un modèle dont la largeur de l'intervalle de sortie est constante. Ce problème est représenté dans la figure 55.b, pour le cas de deux données d'identification (entrée précise, sortie imprécise) de chaque sous-modèle.

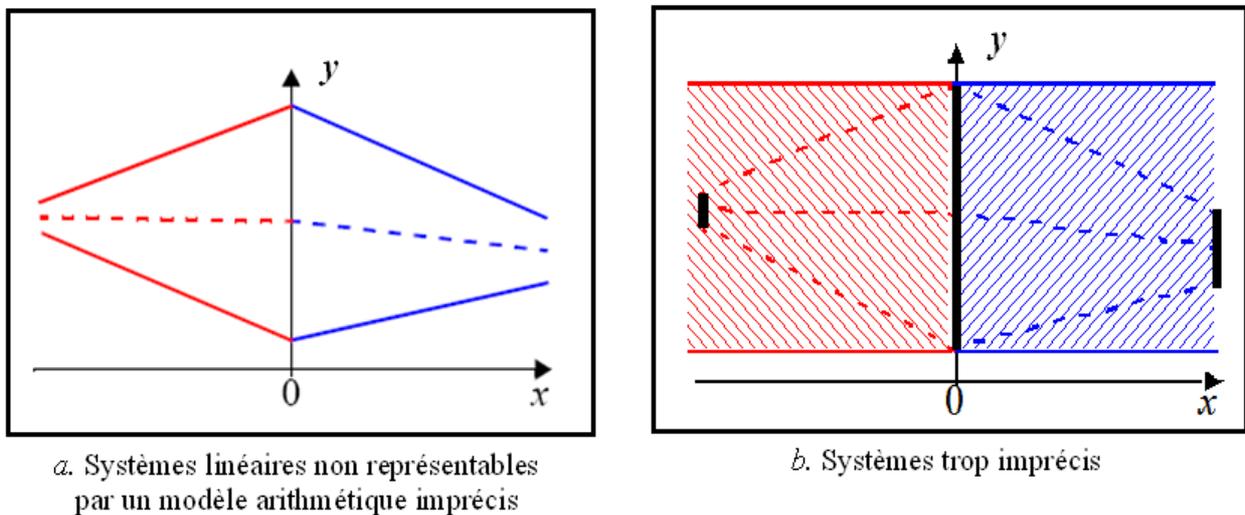


Figure 55 : Modèles linéaires par morceaux imprécis.

Afin de remédier à ce problème, nous avons proposé l'introduction d'un paramètre de réglage dans le modèle afin de pouvoir modifier la tendance imprécise (le Radius) de la sortie [11][12][13][19]. Dans le cas d'une entrée précise, le modèle (27) devient alors :

$$y(x) = a_0 + a_1 \times (x - \text{shift}) \Rightarrow y(w) = a_0 + a_1 \times w \text{ et } : \frac{dR_{y(x)}}{dx} = R_{a_1} \cdot \text{sign}(x - \text{shift})$$

Dans ce cas, en agissant sur le paramètre de décalage "*shift*", il est possible de modifier la tendance de  $R_y$ . En effet :

- si  $x - \text{shift} \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{D}$  i.e.  $\text{shift} \leq D^-$ , alors le Radius de  $y$  est croissant sur  $\mathbf{D}$ ;
- si  $x - \text{shift} \leq 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{D}$  i.e.  $\text{shift} \geq D^+$ , alors le Radius de  $y$  est décroissant sur  $\mathbf{D}$ .

En résumé, le choix du paramètre *shift* est donné dans le tableau 9.

Le choix du paramètre de décalage doit être réalisé de sorte que la sortie du modèle puisse représenter au mieux la variation de l'imprécision sur l'ensemble des sorties observées. Une procédure automatique du choix de ce paramètre a été proposée dans [13] en fonction de la tendance des données observées. Dans le cas des entrées sous forme d'intervalles (entrées imprécises), la

méthodologie proposée reste valide et peut s'appliquer en exploitant le même raisonnement [12][13][19].

<i>Variation du radius de la sortie</i>	$\nearrow$	$\searrow$
<i>Modèle</i>	$a_0 + a_1 \times (x - D^-)$	$a_0 + a_1 \times (x - D^+)$

Tableau 9 : Représentation d'un modèle d'ordre 1 selon la variation du Radius.

### 3.2.4 Approche possibiliste

Une approche de régression possibiliste vise à déterminer les paramètres du modèle de sorte que les données observées soient incluses dans les sorties prédites par le modèle. Cette régression revient à un problème d'optimisation sous contraintes [11][12][13].

Dans notre approche et contrairement à la majorité des méthodes proposées dans la littérature, l'imprécision du modèle n'est pas considérée comme la somme des imprécisions de la sortie évaluée en chacune des entrées observées et/ou la somme des imprécisions des paramètres du modèle; mais comme l'intégration de l'imprécision sur l'ensemble des entrées possibles (domaine de définition des entrées). Ce principe s'affranchit de la dépendance du critère d'optimisation au nombre de données, de leur répartition et de la présence de données redondantes. Cette méthodologie de conception présente et favorise une certaine robustesse de la méthode de régression [12][13]. Dans ce cadre, le modèle obtenu est considéré comme le meilleur au sens de son imprécision globale sur son domaine de définition. Les justifications détaillées de cette approche sont explicitées dans la thèse de Bissierier [13].

Sur un plan pratique, deux points importants ont été considérés dans l'implémentation de la méthode, à savoir :

- les contraintes : afin de s'assurer que toutes les données observées sont incluses dans les sorties  $y_j$  prédites par le modèle, les contraintes d'inclusion suivantes doivent être respectées :

$$y_j^{obs} \subseteq y_j \Leftrightarrow \left| M_{y_j} - M_{y_j^{obs}} \right| \leq R_{y_j} - R_{y_j^{obs}}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, K \quad (28)$$

De plus, l'identification d'intervalles propres pour les paramètres du modèle exige que le Radius de chaque paramètre soit positif. Cette condition impose des contraintes supplémentaires sur les paramètres :

$$R_{a_0} \geq 0 \quad \text{et} \quad \dots \quad \text{et} \quad R_{a_n} \geq 0 \quad (29)$$

- le critère d'optimisation : ce critère a pour objectif d'identifier le modèle le moins imprécis possible sur son domaine de définition [13][19]. En effet, pour déterminer le critère d'optimisation associé au modèle, l'imprécision de sa sortie (son Radius) est intégrée sur l'ensemble du domaine de définition. Dans ce cas, le critère à optimiser est formulé par l'équation suivante :

$$J = \iint_{\Delta} (y^+(x) - y^-(x)) dM_x dR_x = 2 \iint_{\Delta} R_{y(x)} dM_x dR_x \quad (30)$$

Nous avons démontré dans [12][13] que sous la condition de connaissance des signes des paramètres du modèle, ce critère était linéaire. Dans le cas contraire, le critère est non linéaire. Dans ce cadre, des méthodes d'optimisation non linéaires sont employées.

Il est important de noter ici que la connaissance des signes des paramètres peut simplifier l'écriture du critère d'optimisation. Par exemple, dans le cas particulier du modèle d'ordre 1 donné par (27) où le signe du paramètre  $a_1$  est supposé positif, le critère d'optimisation peut se réduire à [13] :

$$J = R_{a_0} + M_{\Delta} \cdot R_{a_1} + (1/3) \cdot R_{\Delta} \cdot M_{a_1}$$

D'une manière générale, la régression paramétrique possibiliste est énoncée par le problème suivant d'optimisation sous contraintes :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{a_0, \dots, a_n} J &= \iint_{\Delta} (y^+(\mathbf{x}) - y^-(\mathbf{x})) dM_x dR_x = 2 \iint_{\Delta} R_{y(\mathbf{x})} dM_x dR_x & (31) \\ \text{S.C : } y_j^{obs} \subseteq y_j &\Leftrightarrow \left| M_{y_j} - M_{y_j^{obs}} \right| \leq R_{y_j} - R_{y_j^{obs}}, \quad j = 1, \dots, K \\ &\text{et : } R_{a_0} \geq 0 \quad \text{et} \dots \text{et } R_{a_n} \geq 0 \end{aligned}$$

Nous rappelons ici que cette méthodologie d'optimisation reste valable dans les cas particuliers des entrées et sorties précises. Dans ce cas, le  $R_{\Delta}$  est considéré comme nul dans la formalisation du critère d'optimisation (30).

Pour plus de détails sur l'implantation pratique de la régression possibiliste, le lecteur trouvera trois exemples illustratifs en annexe 3. Dans l'illustration 1, une mise en évidence du problème de la tendance de l'imprécision et sa résolution par la méthodologie proposée est exhibée. La pertinence et l'intérêt de la représentation  $MR$  sont clairement dévoilés à travers l'illustration 2. Dans l'illustration 3, la validité de la méthode proposée dans un environnement entrée-sortie précis est discutée.

### 3.2.5 Approche au sens des MC

Dans cette régression, les paramètres du modèle sont identifiés par minimisation d'une distance entre les sorties observées et leurs prédictions. Pour réaliser cet objectif, la distance de Diamond [41][58][93][94] entre intervalles a été exploitée. Cette distance est donnée dans le cas de deux intervalles  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  par l'expression suivante :

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^- - b^-)^2 + (a^+ - b^+)^2 = 2((M_a - M_b)^2 + (R_a - R_b)^2) \quad (32)$$

En considérant les sorties observées et celles produites par le modèle, le critère d'optimisation est alors formulé comme suit :

$$J = \sum_{j=1}^K (M_{y_j} - M_{y_j^{obs}})^2 + (R_{y_j} - R_{y_j^{obs}})^2 \quad (33)$$

D'une manière évidente, comme aucune propriété d'inclusion possibiliste n'est requise dans cette approche, les contraintes d'inclusion entre sorties prédites et observées sont relaxées. Toutefois, les contraintes de la positivité des Radius (obtention des intervalles propres) des paramètres du modèle restent nécessaires.

La régression par intervalles au sens des MC est alors posée par le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{a_0, \dots, a_n} J &= \sum_{j=1}^K (M_{y_j} - M_{y_j^{obs}})^2 + (R_{y_j} - R_{y_j^{obs}})^2 \\ \text{S.C : } R_{a_0} &\geq 0 \quad \text{et} \dots \text{et} \quad R_{a_n} \geq 0 \end{aligned}$$

La faisabilité et la performance de la régression au sens des MC est exhibées en annexe 3 à travers l'illustration 6.

## 3.2.6 Améliorations et extensions

### 3.2.6.1 Régression linéaire par morceaux

Si un modèle linéaire permet de représenter une quelconque tendance des sorties, il est tributaire de sa simplicité et il peut difficilement représenter des situations réelles où les données expérimentales sont complexes et rarement parfaitement linéaires. Afin de remédier à ce problème, il est possible de conserver cette philosophie et chercher à identifier non pas un modèle unique mais une collection de sous-modèles linéaires. Cette stratégie conduit à une régression multi-modèles ou encore une régression linéaire par morceaux.

A titre d'exemple, le modèle linéaire (27) est reformulé selon une vision multi-modèles sous la forme suivante :

$$y = \bigcup_{k=1}^{k=N_c} (\mathbf{a}_{0k} + \mathbf{a}_{1k} \times \mathbf{x}) ; \text{ définie sur : } \Delta = \bigcup_{k=1}^{k=N_c} \Delta_k$$

où  $N_c$  est le nombre de sous-modèles mutuellement exclusifs. Chaque sous-modèle est défini sur son domaine  $\Delta_k$ , déterminé à partir des données observées.

Le problème de la régression multi-modèles se décompose alors en deux phases. L'identification de la structure et l'estimation des paramètres de chaque sous-modèle. La première phase consiste à déterminer le nombre de sous-modèles et leurs domaines de définition. Cette tâche peut être réalisée selon une méthode de segmentation et/ou de classification afin de regrouper les intervalles observés semblables dans différentes classes. En d'autres termes, chaque classe est associée à un modèle linéaire dont le domaine de définition est déterminé. Une réflexion sur ce problème est détaillée dans [13]. Dans cet environnement de classification non supervisée, plusieurs techniques ont été développées dans la littérature. Naturellement, n'importe quelle méthode peut être appliquée pour résoudre ce problème d'identification de structure. Cependant, la qualité de l'identification dépendra de la méthode de classification employée. Considérons la disponibilité d'une méthode de classification, le problème de régression est réduit à un problème d'estimation paramétrique pour chaque sous-modèle, selon la méthodologie proposée précédemment.

La confrontation de notre approche de régression dans un contexte multi-modèles avec des données complexes est explicitée dans l'illustration 4 de l'annexe 3.

### 3.2.6.2 Régression multi-entrées

L'approche de régression proposée pour le cas mono-entrée a été généralisée au cas multi-entrées [12][13]. Dans ce cadre, un jeu de données sous la forme  $(x_j, y_j^{obs}) ; j = 1, \dots, K$  est nécessaire pour implémenter la méthodologie de régression. Le vecteur d'entrée comporte  $n$  composantes sous forme d'intervalles  $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$ . Chaque entrée  $x_i$  du modèle est définie sur son intervalle  $D_i$ . Par exemple, le modèle à identifier dans un cas linéaire peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \times (\mathbf{x}_1 - shift_1) + \dots + \mathbf{a}_n \times (\mathbf{x}_n - shift_n) = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \times (\mathbf{x}_i - shift_i)$$

Ce modèle est défini sur l'intervalle multi-dimensionnel (le pavé)  $\mathbf{D} = \otimes_{i=1}^n D_i$  représentant le produit cartésien de l'ensemble des intervalles de variation de chacune des composantes des entrées. De la même manière que précédemment, le domaine de chaque entrée  $\mathbf{x}_i$  dans l'espace  $MR$  est noté  $\Delta_i$ .

Le critère d'optimisation est une généralisation du critère (30) au cas multi-entrées. En effet, l'imprécision du modèle est définie comme étant l'intégration de la sortie sur l'ensemble des domaines. Dans ce cas, le critère peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_n} (y^+(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - y^-(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)) dM_{x_n} dR_{x_n} \dots dM_{x_1} dR_{x_1} \\
&= 2 \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_n} R_{y(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)} dM_{x_n} dR_{x_n} \dots dM_{x_1} dR_{x_1}
\end{aligned}$$

Les contraintes d'optimisation en termes d'inclusion et de positivité des Radius données respectivement par les équations (28) et (29) restent inchangées. La seule différence réside dans le remplacement de la sortie du modèle mono-entrée par celle produite par le modèle multi-entrées. L'illustration 3 de l'annexe 3 présente un cas d'application de la régression multi-entrées dans un contexte de données précises. Des applications plus conséquentes ont été développées dans [13].

### 3.2.6.3 Régression polynomiale

Bien que la méthode proposée reste valable pour tout type de modèle linéaire et/ou multilinéaire, son exploitation dans le cas polynomial mérite d'être mentionnée. Dans ce cas, la forme du modèle de régression est donnée par l'équation suivante [12][13]:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \times (\mathbf{x} - shift) + \dots + \mathbf{a}_n \times (\mathbf{x}^n - shift^n) = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \times (\mathbf{x}^i - shift^i)$$

Ce modèle SISO (mono-entrée, mono-sortie) peut être vu comme un modèle MISO (multi-entrées, mono-sortie). Dans ce cadre, la méthode proposée dans le cas mutli-entrées s'applique naturellement dans la mesure où le modèle reste linéaire en les paramètres.

La régression polynomiale peut représenter une bonne alternative dans le cas où la structure du modèle n'est pas connue. En effet, à partir d'un jeu de données imprécises, il est possible de comparer des modèles d'ordre différent afin de sélectionner le modèle le plus adéquat. Nous disposons dans la littérature relative à la théorie de l'information de quelques méthodes capables de quantifier *a posteriori* la performance d'un modèle et sa complexité. Ainsi, une fonction de coût est souvent définie pour intégrer le critère associé à l'identification du modèle et une fonction exhibant sa complexité et pénalisant les ordres élevés. Dans nos travaux, nous avons exploité les méthodes d'Akaike (critère d'information AIC) [1] et de Rissanen (critère de longueur de description minimum MDL) [165] pour identifier l'ordre optimal d'un modèle polynomial imprécis. Les deux fonctions de coût associées aux deux critères sont données par :

$$Coût_{AIC}(J(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), n, K) = K \cdot \ln(J(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) + 2 \cdot n : \text{Critère d' Akaike}$$

$$Coût_{MDL}(J(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), n, K) = \ln(J(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) + (n / K) \cdot \ln(K) : \text{Critère de Rissanen}$$

où  $J$  représente le critère à optimiser et  $n$  et  $K$  sont respectivement l'ordre du modèle et le nombre de données utilisées dans le problème de régression. L'ordre optimal du modèle correspond à celui pour lequel le critère passe par un minimum. Les deux méthodes donnent souvent des résultats comparables. Toutefois, la technique d'Akaike [1] a tendance à sur-dimensionner l'ordre du modèle par rapport à celle de Rissanen [165]. Il est important de noter ici qu'une augmentation importante de l'ordre du modèle polynomial peut conduire à des oscillations de la sortie et détériorer ainsi la performance de la régression (phénomène assez connu dans l'interpolation polynomiale).

Afin de mieux cerner l'enjeu de cette régression polynomiale, deux illustrations sont détaillées en annexe 3, l'une dans un contexte possibiliste (illustration 5) et l'autre au sens des MC (illustration 6).

## 3.3 Régression à base d'intervalles graduels

D'une manière générale, dans un contexte imprécis et incertain, la régression graduelle trouve ses racines et ses justifications à travers :

- la présence d'informations subjectives sous forme de distributions de possibilité, énoncées par des experts sur le comportement entrée-sortie d'un système;
- l'instanciation de mesures précises à leurs intervalles d'appartenance, auxquels des degrés de confiance et/ou de certitude sont associés.

D'une manière globale, la régression graduelle est une généralisation de la régression par intervalles où la dimension verticale représentant l'incertitude est intégrée dans le problème d'optimisation.

### 3.3.1 Régression possibiliste

Dans ce cas, le critère proposé pour des intervalles est généralisé pour le cas graduel. Le critère s'écrit alors comme suit :

$$J = \iint_{\Delta} \int_{\lambda} (y^+(x(\lambda)) - y^-(x(\lambda))) dM_{x(\lambda)} dR_{x(\lambda)} d\lambda = 2 \iint_{\Delta} \int_{\lambda} R_{y(x(\lambda))} dM_{x(\lambda)} dR_{x(\lambda)} d\lambda$$

Les contraintes d'inclusion dans le problème d'optimisation doivent être respectées sur les intervalles graduels :

$$\forall \lambda \in [0,1]; \mathbf{y}_j^{obs}(\lambda) \subseteq \mathbf{y}_j(\lambda) \Leftrightarrow \left| M_{y_j(\lambda)} - M_{y_j^{obs}(\lambda)} \right| \leq R_{y_j(\lambda)} - R_{y_j^{obs}(\lambda)} ; j = 1, \dots, K$$

Afin d'obtenir des intervalles graduels propres, les contraintes de positivité du Radius des paramètres sont également imposées. Dans ce contexte, le problème de régression possibiliste graduelle est donné par le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{a_0(\lambda), \dots, a_n(\lambda)} J &= \iint_{\Delta} \int_{\lambda} R_{y(x(\lambda))} dM_{x(\lambda)} dR_{x(\lambda)} d\lambda \\ \text{S.C : } \forall \lambda \in [0,1]; \mathbf{y}_j^{obs}(\lambda) &\subseteq \mathbf{y}_j(\lambda) \Leftrightarrow \left| M_{y_j(\lambda)} - M_{y_j^{obs}(\lambda)} \right| \leq R_{y_j(\lambda)} - R_{y_j^{obs}(\lambda)} ; j = 1, \dots, K \\ \text{et : } R_{a_0(\lambda)} &\geq 0 \text{ et } \dots \text{et } R_{a_n(\lambda)} \geq 0 \end{aligned}$$

D'une manière générale, ce problème d'optimisation est difficilement solvable dans un contexte numérique. En pratique, cette régression est traitée *via* une vision intervalliste en discrétisant la dimension verticale. Dans ce contexte, pour un ensemble de  $m$  données où la  $i^{\text{ième}}$  donnée est représentée par le triplet  $(\lambda_i, x(\lambda_i), y(\lambda_i))$ ,  $i = 1, \dots, m$ , le problème de régression est vu comme un problème de régression avec des données de type intervalles. Dans ce cas, pour chaque degré  $\lambda_i$  le problème d'optimisation (31) est résolu, *i.e.* :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{a_0(\lambda_i), \dots, a_n(\lambda_i)} J &= \iint_{\Delta(\lambda_i)} R_{y(x(\lambda_i))} dM_{x(\lambda_i)} dR_{x(\lambda_i)} \\ \text{S.C : } \mathbf{y}_j^{obs}(\lambda_i) &\subseteq \mathbf{y}_j(\lambda_i) \Leftrightarrow \left| M_{y_j(\lambda_i)} - M_{y_j^{obs}(\lambda_i)} \right| \leq R_{y_j(\lambda_i)} - R_{y_j^{obs}(\lambda_i)} ; j = 1, \dots, K \\ R_{a_0(\lambda_i)} &\geq 0 \text{ et } \dots \text{et } R_{a_n(\lambda_i)} \geq 0 \end{aligned}$$

Si des distributions de possibilité sont exigées pour les paramètres estimés, des contraintes supplémentaires de monotonie sont introduites dans le problème d'optimisation. En effet, pour qu'un paramètre graduel  $\mathbf{a}(\lambda)$  soit monotone, il faut :

$$\text{pour } i = 1, \dots, m : \forall \lambda_{i+1} \geq \lambda_i : \mathbf{a}(\lambda_{i+1}) \subseteq \mathbf{a}(\lambda_i) \Leftrightarrow \left| M_{a(\lambda_i)} - M_{a(\lambda_{i+1})} \right| \leq R_{a(\lambda_i)} - R_{a(\lambda_{i+1})}$$

Dans l'implantation de la technique de régression proposée quelques points importants sont à considérer.

- Il est clair que l'obtention d'un résultat satisfaisant requiert l'utilisation d'un pas de discrétisation suffisamment faible sur  $\lambda$ , ce qui conduit donc à un temps d'optimisation relativement élevé. Un compromis entre le temps de calcul et la qualité de l'approximation doit être réalisé.
- Les contraintes d'obtention des paramètres estimés sous formes d'intervalles flous ont comme conséquence une augmentation pessimiste de l'imprécision des paramètres et donc du modèle.
- Dans la littérature, la situation particulière où les entrées sont précises et les sorties observées sont sous forme d'intervalles flous triangulaires ou trapézoïdaux est très largement supposée. Dans ce cas, la précision des entrées induit que les sorties prédites soient aussi triangulaires ou trapézoïdales. Dans cette configuration, nous avons démontré dans [11][12][13] que le critère d'optimisation était équivalent à une intégration de l'aire du trapèze (les niveaux 0 et 1) de la sortie du modèle sur l'intervalle  $\mathbf{D} = [D^-, D^+]$ , i.e. :

$$J = \int_{D^-}^{D^+} \text{aire}(y(x(\lambda)))dx = \int_{D^-}^{D^+} (R_{y(x(0))} + R_{y(x(1))})dx$$

Dans ce contexte, les contraintes d'inclusion dans le problème d'optimisation peuvent être limitées aux contraintes d'inclusion aux niveaux  $\lambda=0$  et  $\lambda=1$ . En effet,

$$\forall \lambda \in [0,1]; \mathbf{y}_j^{obs}(\lambda) \subseteq \mathbf{y}_j(\lambda); \text{ ssi : } \begin{cases} \mathbf{y}_j^{obs}(0) \subseteq \mathbf{y}_j(0) \Leftrightarrow \left| M_{y_j(0)} - M_{y_j^{obs}(0)} \right| \leq R_{y_j(0)} - R_{y_j^{obs}(0)} \\ \mathbf{y}_j^{obs}(1) \subseteq \mathbf{y}_j(1) \Leftrightarrow \left| M_{y_j(1)} - M_{y_j^{obs}(1)} \right| \leq R_{y_j(1)} - R_{y_j^{obs}(1)} \end{cases} ; j=1, \dots, K$$

Des contraintes supplémentaires d'inclusion du niveau  $\lambda = 1$  dans le niveau  $\lambda = 0$  sont également nécessaires pour l'obtention des intervalles graduels (flous) trapézoïdaux [11][12][13] :

$$\mathbf{y}_j(0) \subseteq \mathbf{y}_j(1) \Leftrightarrow \left| M_{y_j(1)} - M_{y_j(0)} \right| \leq R_{y_j(1)} - R_{y_j(0)} ; j = 1, \dots, K$$

Bien évidemment, les contraintes de positivité des Radius des paramètres à identifier sont également intégrées.

Dans un contexte applicatif, deux illustrations de la construction d'un modèle graduel possibiliste sont détaillées en annexe 3. Dans l'illustration 7, les informations sont considérées comme des mesures précises, issues d'une expérience, auxquelles des incertitudes subjectives ont été associées. Quant à l'illustration 8, elle exploite de données subjectives fournies par un expert.

### 3.3.2 Régression au sens des MC

La généralisation de la distance de Diamond [41] entre deux intervalles au cas graduel peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D(\mathbf{a}(\lambda), \mathbf{b}(\lambda)) = (a^-(\lambda) - b^-(\lambda))^2 + (a^+(\lambda) - b^+(\lambda))^2 = 2((M_a(\lambda) - M_b(\lambda))^2 + (R_a(\lambda) - R_b(\lambda))^2) \quad (34)$$

Dans ce cas de régression par MC, le critère d'optimisation est donné par :

$$J = \sum_{j=1}^K (M_{y_j}(\lambda) - M_{y_j^{obs}}(\lambda))^2 + (R_{y_j}(\lambda) - R_{y_j^{obs}}(\lambda))^2 \quad (35)$$

Comme discuté précédemment, les contraintes d'inclusion sont relaxées. Toutefois, les contraintes de positivité du Radius des paramètres restent nécessaires.

Le problème d'estimation des paramètres prend la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min}_{a_0(\lambda), \dots, a_n(\lambda)} J = \sum_{i=1}^M (M_{y_j}(\lambda) - M_{y_j^{obs}}(\lambda))^2 + (R_{y_j}(\lambda) - R_{y_j^{obs}}(\lambda))^2$$

$$\text{S.C : } R_{a_0(\lambda)} \geq 0 \quad \text{et} \quad \dots \quad \text{et} \quad R_{a_n(\lambda)} \geq 0$$

Comme dans une approche possibiliste, ce problème est traité *via* une vision intervalliste en discrétisant le degré  $\lambda$ . De manière évidente, si des intervalles flous sont exigés, des contraintes de monotonie sur les paramètres et les sorties du modèle sont introduites dans le problème d'optimisation.

Dans le cas particulier où les entrées sont précises et les sorties sont sous forme d'intervalles flous triangulaires ou trapézoïdaux, la distance (34) exploitée dans le critère d'optimisation se réduit à :

$$J = D(\mathbf{a}(0), \mathbf{b}(0)) + D(\mathbf{a}(1), \mathbf{b}(1))$$

Le lecteur intéressé trouvera dans l'illustration 9 de l'annexe 3, un exemple de construction d'un modèle graduel au sens des MC à partir d'un ensemble d'informations subjectives.

### 3.4 Contrôle Graduel

#### 3.4.1 Contrôle graduel indirect

Habituellement, l'objectif d'une loi de commande consiste à forcer la sortie d'un système à suivre une trajectoire désirée précise. En d'autres termes, la finalité est de déterminer un contrôleur qui garantit que la sortie du système converge vers cette trajectoire désirée. En raison de la présence d'imprécisions et d'incertitudes d'une part et de la flexibilité du modèle d'autre part, l'objectif de commande peut être vu comme la conception d'un contrôleur graduel capable de maintenir la sortie de système dans une enveloppe de tolérance imposée par une préférence sur la trajectoire de référence graduelle. En effet, puisque nous sommes concernés par des systèmes en boucle fermée, supposer que les paramètres du système sont des intervalles graduels mène naturellement à considérer que la trajectoire de référence devrait également être graduelle [18][22]. Il est important de noter ici que la stratégie proposée vise la détermination, pour un degré de préférence  $\lambda$  sur la trajectoire de référence, l'intervalle de toutes les valeurs possibles pour la commande (enveloppe de tolérance pour la commande). D'ailleurs, quand ce degré  $\lambda$  est spécifié, le système commandé est regardé comme système à base d'intervalles conventionnels. Dans ce cas, n'importe quelle commande précise choisie dans l'intervalle de commande garantit que la sortie précise du système évoluera dans l'enveloppe de tolérance de la trajectoire désirée. Ainsi, la stabilité entrée-sortie de la structure de commande est assurée.

Une trajectoire graduelle peut être considérée comme l'objectif graduel à atteindre. Par exemple, quand on veut suivre une voiture avec une distance de sécurité, on spécifiera plutôt la trajectoire désirée comme une expression graduelle, par exemple "environ 100 m". On la représente alors par un intervalle graduel triangulaire  $\mathbf{r}_k(\lambda) = (100, 20-20.\lambda)$  plutôt qu'une distance précise. Dans ce cas, pour un degré de préférence  $\lambda$  sur cette trajectoire, l'objectif de commande est de maintenir la sortie du système (la distance de sécurité) dans une enveloppe de tolérance (intervalle de tolérance) autour de 100 et délimitée par le Radius de  $\mathbf{r}_k(\lambda)$ . L'intervalle obtenu est l'ensemble de toutes les trajectoires précises satisfaisant l'objectif de commande au moins avec un degré de préférence de  $\lambda$ . De plus, le  $\mathbf{r}_k(0) = (100, 20)$  est l'ensemble des trajectoires avec une préférence égale à 0 (la moins préférée). Dans le même temps,  $\mathbf{r}_k(1) = 100$  est la trajectoire la plus préférée. Le complément du  $\mathbf{r}_k(0)$  est l'ensemble des trajectoires interdites.

Pour des raisons de simplicité, le principe du contrôle graduel est illustré sur un système linéaire. Considérons alors un système SISO, stable et inversible, dont la représentation entrée-sortie est donnée par l'équation dynamique suivante :

$$\mathbf{y}_{k+1}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i(\lambda) \times \mathbf{y}_{k-i+1}(\lambda) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{b}_j(\lambda) \times \mathbf{u}_{k-j}(\lambda); m \leq n \quad (36)$$

où  $\mathbf{y}_k(\lambda)$  est la sortie du système,  $\mathbf{u}_k(\lambda)$  est son entrée et les paramètres  $\mathbf{a}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mathbf{b}_j(\lambda)$ ,  $j = 0, \dots, m - 1$  sont représentés par des intervalles graduels. Pour simplifier les notations, l'équation (36) est reformulée comme suit :

$$\mathbf{y}_{k+1}(\lambda) = \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda) + \mathbf{b}_0(\lambda) \times \mathbf{u}_k(\lambda); \text{ avec : } \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i(\lambda) \times \mathbf{y}_{k-i+1}(\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} \mathbf{b}_j(\lambda) \times \mathbf{u}_{k-j}(\lambda) \quad (37)$$

Du point de vue théorique, si le système (36) est inversible ( $0 \notin \mathbf{u}_k(\lambda)$ ), alors son inverse peut être déterminée par inversion analytique. Dans ce cas, la sortie du système est remplacée par la trajectoire graduelle :

$$\mathbf{u}_k(\lambda) = (\mathbf{r}_{k+1}(\lambda) - \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda)) / \mathbf{b}_0(\lambda) \quad (38)$$

Dans ce contexte, l'intervalle  $\mathbf{u}_k(\lambda)$  représente l'ensemble des solutions  $u_k$  telles que :

$$\boldsymbol{\Psi}_k(\lambda) + \mathbf{b}_0(\lambda) \times u_k \subseteq \mathbf{r}_{k+1}(\lambda)$$

Autrement dit,  $\mathbf{u}_k(\lambda)$  représente l'ensemble de toutes les commandes garantissant que  $\boldsymbol{\Psi}_k(\lambda) + \mathbf{b}_0(\lambda) \times u_k$  reste dans la zone délimitée par le Radius de la trajectoire de référence  $\mathbf{r}_{k+1}(\lambda)$ .

Par la substitution de l'équation (38) dans (37) on obtient :

$$\mathbf{y}_{k+1}(\lambda) = \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda) + \mathbf{b}_0(\lambda) \times \mathbf{u}_k(\lambda) = \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda) + \mathbf{b}_0(\lambda) \times (\mathbf{r}_{k+1}(\lambda) - \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda)) / \mathbf{b}_0(\lambda)$$

Par exploitation des opérations inverses exactes dans un contexte graduel, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}(\lambda) &= \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda) + \delta_{b_0}(\lambda) \times \mathbf{b}_0(\lambda) \times \text{dual}(\mathbf{b}_0(\lambda)) \times (\mathbf{r}_{k+1}(\lambda) - \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda)) \\ &= \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda) + \delta_{b_0}(\lambda) \times (1/\delta_{b_0}(\lambda), 0) \times (\mathbf{r}_{k+1}(\lambda) - \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda)) \\ &= \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda) + (\mathbf{r}_{k+1}(\lambda) - \boldsymbol{\Psi}_k(\lambda)) = \mathbf{r}_{k+1}(\lambda) \end{aligned}$$

D'une manière évidente, la sortie du système suit naturellement la trajectoire graduelle. Ainsi, pour un degré de préférence  $\lambda = \lambda_i$  sur la trajectoire, n'importe quelle entrée précise  $u_k$  dans l'intervalle de la commande  $\mathbf{u}_k(\lambda_i)$  assure que la sortie précise  $y_k \in \mathbf{y}_k(\lambda_i)$  du système restera dans la trajectoire de référence.

Dans ce contexte, l'imprécision de  $y_k$  est donnée par son intervalle de vraisemblance  $\mathbf{y}_k(\lambda_i)$ . Son incertitude est alors quantifiée par des mesures de possibilité et de nécessité et/ou des mesures de croyance et de plausibilité.

La structure de commande est illustrée dans la figure 56 où la trajectoire est supposée représentée par un intervalle graduel monotone (distribution de possibilité). Le contrôleur est directement obtenu par inversion du modèle. Dans ce contexte, choisir un degré de préférence  $\lambda$  sur une trajectoire, revient à imposer au modèle une enveloppe de tolérance avec un degré de certitude ou de nécessité de  $(1-\lambda)$ . En effet, à  $\lambda = 0$ , la trajectoire est la plus imprécise mais la moins préférée en termes de suivi de trajectoire. Cependant, la certitude ou la probabilité pour que l'intervalle de la sortie du système (imposé par le contrôleur) contienne la sortie réelle du procédé est la plus grande (la plus certaine).

Dans le cas où  $\lambda = 1$ , la trajectoire est la plus préférée mais l'enveloppe de sortie est considérée comme la plus incertaine (la plus précise). Les mesures de possibilité et de nécessité conduisent à :

$$N(y_k(\lambda_i)) = 1 - \lambda_i \text{ et } \Pi(y_k(\lambda_i)) = 1.$$

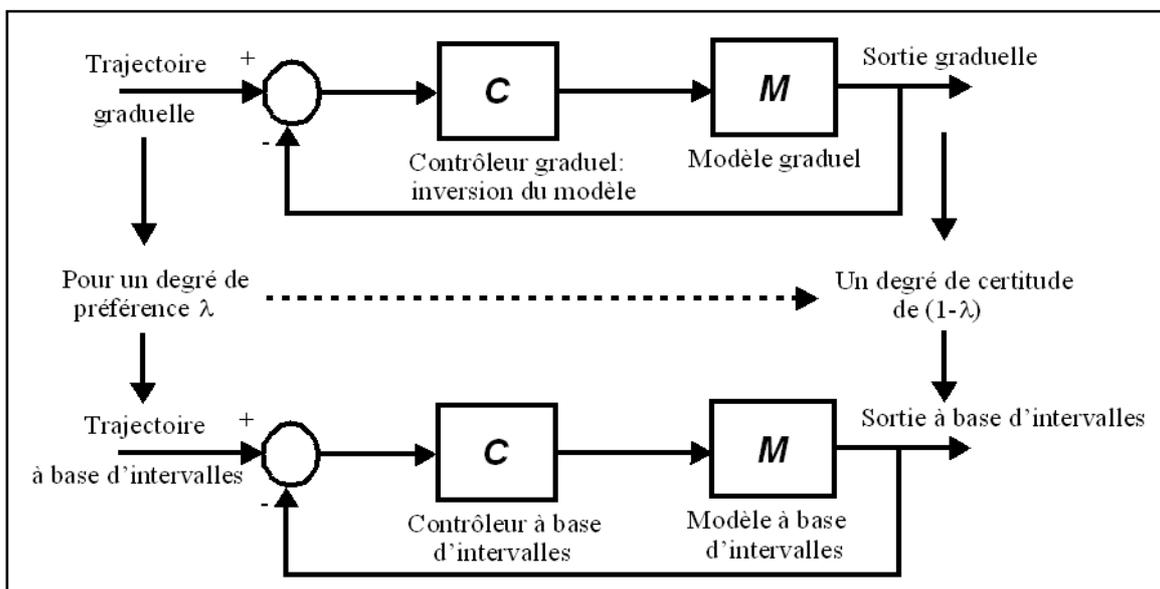


Figure 56 : Principe de la commande graduelle à base de modèles.

Toutefois, si la trajectoire de référence est graduelle pure, l'incertitude est exprimée par un encadrement de la probabilité de  $y_k \in y_k(\lambda_i)$  par des mesures de croyance et de plausibilité, *i.e.* :

$$Bel(y_k(\lambda_i)) \leq Prob(y_k \in y_k(\lambda_i)) \leq PL(y_k(\lambda_i))$$

L'action de commande inverse donnée par (38) est un intervalle graduel propre si la condition suivante est satisfaite [18] :

$$R_{r_{k+1}}(\lambda) \geq R_{\psi_k}(\lambda) + |M_{r_{k+1}}(\lambda) - M_{\psi_k}(\lambda)| \times |RX_{b_0}(\lambda)| \quad (39)$$

L'implantation pratique (cf. figure 57) de cette stratégie exige qu'une valeur de commande précise soit choisie selon une méthode de "défuzzification".

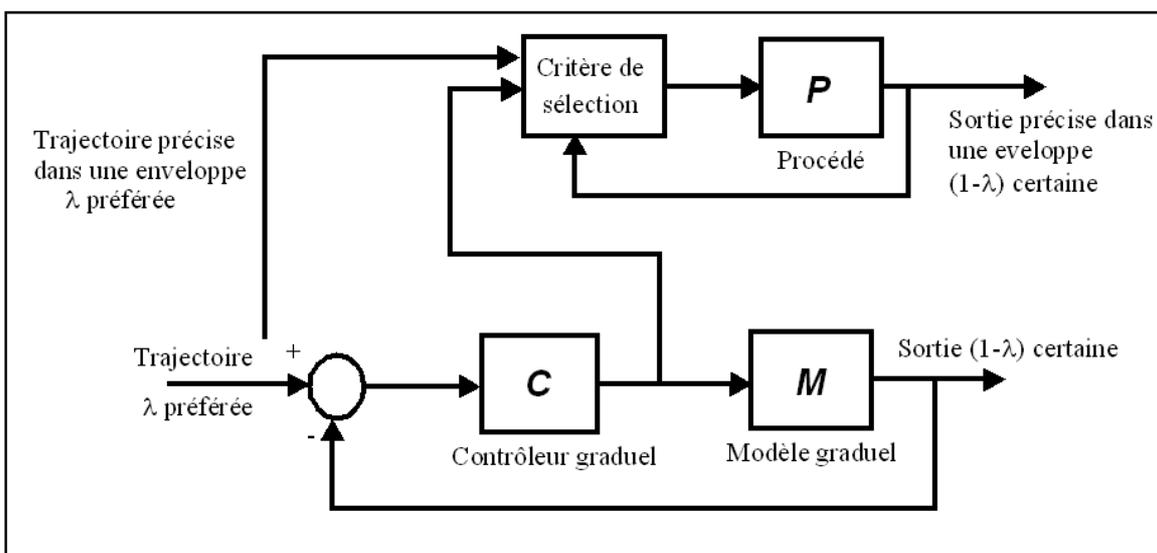


Figure 57 : Mécanisme d'implantation de la commande graduelle.

D'une manière globale, cette commande est choisie dans le sens d'un critère de performance (énergie minimale, suivi optimal, etc.). Il est également possible d'imposer dans le choix des trajectoires admissibles des contraintes de non saturation de la loi de commande [18][22]. Bien que non détaillé ici, les structures de commande à base de modèles flous inverses données dans le chapitre 1 restent applicables dans un contexte graduel.

Afin de mieux cerner la problématique pratique du contrôle graduel, un exemple d'applicabilité de la stratégie proposée est détaillé en annexe 3 (illustration 10).

### **3.4.2 Contrôle graduel direct**

Le contrôle graduel direct trouve sa justification dans l'exploitation des quantités graduelles, représentant les imprécisions et les incertitudes, pour améliorer les performances de la stratégie de commande experte. En d'autres termes, cette partie du document a pour objectif l'amélioration de l'approche directe dans un environnement imprécis et incertain. D'une manière générale, la présence des imprécisions et des incertitudes est due à la complexité des systèmes modernes, aux aléas de fonctionnement aléatoires, aux changements dans les conditions d'observations et à la disponibilité d'informations subjectives et expertes. Dans ce cadre, l'existence au sein d'un même système de multiples parties aux objectifs différents et parfois contradictoires, accroît la difficulté de conception d'une stratégie de contrôle performante.

Deux visions différentes ont été proposées et appliquées dans nos travaux de recherche.

- La première s'apparente à une stratégie multi-modèles (multi-contrôleurs) "classiquement" utilisée dans l'automatique conventionnelle. En effet, afin de conserver le bénéfice de la commande floue experte, un système complexe peut être décomposé en un ensemble de sous-systèmes. Chacun d'entre eux reflète une partie du système et/ou représente une zone (régime) de fonctionnement. A chaque sous-système est assigné un contrôleur flou pour atteindre des performances locales souhaitées. Un organe de niveau supérieur (superviseur) est nécessaire afin de coordonner les contrôleurs locaux, de résoudre les problèmes de conflit et d'assurer des performances globales. Ces dernières sont souvent contradictoires et elles peuvent être spécifiées par des données expertes, par essence imprécises et incertaines.
- La deuxième vision met l'accent sur une autre problématique de contrôle liée à l'insuffisance des appareils de mesure et à leur fiabilité. Ces phénomènes peuvent affecter la décision du système de contrôle et dégrader ses performances. Dans ce cas, l'introduction de nouvelles sources d'informations est une manière judicieuse pour renforcer le comportement du contrôleur et ainsi dissiper ses doutes. Toutefois, ces sources multiples peuvent amener les contrôleurs vers des situations conflictuelles. Pour résoudre ces dernières, nous avons opté pour la synthèse d'un organe supérieur à travers la théorie des fonctions de croyance.

#### **3.4.2.1 Application au pilotage d'un système de production**

Ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse de Tamani [188]. Dans ce contexte, afin de pouvoir coordonner les interactions entre les contrôleurs flous locaux et améliorer la performance globale du système piloté, nous avons proposé d'augmenter la structure de commande distribuée donnée dans le chapitre 1 (cf. figure 11) d'une stratégie de supervision. Cette dernière consistait à augmenter la loi de commande locale par une composante additive, synthétisée selon un mécanisme intégrant un processus décisionnel à base d'objectifs globaux. Ces derniers sont exploités pour exhiber la performance du système global.

Dans ce cadre, une approche basée sur des mécanismes d'agrégation d'objectifs graduels a été proposée pour concevoir l'action du superviseur. Cette dernière, vue comme une composante additive, consiste soit à allouer de la capacité restante, soit à réduire le flux de production au niveau de chaque module de production. La loi de supervision est alors fonction d'une part, de la commande locale (produite par le contrôleur flu) qui renseigne le superviseur sur la capacité restante sur chaque module de production et d'autre part, des performances globales relatives aux objectifs spécifiés.

Pour chaque  $MP(i)$ , le principe du superviseur est résumé dans la figure 58.

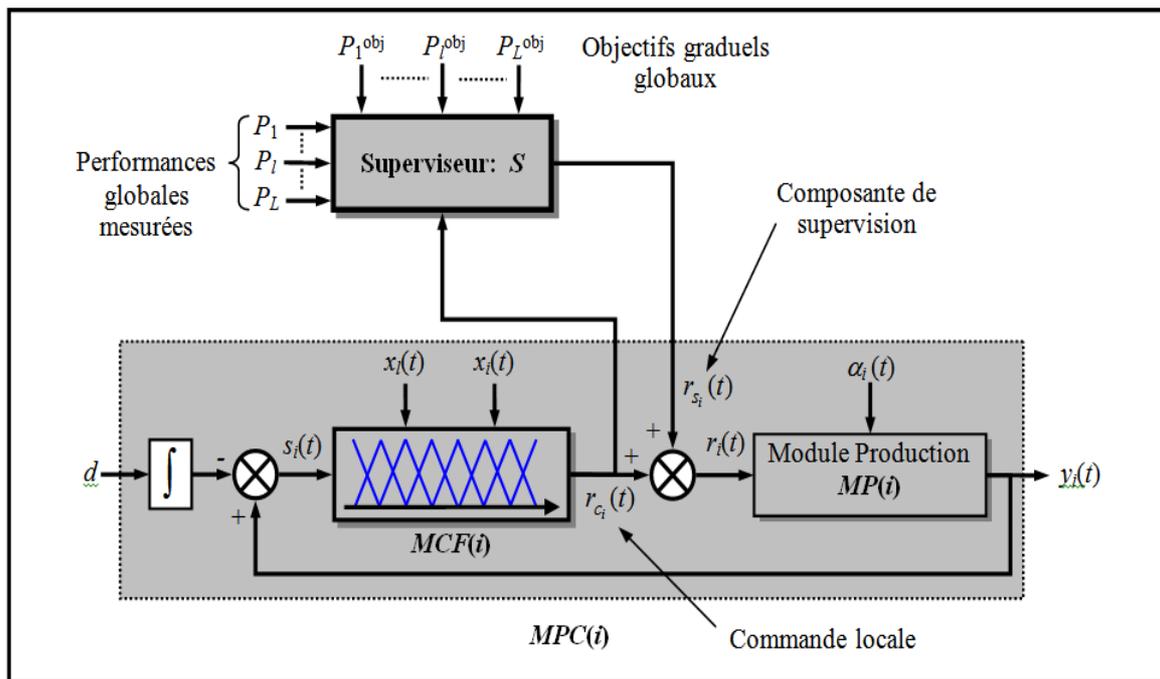


Figure 58 : Principe de fonctionnement du superviseur à base d'objectifs graduels globaux.

La conception du superviseur consiste à formaliser la fonction de supervision  $S$  par un opérateur mathématique d'agrégation. Ce superviseur est capable, à partir d'un ensemble d'indicateurs de performance globaux, de prendre une décision. Cette décision est considérée comme la meilleure au sens d'un compromis, apte à améliorer le fonctionnement du système en cas de dégradation des performances. Deux stratégies ont été développées dans [188], à savoir l'agrégation des objectifs et l'agrégation des actions. Dans ce document, seule la première méthodologie est abordée.

L'insertion de ce superviseur dans le schéma de commande distribuée donné dans le chapitre 1 (cf. figure 11), conduit à l'architecture de contrôle supervisée illustrée dans la figure 59.

Comme indiqué dans la figure 60, la synthèse du superviseur s'articule autour de quatre étapes essentielles.

1. La définition et la représentation des indicateurs de performance  $P_1, \dots, P_L$ . Ces derniers ont souvent un comportement contradictoire et/ou conflictuel. Ils sont capables d'évaluer la performance globale du système contrôlé. Ces indicateurs de performance ont été choisis afin que différentes facettes des performances soient exhibées. Dans ce cadre, trois indicateurs ont été considérés :  $P_1$  (le surplus final moyen),  $P_2$  (le surplus final instantané) et  $P_3$  (l'encours global *WIP - Work-In-Process*). A chaque indicateur  $P_l$  est assigné un objectif  $P_l^{obj}(\lambda)$  représenté par un intervalle graduel comme illustré dans la figure 61.

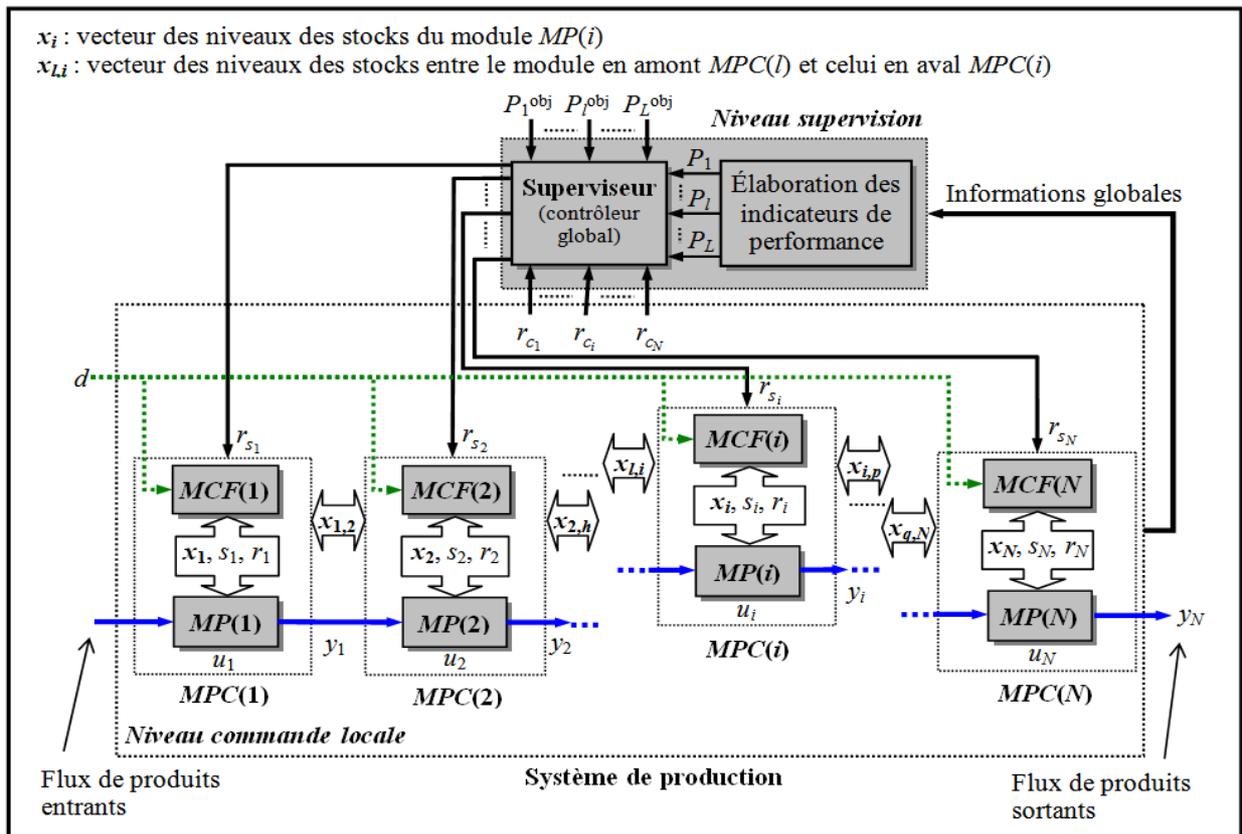


Figure 59 : Architecture de commande supervisée.

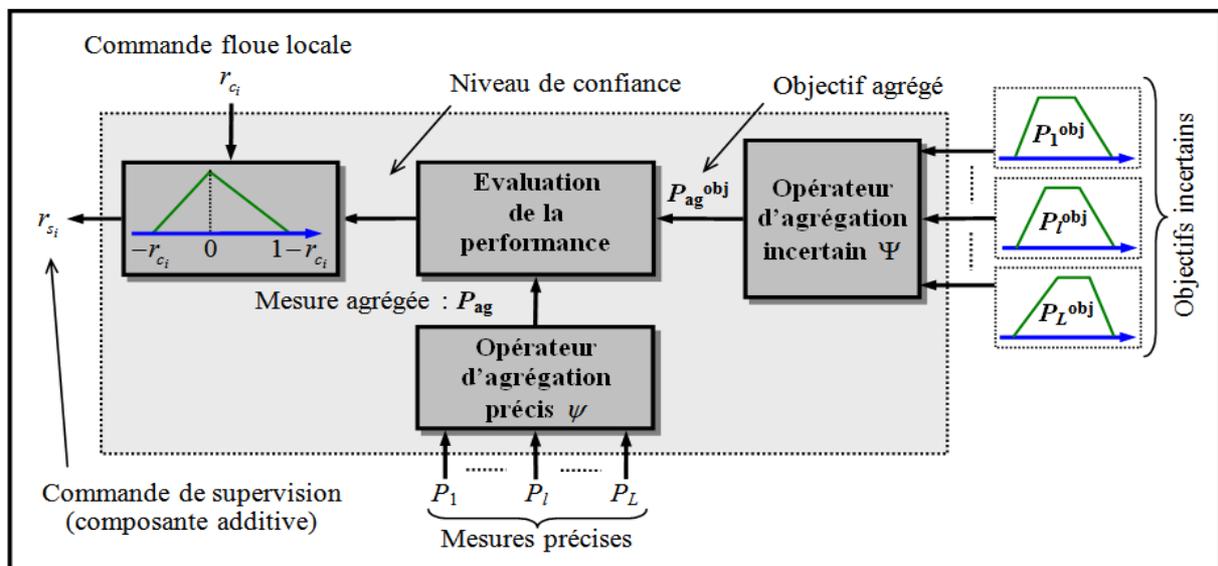


Figure 60 : Principe de conception du superviseur.

- La conception d'un mécanisme d'agrégation capable de combiner les objectifs graduels  $P_1^{obj}, \dots, P_L^{obj}$  à travers un opérateur mathématique  $\Psi$  afin d'élaborer une expression agrégée  $P_{ag}^{obj}$  des objectifs. Dans ce cadre, deux opérateurs ont été exploités à savoir la moyenne arithmétique et l'intégrale de Choquet 2-additive.
- L'agrégation des mesures associées aux indicateurs  $P_1, \dots, P_L$ . Dans ce cas, la mesure agrégée  $P_{ag}$  est calculée *via* un opérateur  $\psi$  considéré comme la version précise de  $\Psi$ .

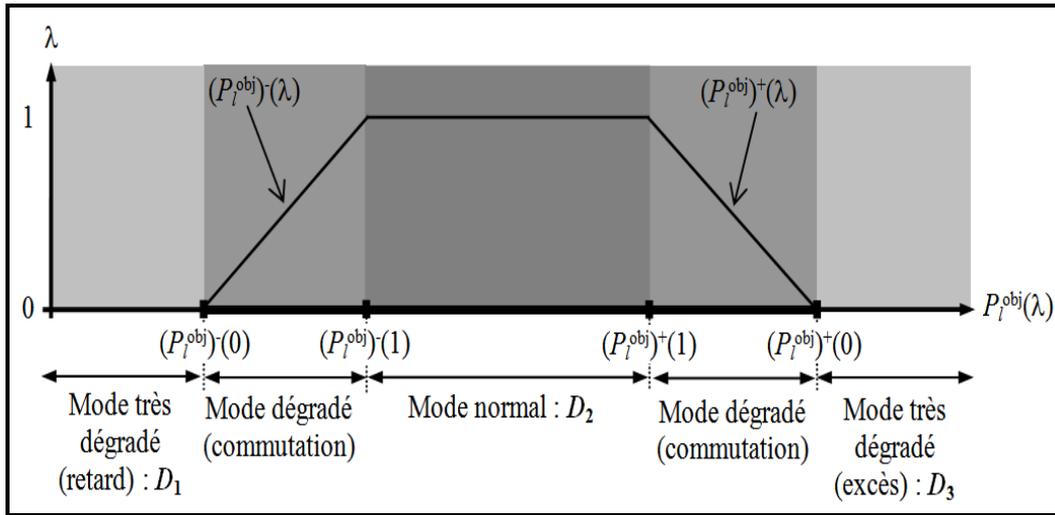


Figure 61 : Représentation graduelle d'un objectif.

4. L'évaluation de la mesure agrégée  $P_{ag}$  par rapport à son objectif graduel  $P_{ag}^{obj}$ . Cette opération revient à déterminer le niveau de confiance de  $P_{ag}$  en relation avec son objectif  $P_{ag}^{obj}$ . Ce niveau est projeté sur un intervalle graduel de sortie (cf. figure 62) représentant le domaine d'action du superviseur. Cette opération vise à déterminer la composante  $r_{s_i}$  du superviseur.

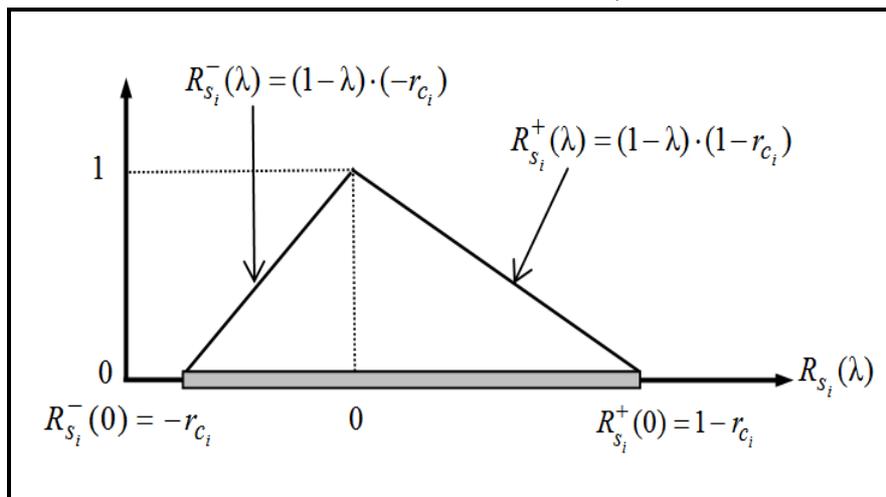


Figure 62 : Intervalle de l'action du superviseur.

A titre d'exemple, l'interaction entre les objectifs agrégés et l'intervalle de sortie du superviseur est donnée dans la figure 63. Pour des raisons de simplicité d'interprétation, l'objectif agrégé est représenté par des profils linéaires. Bien évidemment, ce principe reste valable si les mesures précises sont remplacées par des intervalles imprécis. Dans la figure 63, pour l'intervalle de sortie du superviseur relatif à la confiance considérée, sa borne supérieure peut être choisie pour attribuer une allocation maximale de la capacité.

La validité de cette approche ainsi que d'autres stratégies de supervision sont prouvées dans la thèse de Tamani [188] et dans [184][185] à travers des applications d'envergure sur des systèmes de production plus complexes.

A titre d'illustration, le lecteur trouvera en annexe 3 (illustration 11), les résultats de cette méthodologie sur un système de production mono-entrée composé de 4 machines et 3 stocks intermédiaires.

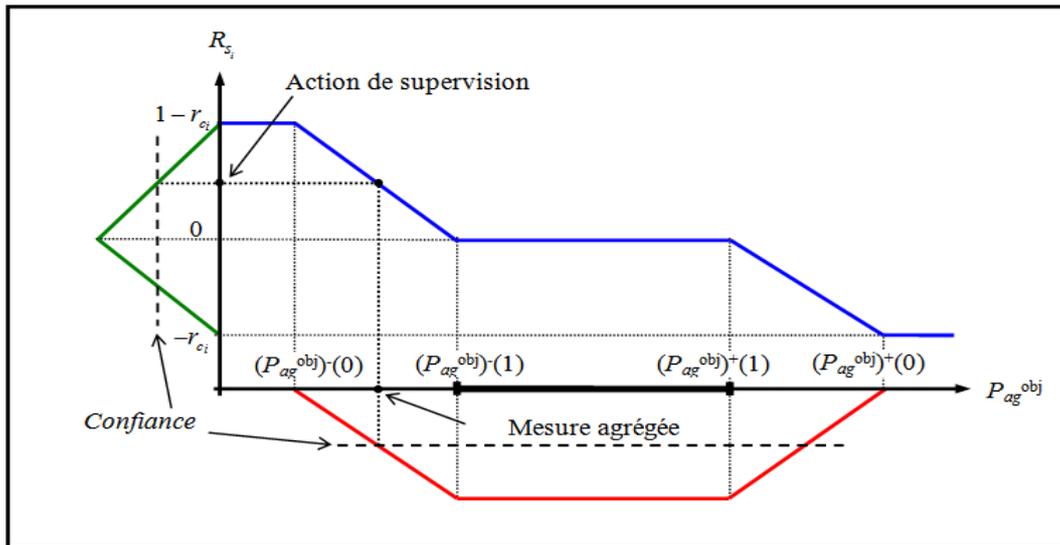


Figure 63 : Interaction simplifiée entre l'objectif agrégé et l'action du superviseur.

Dans ce travail, les opérateurs d'agrégation ont été identifiés et sélectionnés à l'avance pour leurs propriétés et leur efficacité dans le problème considéré. Dans le cas où ces opérateurs ne sont pas compatibles avec les objectifs désirés, il serait possible de faire appel à des techniques régressives pour identifier le meilleur comportement "modèle" au sens des indicateurs de performance.

### 3.4.2.2 Application à la détection de la couleur

Ce travail a été initié dans le cadre de la thèse de NGuyen (thèse en cours). Nous avons supposé (dans le chapitre 1) que l'imprécision de la détection du système flou était de  $\pm 1$  couleur. Autrement dit, pour une couleur  $C_i$ , son cadre de discernement est donné par  $\Omega = \{C_{i-1}, C_i, C_{i+1}\}$ . Il est évident que si l'imprécision de la détection est plus grande, il faut augmenter la cardinalité du cadre de discernement. Toutefois, nous avons constaté qu'une performance de détection à  $\pm 1$  couleur est raisonnable et très largement atteignable par le système flou proposé. Dans le cas où des situations hors  $2^\Omega$  se produisent, ces dernières ne seront pas comptabilisées et elles viennent pénaliser la performance globale du système de décision.

Dans notre contexte, l'espace de puissance (Power Set) qui rassemble tous les sous-ensembles possibles formés des hypothèses et unions d'hypothèses de  $\Omega$  est donné par :

$$PS = 2^\Omega = \{\emptyset, C_{i-1}, C_i, \{C_i \cup C_{i-1}\}, C_{i+1}, \{C_{i-1} \cup C_{i+1}\}, \{C_i \cup C_{i+1}\}, \Omega\}$$

Les sous-ensembles possibles de  $PS$  qui ne peuvent pas se produire ont une masse = 0. Ces sous-ensembles ne sont pas retirés de  $PS$  pour des raisons algorithmiques. En effet, la masse associée à  $\{C_{i-1} \cup C_{i+1}\}$  est toujours nulle.

Afin de pouvoir lever les ambiguïtés et les conflits entre couleurs, dus aux imperfections des données collectées, nous avons proposé l'introduction de sources d'information supplémentaires. Dans ce contexte, en présence de  $n$  sorties (délivrées par le système flou) relatives à  $n$  sources d'informations ( $n$  caméras), nous construisons les  $n$  vecteurs de masses. Le principe de la méthode est illustré dans la figure 64. L'implantation de la méthode proposée repose sur trois étapes :

**1.** La construction des masses : pour calculer le vecteur des masses associé à la sortie du système flou, nous proposons l'utilisation d'une méthode basée sur la "fuzzification" de cette sortie sur les sous-ensembles possibles de l'espace de discernement  $\Omega$ . Ces sous-ensembles sont représentés par

des intervalles graduels. En effet, nous projetons la sortie considérée sur son Power Set ( $PS$ ), comme illustré dans la figure 65.

Dans ce cas, nous attribuons à chaque sous-ensemble de  $\Omega$  son degré de pertinence relatif à l'intervalle graduel le représentant. Nous construisons alors le vecteur des masses associé à la sortie considérée. Bien évidemment, d'autres formes d'intervalles et d'autres répartitions peuvent être utilisées. Dans la construction des masses, une procédure d'affaiblissement en fonction de la fiabilité des sources est opérée.

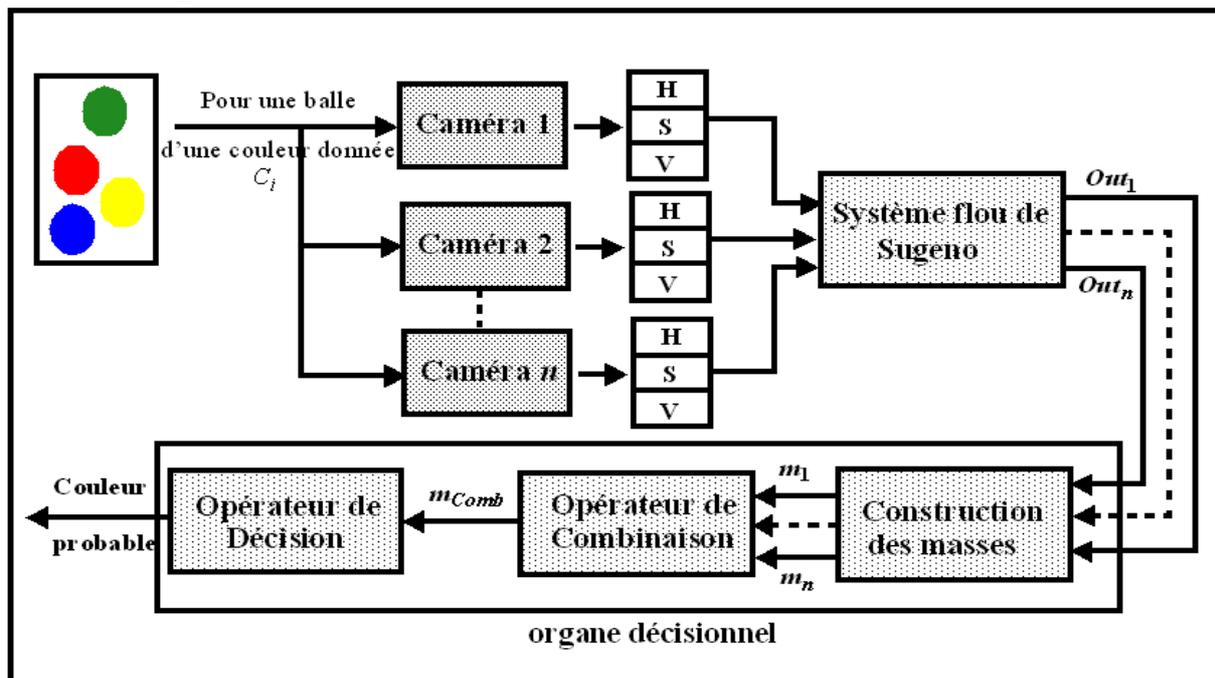


Figure 64 : Principe d'implantation en présence de  $n$  sources d'informations.

2. La combinaison des masses : plusieurs opérateurs ont été exploités en fonction du degré de conflit entre les sources et leur fiabilité (cf. Dempster-Shafer [170], Yager [202], Florea [68], Dubois-Prade [49]). Dans notre application, la règle conjonctive normalisée de Dempster-Shafer donne de bons résultats. Le conflit entre les sources est considéré comme la masse issue de l'opérateur conjonctif sur l'ensemble vide. On peut noter que plus le conflit est faible, plus les jeux de masses sont concordants. A l'inverse, un conflit fort montre une discordance entre les jeux de masses initiaux. Lorsque le conflit est égal 1, les sources sont en conflit total. A l'inverse, lorsqu'il est nul, les sources sont en parfait accord.

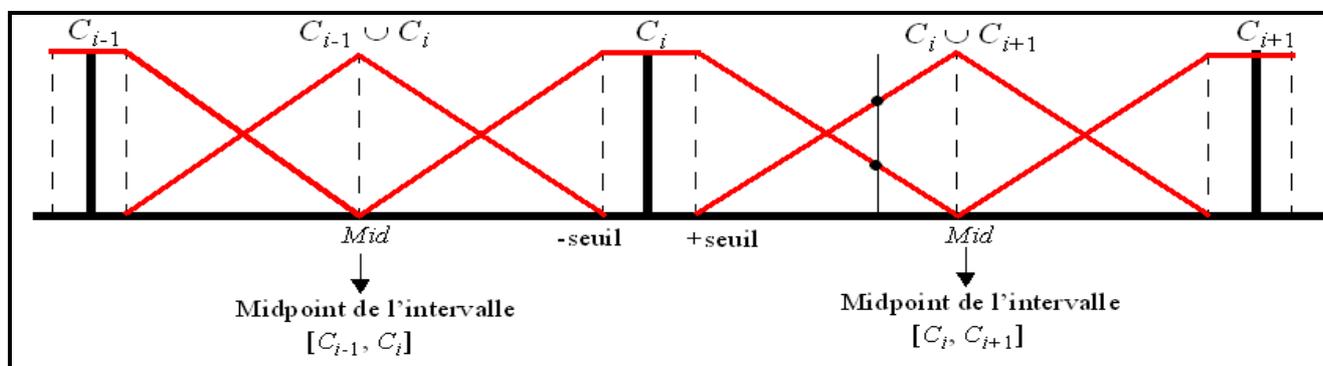


Figure 65 : Principe de construction des masses.

3. L'opérateur de décision : les méthodes du maximum des croyances, du maximum des plausibilités et du maximum de la probabilité "pignistique" ont été évaluées. Dans ce contexte, si la décision prise par le maximum des croyances peut être trop pessimiste, la décision issue du maximum des plausibilités est bien souvent trop optimiste. Le maximum de la probabilité "pignistique", introduite par Smets [173], reste le compromis le plus employé et le mieux adapté. C'est la probabilité "pignistique" qui a été la référence dans notre travail.

La validité et les performances de la méthode ont été mises en évidence par l'introduction d'une deuxième caméra IP dans le système de détection. Le lecteur trouvera en annexe 3 (illustration 12), les résultats de cette implémentation sur le robot NAO.

Une autre méthodologie, basée sur la construction des masses par le biais d'une base d'apprentissage, est en cours de finalisation. Dans cette méthode, des masses de probabilité sont associées à des intervalles représentant différents niveaux de certitude sur les intervalles graduels. Cette vision, non développée ici pour des raisons de concision, conduit à une exploitation de la théorie de l'évidence à travers des mécanismes calculatoires à base d'intervalles.

### 3.5 Conclusion

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'élaboration et de l'identification des modèles de régression en vue de leur utilisation dans un contexte de contrôle et de prise de décision. Les modèles proposés, bien qu'exploités pour construire des lois de commande, peuvent servir dans d'autres domaines, tels que l'estimation paramétrique des systèmes de fusion d'information.

Une contribution importante de ce chapitre a été la révision de la problématique de régression floue à laquelle des améliorations ont été apportées. En effet, la méthodologie proposée se démarque des méthodes existantes dans la littérature par :

- son expressivité du modèle capable d'intégrer les tendances des entrées-sorties imprécises;
- sa nouvelle définition de l'imprécision et de l'incertitude aboutissant à un critère robuste, basé sur l'imprécision globale du modèle sur son domaine de définition et indépendamment de la répartition des données;
- sa capacité à manipuler les entrées-sorties imprécises et incertaines dans un formalisme unique et cohérent.

Des réponses aux problèmes de construction des lois de commande, dans un environnement imprécis et incertain, ont été formulées. La vision proposée ne se focalise pas sur des performances purement numériques et s'écarte ainsi de la majorité des approches classiquement développées dans la littérature floue.

A travers l'approche indirecte, des premiers éléments de réponse ont été donnés aux questions suivantes.

- Etant donné un degré de certitude sur un modèle graduel, est-il possible de synthétiser un contrôleur capable de maintenir la sortie du système dans une enveloppe de tolérance imposée par un degré de préférence sur la trajectoire graduelle désirée ?
- Est-il possible de déterminer des conditions sur cette enveloppe assurant la stabilité de la structure de commande et l'existence d'un contrôleur inverse ? En d'autres termes, quelles sont les trajectoires de référence graduels acceptables et atteignables par le système ?

- Quelle est la signification de la relation entre l'enveloppe de tolérance et les incertitudes dans le système commandé ?

Concernant l'approche directe, nous avons fourni quelques éléments de réflexion pour renforcer les structures de commande experte. Nous avons émis l'hypothèse que la collecte d'informations supplémentaires (indicateurs globaux, multiplicité des ressources, etc.) et leur manipulation à travers des organes de contrôle de haut niveau permettent de faire émerger d'autres formes de connaissance, capables d'améliorer la performance globale du système contrôlé. A nos yeux, cette méthodologie reste prometteuse et nécessitera des travaux d'investigation conséquents.

Malgré la pertinence des techniques proposées, des points importants à explorer demeurent.

- L'utilisation des modèles paramétriques linéaires en les paramètres dans les problèmes de régression était avant tout guidée par des considérations pratiques liées à une simplicité d'interprétation, à une expression sous forme affine et à notre volonté de les exploiter dans un contexte de contrôle. Il est clair que, sur un plan d'apprentissage, la capacité de ces modèles reste limitée face à des modèles non linéaires et/ou non paramétriques.
- L'originalité de la méthode proposée et sa capacité à appréhender le cas des entrées-sorties graduelles ou floues, rarement exploitées dans la littérature, reste parfois tributaire d'une discrétisation verticale des intervalles graduels. Si cette manière de procéder permet de donner les premiers éléments de réponse à cette problématique difficile et plus particulièrement l'identification des systèmes dynamiques, elle reste onéreuse et gourmande en temps de calcul. La méthodologie de contrôle proposée bien que dédiée à la synthèse des contrôleurs inverses à base de modèles, restera valable dans la conception des superviseurs dans l'approche directe.
- La régression par intervalles et/ou par intervalles graduels peut représenter une alternative complémentaire à la régression statistique dans un contexte de manque d'informations, de forte variabilité des données et en présence d'informations expertes. La proximité entre les deux approches a été constatée par des vérifications expérimentales sur de nombreuses applications. Toutefois, cette constatation n'a pas valeur de preuve scientifique. Davantage qu'une perspective, cette dernière remarque forme une prospective à laquelle nous nous intéressons d'ores et déjà dans nos travaux de recherche actuels.

# Conclusion générale

Le travail présenté retrace notre cheminement et la réflexion scientifique inhérente à ce dernier. Nous avons dévoilé nos doutes et nos critiques et présenté nos contributions avec leurs potentialités et leurs faiblesses. Les travaux réalisés ont été présentés selon deux orientations. La première s'inscrit dans le sens de nos intérêts historiques en théorie du contrôle flou conventionnel, avec en particulier la synthèse des contrôleurs flous à base de règles TSK à CC. La seconde expose et argumente notre nouvelle vision du contrôle intelligent avec les outils nécessaires pour sa mise en œuvre dans un contexte imprécis et incertain.

Le point de départ de nos travaux était la recherche de mécanismes capables d'expliquer les performances des contrôleurs flous à base d'expertise. Malgré le succès du contrôle flou dans les applications industrielles, nous étions "sous pression" de la part de la communauté automatique, qui qualifiait le contrôle flou d'approche "amusante" mais non sérieuse, car aucune garantie de résultats en termes de stabilité et de robustesse ne pouvait être apportée. Afin de faire face à ces critiques, nous avons "presque" abandonné l'approche experte pour nous orienter vers l'utilisation des systèmes flous numériques, et plus particulièrement les systèmes TSK. Nous étions alors parmi les premiers chercheurs en France à avoir opéré ce basculement.

Nous avons étayé nos réflexions et nos apports sur le fonctionnement d'un système flou, sur sa décomposabilité et son expression purement mathématique et analytique sous forme multilinéaire par morceaux. Nous avons également proposé un mécanisme d'inversion original pour la construction des contrôleurs flous à travers plusieurs architectures de commande. Les concepts de robustesse, de stabilité et de performance y ont été explicités et utilisés.

Dans les années 2000, cette vision du contrôle flou était alors érigée en solution "miraculeuse" à tous les problèmes de conception de modèles et de contrôleurs. Elle était même devenue une sorte de "couteau suisse" de la théorie du contrôle flou. Toutefois, cette méthodologie et les techniques associées, y compris les nôtres, se contentaient d'imiter les contrôleurs conventionnels de l'automatique en remplaçant simplement le modèle du procédé par un système flou. Si cette conception a permis d'atteindre des performances numériques comparables à celles préconisées par l'automatique conventionnelle, elle n'a apporté aucune réflexion nouvelle sur le problème de synthèse des contrôleurs dans un environnement imprécis et/ou incertain. Nous ne mettons pas ici en doute la rigueur méthodologique et scientifique de cette approche. Cependant, à nos yeux, cette concentration des travaux autour des modèles flous numériques a été néfaste pour l'évolution et l'intérêt du contrôle intelligent. En effet, cette conception s'inscrit clairement dans une course à la précision et aux performances numériques, omettant sans doute l'essence même de l'originalité initiale du contrôle flou.

Ces remarques et cette réflexion nous ont conduits à réaliser un basculement dans nos activités de recherche en abandonnant les approches précises du contrôle flou. Dans ce cadre, le choix d'un

modèle et/ou contrôleur doit être guidé par un compromis entre précision et incertitude. En effet, l'objectif ne consiste pas à enfermer la théorie du contrôle intelligent dans des performances numériques mais à lui permettre d'intégrer et de manipuler l'imprécision et l'incertitude. Cette vision va favoriser non seulement l'amélioration de la représentativité des modèles mais aussi le processus décisionnel inhérent aux problèmes de contrôle.

Un chantier et une nouvelle réflexion ont été initiés sur le développement d'outils de représentation, de manipulation et de propagation des informations imprécises et incertaines. Dans ce contexte, nous avons opté pour des modèles régressifs linéaires en les paramètres. Ce choix a été guidé par le pouvoir expressif et interprétatif de ces modèles, leur facilité de manipulation et leur proximité avec les systèmes flous de TSK à CC. Concernant la représentation des paramètres et des variables dans le modèle, plusieurs théories ont été mises en concurrence et c'est un outil "intervalliste" à base de quantités graduelles qui a été choisi. A ce titre, nous ne pensons pas qu'il y ait de bons et de mauvais outils mais plutôt des représentations adéquates et opportunes en fonction de la problématique considérée. Notre regard ne s'est pas uniquement focalisé sur l'outil théorique, mais il s'est orienté vers son utilisation en situations pratiques. En effet, nous avons opté pour un formalisme pratique, exploitable et facilement manipulable dans notre problème du contrôle intelligent. La vision proposée généralise le raisonnement par intervalles, exhibe l'imprécision et introduit la notion d'incertitude à travers la notion de gradualité. Cette représentation a aussi le mérite d'être interprétable en termes de théorie des possibilités et de théorie des fonctions de croyance. Pour la propagation des informations, nous avons privilégié une conception arithmétique et purement calculatoire pour laquelle des mécanismes de propagations directes et inverses ont été proposés. Cette méthodologie trouve ses racines dans le calcul par intervalles et l'arithmétique de Kaucher à travers les intervalles graduels étendus. Enfin, des éléments de réponse au problème d'identification de ces modèles ont été apportés à travers une révision et une nouvelle lecture de la régression floue. Parallèlement à ces travaux, notre intérêt pour les approches de contrôle direct à base d'expertise est resté "certain" et intact. Nous n'étions pas favorables à l'abandon de cette méthodologie, qui a éloigné la théorie du contrôle des préoccupations pratiques du terrain. Dans ce contexte, nous avons proposé des mécanismes pour corriger les faiblesses de l'approche experte.

Tout au long de nos travaux, le développement d'outils logiciels qui servent de support à la mise en œuvre de nos méthodes a toujours été considéré comme une priorité et un objectif majeur. Les travaux sur le contrôle conventionnel ont été accompagnés par le développement d'une toolbox Matlab, nommée Floulib et téléchargeable sur le site du laboratoire LISTIC. Les travaux à base d'intervalles (régression et contrôle) ont débouché sur une boîte à outils développée en Matlab pour leur implantation pratique. Cette dernière, en phase de finalisation, intègre des problèmes de régression et de conception des contrôleurs.

A la lumière de nos acquis scientifiques et méthodologiques, deux axes de recherche sont envisageables et des perspectives naturelles se dégagent selon chaque axe.

Le premier axe, de nature méthodologique, portera sur l'amélioration des méthodes proposées, sans en changer le périmètre actuel. Cette évolution consistera à continuer de suivre la même démarche scientifique, et plus particulièrement renforcer et retravailler la flexibilité, la pertinence et la confrontation de nos méthodes par rapport aux approches statistiques et/ou non paramétriques. Cette perspective peut englober également un ensemble de travaux qui pourraient être consacrés à l'adaptation des méthodes synthétisées pour de nouveaux terrains et de nouveaux contextes :

- les problèmes d'identification et de contrôle des systèmes de fusion d'information multi-capteurs et multi-sources dans un contexte imprécis, incertain et dynamique;
- le développement de méthodologies propres à la manipulation d'indicateurs de performance imprécis et incertains dans des problèmes de décision multicritère;
- l'exploitation, le développement et l'approfondissement de la théorie des fonctions de croyance à travers la représentation par intervalles.

D'une manière plus générale, le travail pourrait porter sur une nouvelle vision "du contrôle intelligent" où des structures de pilotage simples, locales et innovantes seront proposées pour améliorer les prises de décision et les performances des systèmes à piloter. Cette vision sera développée en présence :

- d'informations expertes (subjectives) avec leur certitude et leur préférence;
- des imprécisions relatives aux appareils de mesure et leur fiabilité;
- des incertitudes inhérentes à la véracité des données et leur représentativité;
- des dynamiques temporelles et relationnelles dans les systèmes;
- des conflits entre objectifs et sources d'informations multiples.

Le deuxième axe, plutôt applicatif, vise le déploiement des approches de pilotage intelligentes dans trois domaines qui nous tiennent à cœur, à savoir :

- la mécatronique (et plus spécifiquement sa facette de robotique de service);
- les applications dans le domaine médical;
- les applications en relation avec la gestion technique du bâtiment et les économies d'énergies.

Ces applications seront accompagnées par le développement d'outils informatiques (logiciels) capables de faire le lien entre les représentations par intervalles graduels, par distributions de possibilité et par fonctions de croyance dans des problèmes de modélisation, d'identification et de prise de décision dans un contexte imprécis et incertain. Ces outils ne seront pas spécifiques au contrôle et trouveront des terrains d'exploitation pertinents dans d'autres problématiques de recherche présentes au LISTIC et ailleurs.



## **PARTIE C : Annexes**

*"Le vaisseau de la théorie pouvait voguer sur les océans d'espoir et de grandeur mathématiques, mais seules les données avaient le pouvoir de gonfler les voiles" Gregory Benford.*



# Annexe 1 : Illustrations du chapitre 1

## 1.1 Illustration 1 : Décomposabilité d'un système TSK à CC

On considère le système flou de TSK à CC extrait de notre publication [74] et illustré dans la figure 66.a. Sa décomposition est donnée en figure 66.b. Les quatre sous-systèmes sont nettement visibles sur la relation entrée-sortie exhibée dans la figure 66.c.

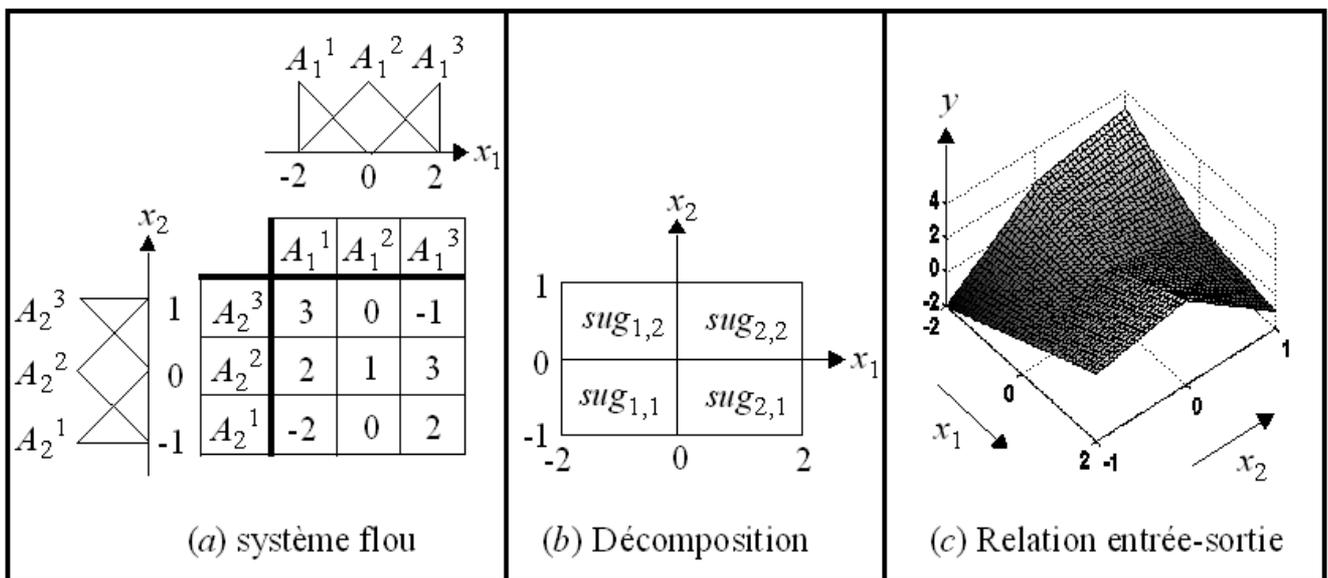


Figure 66 : Décomposition d'un système flou de TSK à CC avec 2 entrées.

Les coefficients des sous-systèmes élémentaires issus du mécanisme de décomposition sont donnés dans le tableau 10 (cf. équations (10) et (11)). De la même manière, la représentation bilinéaire par morceaux est illustrée dans la figure 67.

$M_{0,0}^{1,2} = 1$	$M_{1,0}^{1,2} = -1/2$		$M_{0,0}^{2,2} = 1$	$M_{1,0}^{2,2} = 1$
$M_{0,1}^{1,2} = -1$	$M_{1,1}^{1,2} = -1$		$M_{0,1}^{2,2} = -1$	$M_{1,1}^{2,2} = -3/2$
$M_{0,0}^{1,1} = 1$	$M_{1,0}^{1,1} = -1/2$		$M_{0,0}^{2,1} = 1$	$M_{1,0}^{2,1} = 1$
$M_{0,1}^{1,1} = 1$	$M_{1,1}^{1,1} = -3/2$		$M_{0,1}^{2,1} = 1$	$M_{1,1}^{2,1} = 0$

Tableau 10 : Coefficients des sous-systèmes élémentaires.

A partir des résultats résumés dans le tableau 10, il est possible de constater que le sous-système  $sug_{2,1}$  est linéaire. Cette constatation est clairement en adéquation avec la condition de linéarité énoncée par l'équation (12).

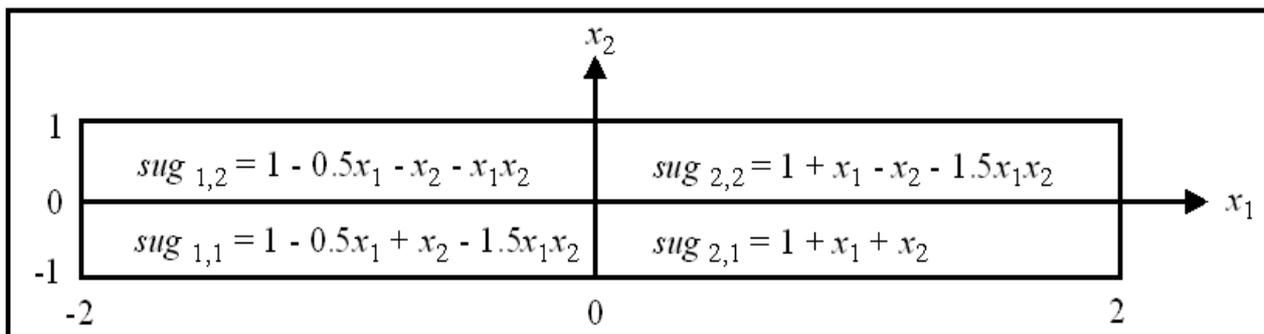


Figure 67 : Représentation bilinéaire du système flou.

## 1.2 Illustration 2 : Principe de l'inversion à gauche

Pour illustrer l'inversion à gauche nous reprenons l'exemple extrait de notre article [74]. Considérons le système flou exploité dans l'illustration 1 et supposons qu'on désire l'inverser par rapport à la variable  $x_2$ . Autrement dit, nous souhaitons reconstruire  $x_2$  à partir de la connaissance de  $x_1$  et  $y$ . Nous allons considérer deux situations en fonction de la valeur de  $x_1$ . La première correspond à  $x_1 = -1$  et la seconde fait référence à  $x_1 = 1$ . Les résultats du mécanisme d'inversion sont donnés dans les figures 68 et 69.

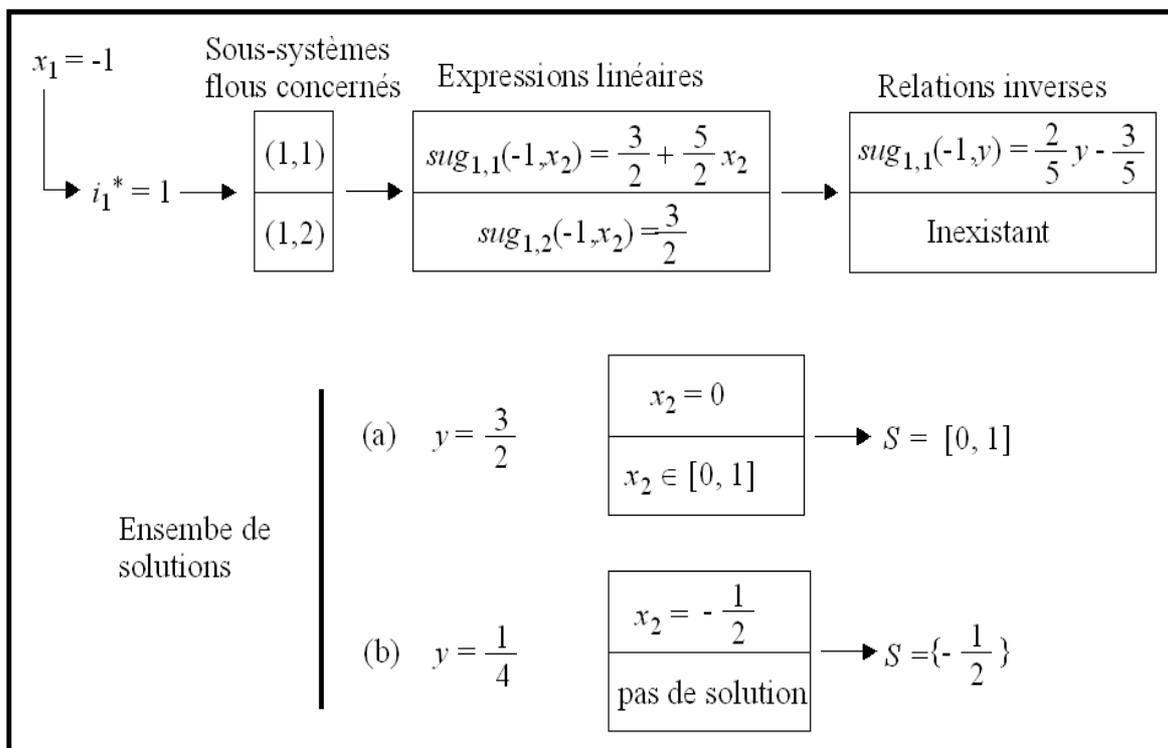


Figure 68 : Mécanisme d'inversion pour  $x_1 = -1$ .

Dans tous les cas, il est possible de vérifier que l'inversion est exacte, c'est-à-dire :

$$\forall x_2 \in S, sug_{i_1, i_2}(x_1, x_2) = y$$

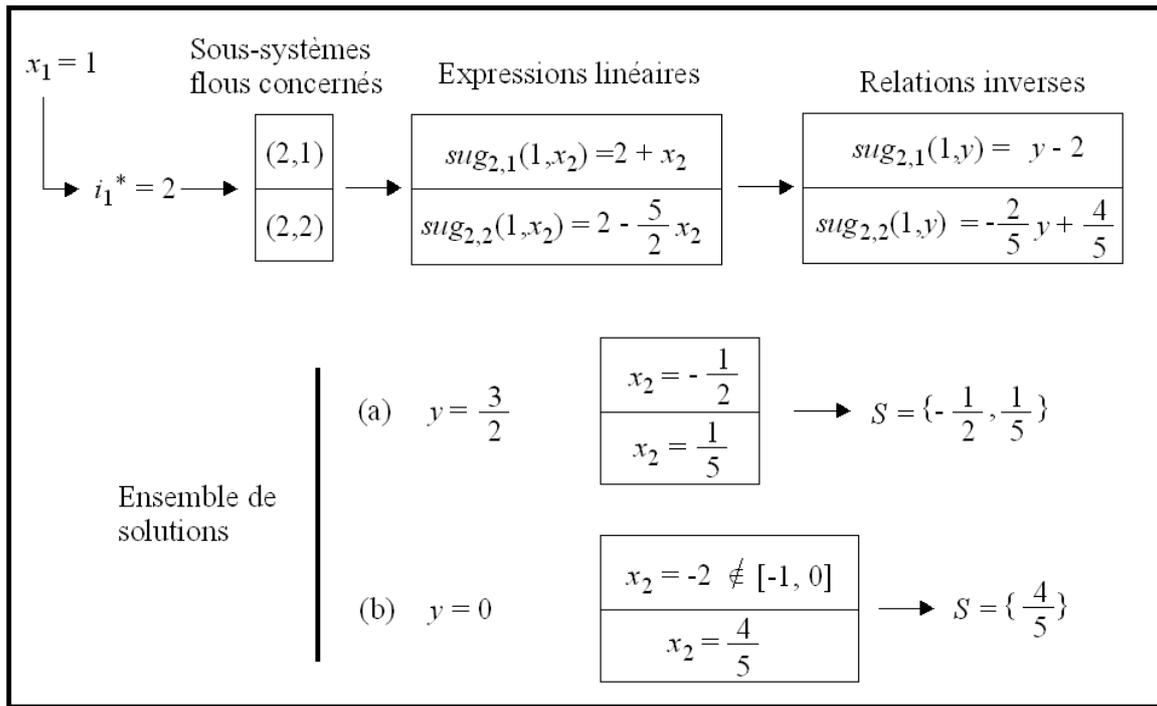


Figure 69 : Mécanisme d'inversion pour  $x_1 = 1$ .

### 1.3 Illustration 3 : Principe de l'inversion à droite

Pour illustrer l'inversion à droite, nous exploitons l'exemple extrait de notre article [24]. Le procédé est un système non linéaire donné par l'équation suivante :

$$y_m(k+1) = y_m(k) / (1 + y_m^2(k)) + u^2(k)$$

où  $u$  et  $y_m$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système. Le modèle flou TSK à CC de ce procédé est donné par une collection de règles floues sous la forme suivante :

$$\text{Si } y_m(k) \text{ est } A_1^{i_1} \text{ et } u(k) \text{ est } A_2^{i_2} \text{ Alors } y_m(k+1) = \varphi_{i_1, i_2}$$

avec  $i_1 = 1, \dots, 6$  et  $i_2 = 1, \dots, 12$ . La répartition des symboles flous triangulaires sur leurs univers de discours est donnée par les valeurs modales regroupées dans le tableau 11. Ce modèle a été identifié et validé par la méthode décrite dans [24].

Symboles sur $u(k)$	$A_2^1$	$A_2^2$	$A_2^3$	$A_2^4$	$A_2^5$	$A_2^6$	$A_2^7$	$A_2^8$	$A_2^9$	$A_2^{10}$	$A_2^{11}$	$A_2^{12}$
Valeur modale	-2.0	-1.93	-1.85	-1.43	-0.97	-0.49	0.0	0.48	0.95	1.36	1.48	2.0

Symboles sur $y_m(k)$	$A_1^1$	$A_1^2$	$A_1^3$	$A_1^4$	$A_1^5$	$A_1^6$
Valeur modale	0.0	0.20	1.12	2.15	4.63	4.93

Tableau 11 : Répartition des univers de discours des entrées.

A chaque instant, la sortie du système flou est générée par un seul sous-système activé et composé de 4 règles. Cette sortie s'exprime par :

$$y_m(k+1) = \alpha_{(i_1, i_2)}(y_m(k)) + \beta_{(i_1, i_2)}((y_m(k)).u(k))$$

Pour des raisons de simplicité de notations, chaque sous-système sera paramétré par un indice  $\omega$ . Dans ce cas, la sortie du modèle est reformulée comme suit :

$$y_m(k+1) = \alpha_{(\omega)}(y_m(k)) + \beta_{(\omega)}(y_m(k))u(k) \quad ; \quad \text{avec} : \omega \in \{1, \dots, 55\}$$

L'objectif du contrôle est de déterminer une loi de commande  $u(k)$  capable d'amener le système à suivre une trajectoire désirée  $y_{des}(k)$  (cf. figure 70).

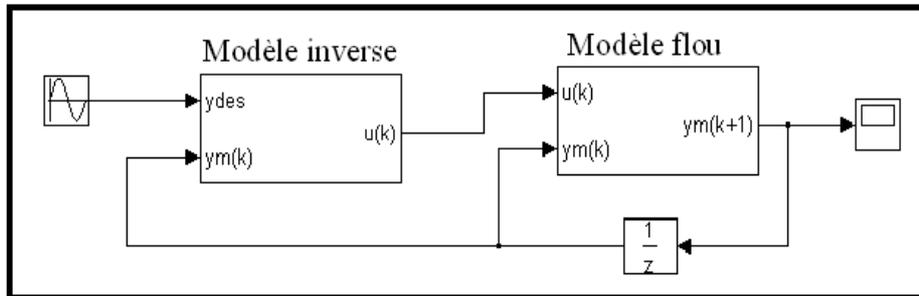


Figure 70 : Boucle fermée avec un modèle inverse.

Afin de déterminer la commande  $u(k)$ , le mécanisme d'inversion flou est appliqué sur les 11 sous-systèmes candidats à l'activation. Par exemple, la figure 71 illustre ce mécanisme pour  $y_m(k) = 1.50$  et  $y_{des}(k) = 2.50$ . Sur les 11 valeurs produites par le mécanisme d'inversion, uniquement les valeurs  $u(k) = -1.352$  et  $u(k) = 1.355$  sont des solutions au problème d'inversion. En effet, les solutions acceptables sont celles qui appartiennent effectivement aux sous-systèmes concernés (cf. tableau 12). Si plusieurs sous-systèmes produisent un inverse, un critère de choix est utilisé. Ici, nous avons sélectionné tout simplement la commande positive, c'est-à-dire  $u(k) = 1.355$ .

Symboles sur $u(k)$	$A_2^1$	$A_2^2$	$A_2^3$	$A_2^4$	$A_2^5$	$A_2^6$	$A_2^7$	$A_2^8$	$A_2^9$	$A_2^{10}$	$A_2^{11}$	$A_2^{12}$
Valeur modale	-2.0	-1.93	-1.85	-1.43	-0.97	-0.49	0.0	0.48	0.95	1.36	1.48	2.0

Tableau 12 : Solutions acceptables pour le problème d'inversion.

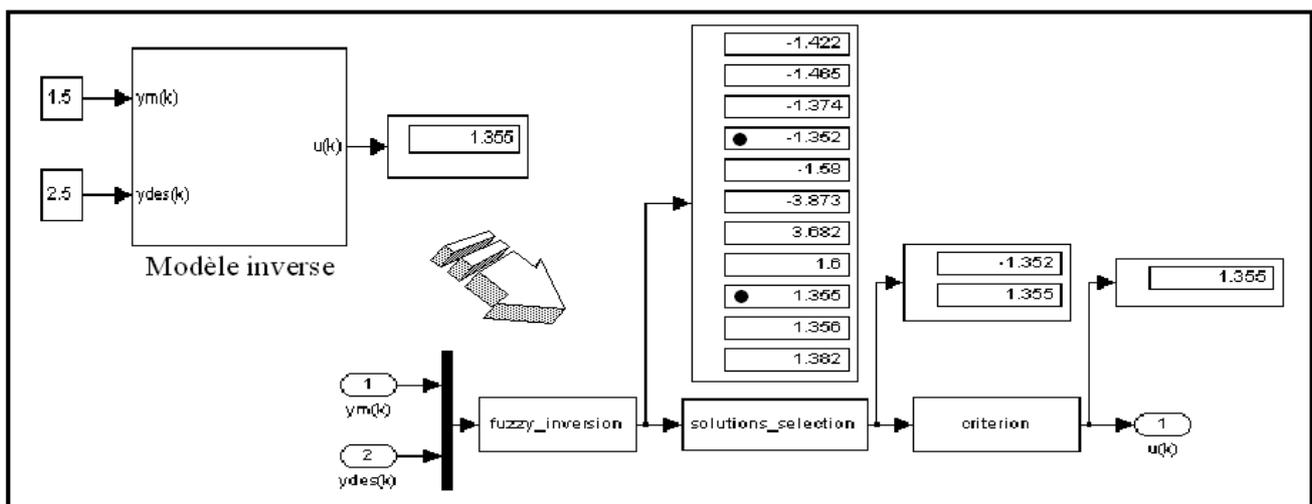


Figure 71 : Résultats de l'inversion pour  $y_{des}(k) = 2.5$ .

Il est important d'insister sur l'importance du critère de sélection en présence de plusieurs solutions possibles. Sachant que ce modèle flou n'a pas de dynamique des zéros [24], n'importe quel critère peut être utilisé. Une étude approfondie sur la dynamique des zéros dans un cadre flou est donnée

dans notre article [24]. Cependant, la qualité du signal de commande est fortement corrélée à ce choix de critère. Pour illustrer nos propos, 4 critères de sélection sont exploités (cf. figure 72) dans la structure de commande avec une trajectoire  $y_{des}(k) = 2.5 + 2.3\sin(2.\pi.k/100)$ .

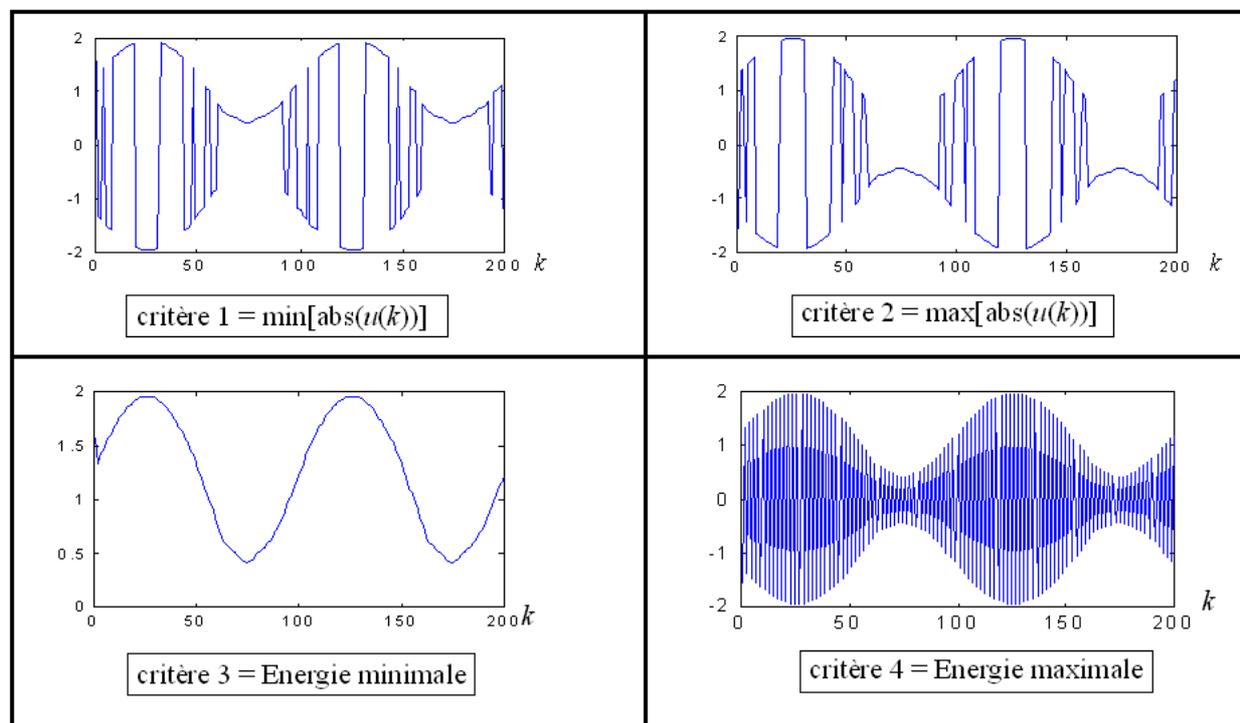


Figure 72 : Signal de commande en fonction des critères.

On peut observer que les critères 1, 2 et 4 ont généré des discontinuités et des signaux hautes fréquences au niveau de la commande. Ces phénomènes peuvent être dangereux pour l'actionneur et risquent d'exciter des dynamiques cachées et non modélisées dans le système. Au contraire, le critère 3 assure un bon comportement (ce critère est généralement compatible avec la technologie des actionneurs).

#### 1.4 Illustration 4 : Commande par "LES"

Nous exploitons ici l'exemple extrait de notre article [23]. L'implémentation de la "LES" porte sur un poignet d'un robot Stäubli. Ce poignet comprend les deux axes (5 et 6) qui constituent la partie finale du robot 6-axes RX 90 B. Dans ce cas, les quatre autres axes sont déconnectés. L'objectif de la commande consiste à proposer une technique capable d'améliorer la précision du poignet de robot en termes de suivi de trajectoires. L'implantation (temps réel) est réalisée selon une architecture client-serveur (cf. figure 73 et figure 74).

Le client élabore la stratégie de commande souhaitée *via* un fichier de Simulink et il la télécharge sur la station cible par l'intermédiaire du protocole TCP-IP. La station cible, connectée au robot, est équipée d'un noyau temps-réel (XPCTarget de Mathworks) et des cartes d'acquisition (national instruments). Le 6<sup>ème</sup> axe permet une rotation de la charge  $M$  (angle  $\theta_{s6}$ ). Le 5<sup>ème</sup> axe (angle  $\theta_{s5}$ ) impose l'orientation du poignet. Chaque axe est piloté par un moteur "brushless". Un noyau temps réel est employé pour l'implantation des algorithmes de commande. Ces derniers ont pour objectif de déterminer les tensions qui seront appliquées aux moteurs. Les positions angulaires sont mesurées au moyen de résolveurs.

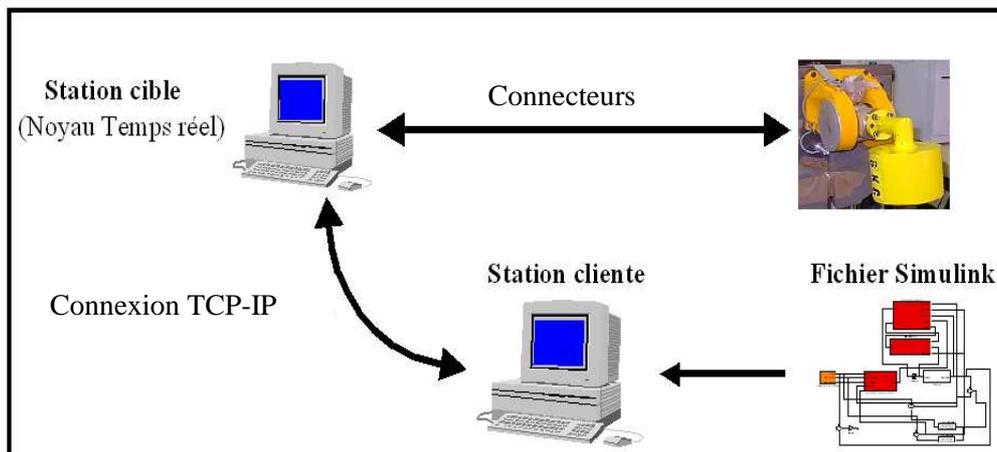


Figure 73 : Principe de l'architecture du télé-contrôle.

La stratégie de commande proposée est évaluée uniquement sur l'axe 6. Dans ce cas, l'axe 5 est maintenu dans une position horizontale en utilisant un régulateur de type PI.

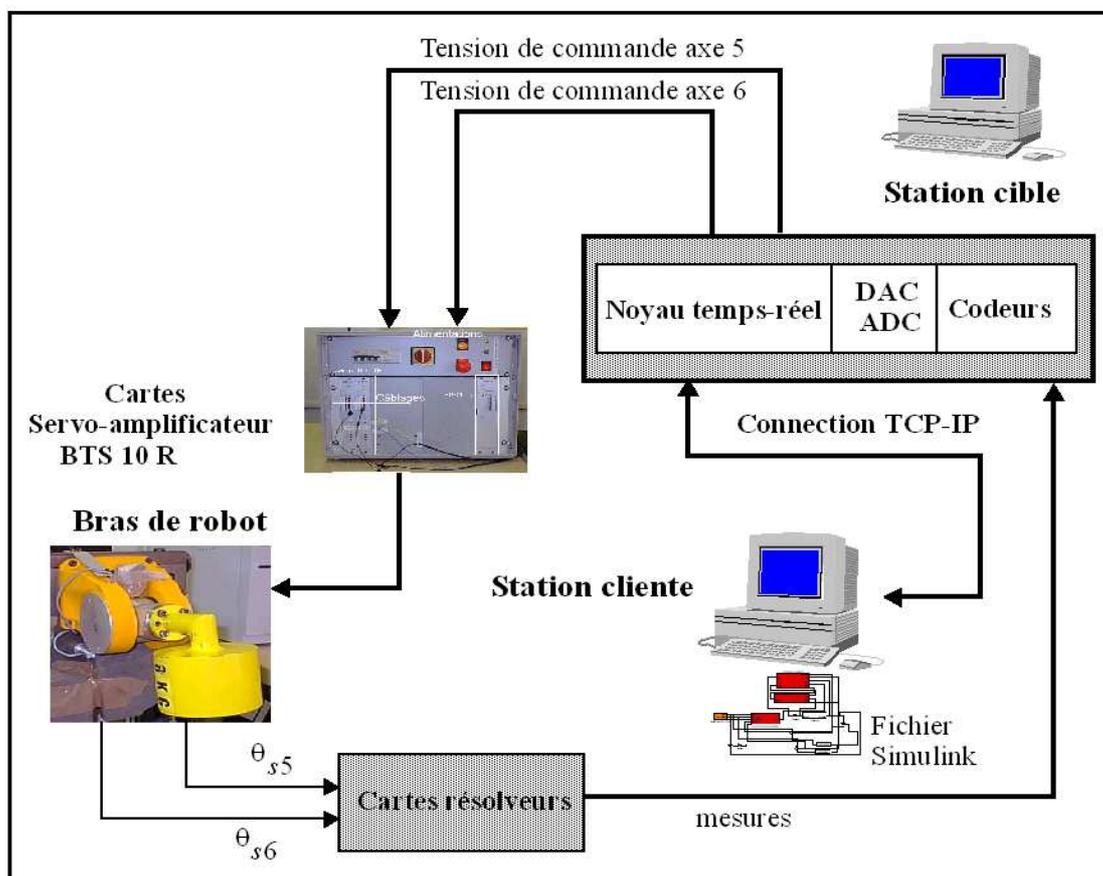


Figure 74: Schéma pratique d'implantation.

Nous avons démontré que le comportement dynamique de l'axe 6 est donné par une équation sous la forme :

$$y^{(2)} = \Phi(x, u) = \alpha_m(x) + \beta_m(x)u + \Delta; \quad y = x_1; \quad \text{et} : \quad x = (x_1, x_2)^T$$

où  $u$  est la tension de commande appliquée au moteur brushless et  $x_1 = \theta_{s6}$  est la sortie et  $x_2$  est sa dérivée. Le modèle flou est identifié en boucle fermée en présence d'un observateur. A titre

d'exemple, les résultats obtenus avec une commande par "LES" pour une trajectoire  $y_r(t) = (\pi/2) \cdot \sin(5t)$  sont illustrés dans la figure 75 où de bonnes performances en termes de suivi de trajectoire sont constatées.

Des stratégies de robustification par mode de glissement ou par atténuation  $H_\infty$  ont été réalisées. Ces dernières sont présentées dans [25][27].

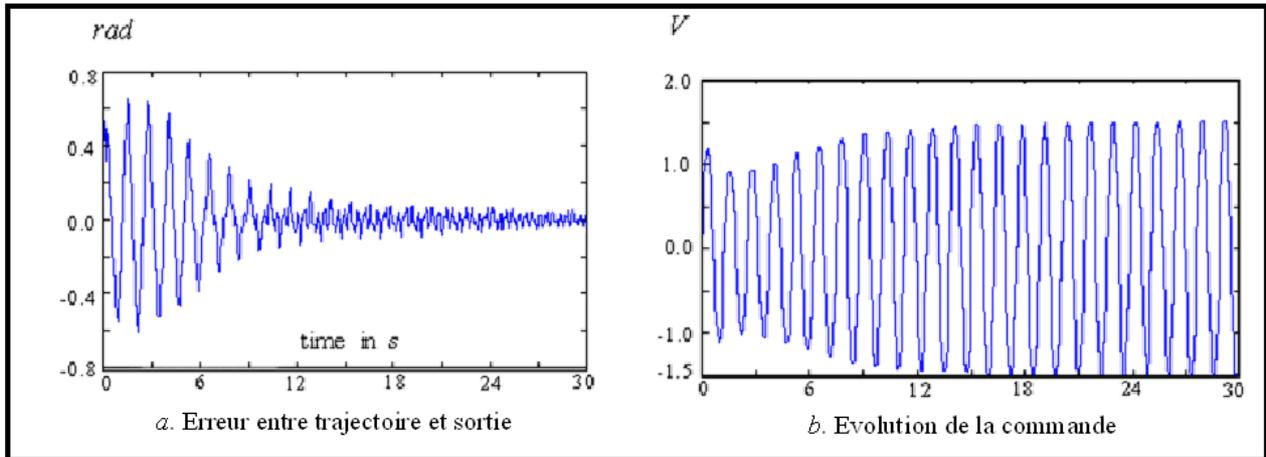


Figure 75 : Résultats du suivi de trajectoire.

### 1.5 Illustration 5 : Commande par Modèle Interne "CMI"

Nous exploitons ici un exemple considéré comme un "benchmark" donné dans [164] et extrait de nos publications [21][24]. Le procédé à piloter est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} x(k) = \frac{24 + x(k-1)}{30} x(k-1) - 0.8 \frac{u^2(k-1)}{1 + u^2(k-1)} x(k-2) + 0.5u(k-1) \\ y(k) = x(k) + d(k) \end{cases}$$

La relation entrée-sortie de ce procédé peut être écrite sous la forme suivante :

$$y(k+1) = \Psi[z(k)] = \Psi[y(k-1), y(k), u(k)]$$

La méthode d'identification déployée dans [21][24] est exploitée pour déterminer le modèle flou du procédé. Le modèle identifié est composée de 280 règles (7, 8 et 5 symboles flous pour décrire respectivement  $y(k-1)$ ,  $y(k)$  et  $u(k)$ ). Dans ce cas, à chaque instant, la sortie du modèle est donnée par la sortie d'un sous-système flou composé de 8 règles actives. Dans les simulations, nous avons considéré la trajectoire de référence utilisée dans [164] à savoir :

$$y_r(k+1) - 0.803 \cdot y_r(k) + 0.16 \cdot y_r(k-1) = 0.232 \cdot sp(k) + 0.126 \cdot sp(k-1)$$

où  $sp(k)$  représente des impulsions avec une amplitude dans l'intervalle  $[-2, 1.75]$ . Le procédé est soumis à des perturbations  $d(k)$  d'amplitude  $\pm 1$  avec une occurrence aléatoire. Les résultats de simulation sont illustrés dans les figures 76 et 77.

Ces résultats confirment les bonnes performances de suivi de trajectoire. En effet, l'erreur quadratique moyenne pour l'erreur de suivi est égale à 0.0286. A titre d'exemple, dans [164] où une "CMI" neuronale a été employée, des résultats similaires ont été obtenus (l'erreur quadratique moyenne est égale à 0.03). La méthode d'inversion proposée est exacte et non itérative évitant ainsi les problèmes de stabilité et de convergence inhérents aux algorithmes d'inversion numérique dans un contexte neuronal.

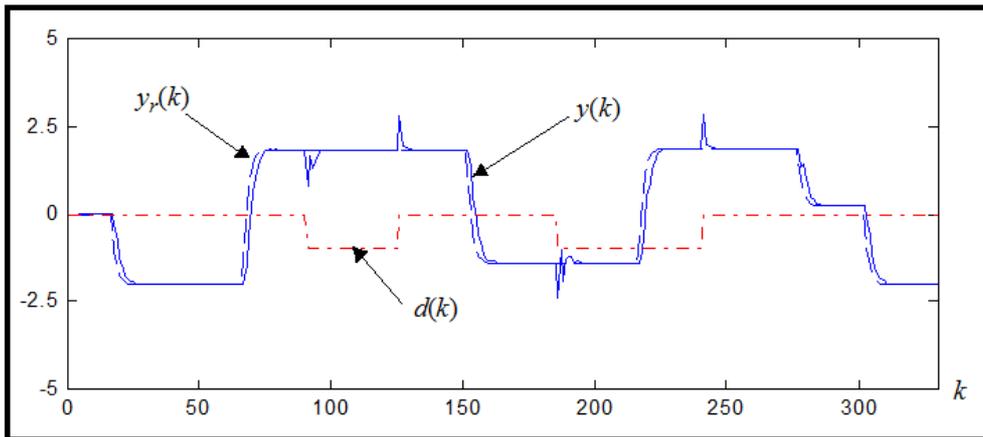


Figure 76 : Performances du suivi de trajectoire.

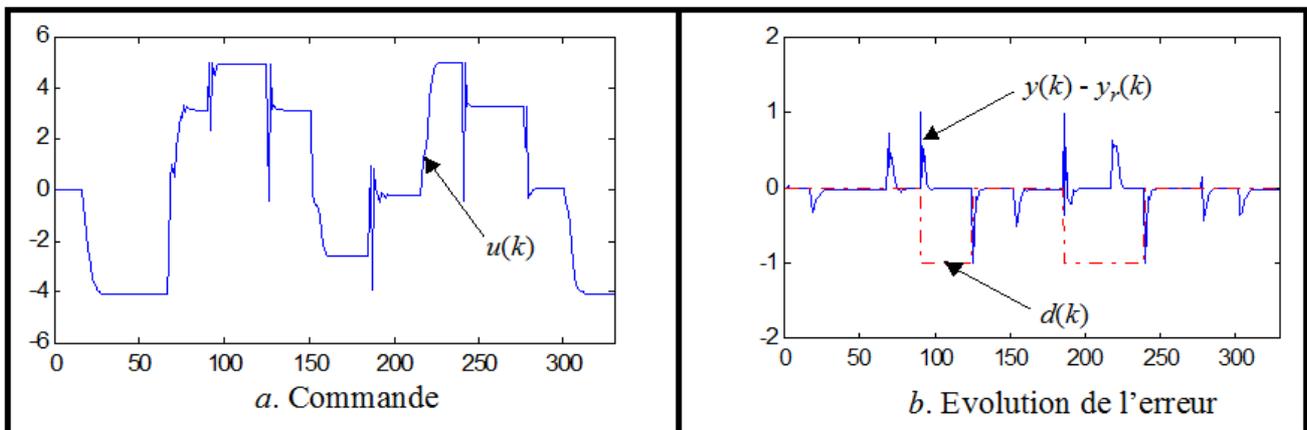


Figure 77 : Signal de commande et erreur de suivi.

La validité de la méthode a été démontrée en présence d'un fort retard entre la sortie et la commande. Comme dans [164], un retard de 9 échantillons a été introduit et conduit au système suivant :

$$\begin{cases} x(k) = \frac{24 + x(k-1)}{30} x(k-1) - 0.8 \frac{u^2(k-9)}{1 + u^2(k-9)} x(k-2) + 0.5u(k-9) \\ y(k) = x(k) + d(k) \end{cases}$$

Les résultats de suivi sont illustrés dans les figures 78 et 79.

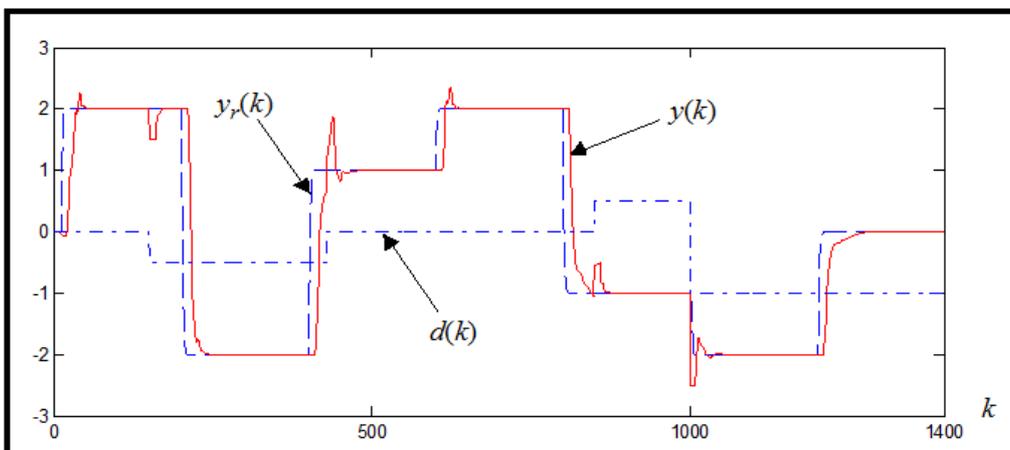


Figure 78 : Performances du suivi de trajectoire.

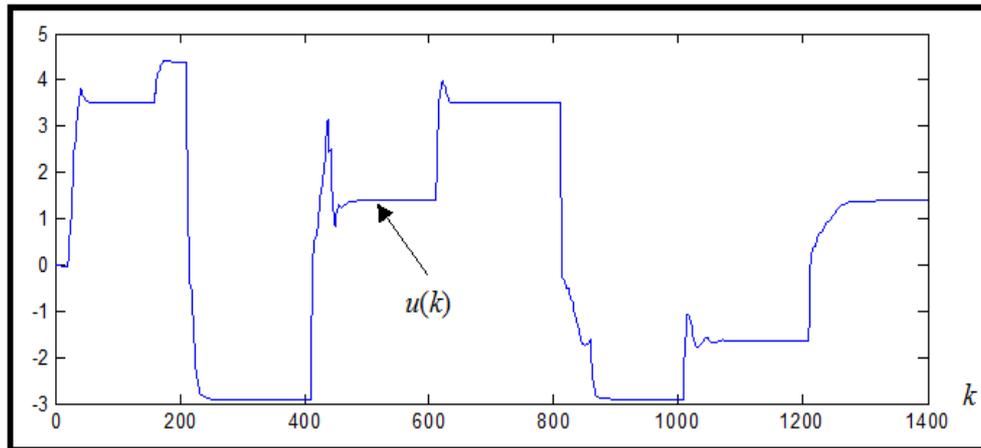


Figure 79 : Signal de commande.

Les performances de commande sont préservées malgré la présence d'un retard important. En présence de ce dernier, la CMI intègre naturellement un prédictor de Smith [21]. En effet, l'entrée alimente le procédé et le modèle flou avec et sans retard. Dans ce cas, on peut affirmer que l'effet du retard a été éliminé et la sortie prédite peut être employée comme signal de feedback dans la conception de contrôleur.

## 1.6 Illustration 6 : Pilotage flou d'un système de production

Afin d'illustrer ce concept de pilotage flou, l'exemple illustré dans la figure 80 est considéré. Ce dernier représente un système mono-produit composé de 4 machines  $M_i$ , chacune travaillant avec un taux de production  $u_i$ . Le système se décompose alors en 4 modules de production (transformation)  $MP(i)$  et 3 stocks intermédiaires. Les détails paramétriques de cet exemple sont donnés dans [188].

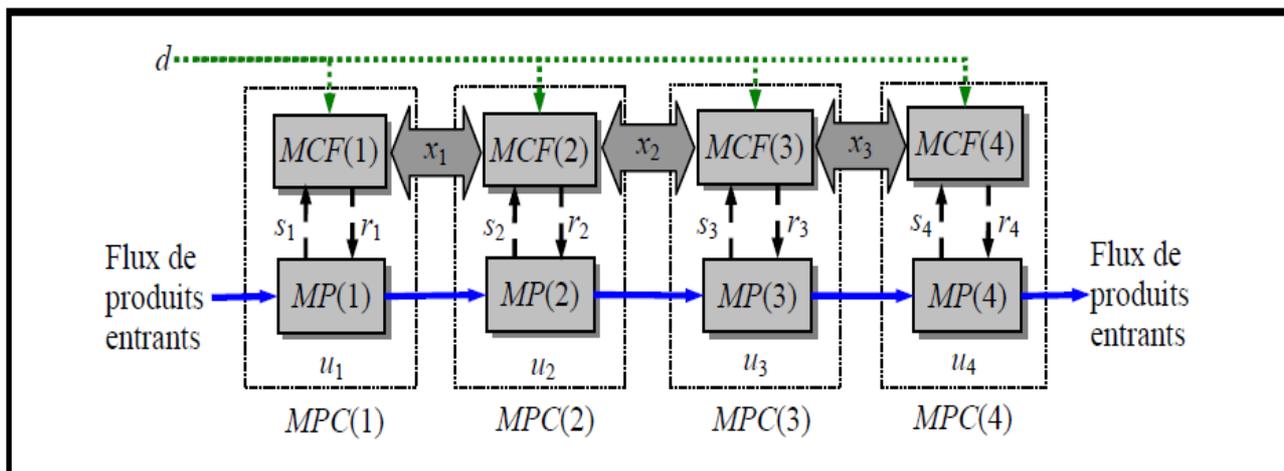


Figure 80 : Ligne de transformation de produits contrôlée.

L'approche de commande floue a été évaluée par simulation sous l'outil MATLAB/Simulink et la toolbox "Floulib" développée au sein du laboratoire [71]. Dans les implémentations, une demande  $d$  de 0.7 produits/unité de temps et un pas de discrétisation de 0.1 unité de temps ont été considérés. Les résultats obtenus sont illustrés dans les figures 81 et 82 ci-après. La figure 81 donne une illustration de l'évolution de la production du système piloté et non piloté. Dans le cas non piloté, le système produit à capacité maximale en supposant qu'il y ait toujours des produits disponibles en entrée et que le stock de sortie était à capacité infinie. Dans le cas piloté, on constate un bon suivi de la demande.

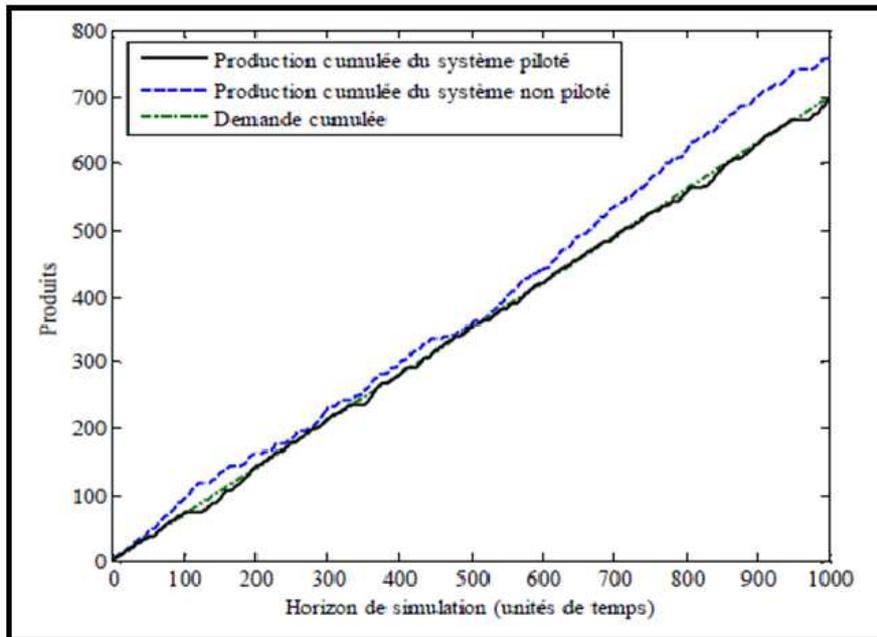


Figure 81 : Evolution de la production cumulée par rapport à la demande.

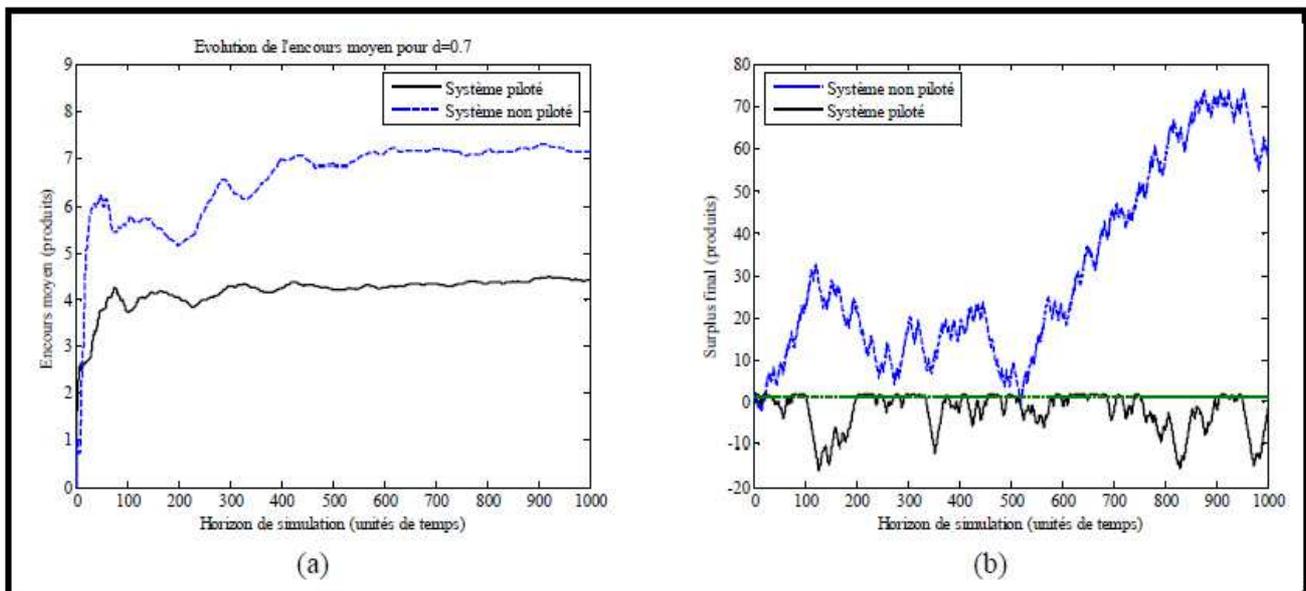


Figure 82 : Evolution des performances du système : (a) encours moyen, (b) surplus final.

A partir des résultats obtenus (cf. figures 81 et 82), nous pouvons déduire que les performances de suivi de trajectoire sont satisfaisantes dans la mesure où la performance du surplus final reste bornée et proche de son seuil critique [188]. La commande locale contribue également au maintien d'un encours moyen minimal et stable.

### 1.7 Illustration 7 : Régulation de niveau pour le remplissage de moules

Dans cette implantation, un bol de forme conique a été considéré. La performance du contrôleur a été validée sur une série de 360 moules (équivalent à 1 h de production). La zone de tolérance pour le régulateur a été fixée à  $\pm 5$ mm. Le temps de remplissage d'un moule était d'environ 10 s. Les résultats illustrés dans les figures 83 et 84 présentent l'évolution du niveau de la fonte dans le bol par rapport à des consignes désirées (de 30mm et de 45mm) pendant le remplissage.

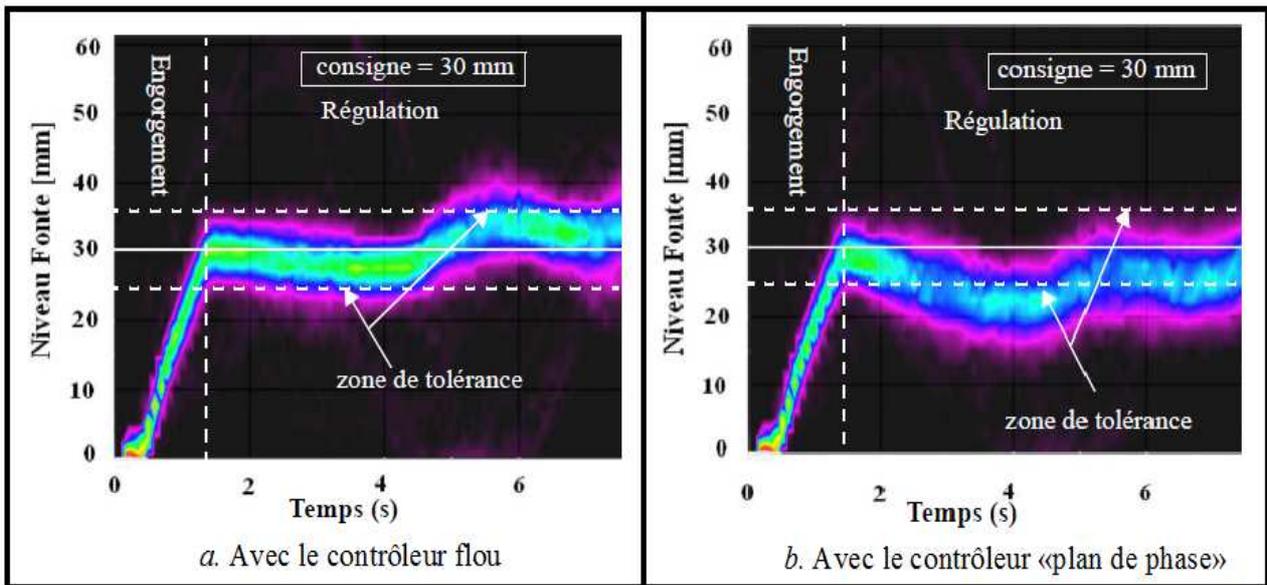


Figure 83 : Résultats de la régulation pour une consigne de 30mm.

Nous pouvons constater que les performances de la régulation par contrôle flou ont été améliorées par rapport à l'utilisation du contrôleur dit "plan de phase". En effet, les résultats sont satisfaisants dans la mesure où la sortie du système reste dans la zone d'admissibilité. Après la phase d'engorgement, le procédé rentre en phase de régulation. Il est clair que pour une consigne de 45 mm, le contrôleur donne des résultats meilleurs car une variation de débit a une faible influence sur le niveau (la section du bol est importante à ce niveau : la partie haute du bol conique). De plus, le temps nécessaire pour atteindre la zone d'admissibilité (la consigne) est plus court, ce qui améliore la productivité du système.

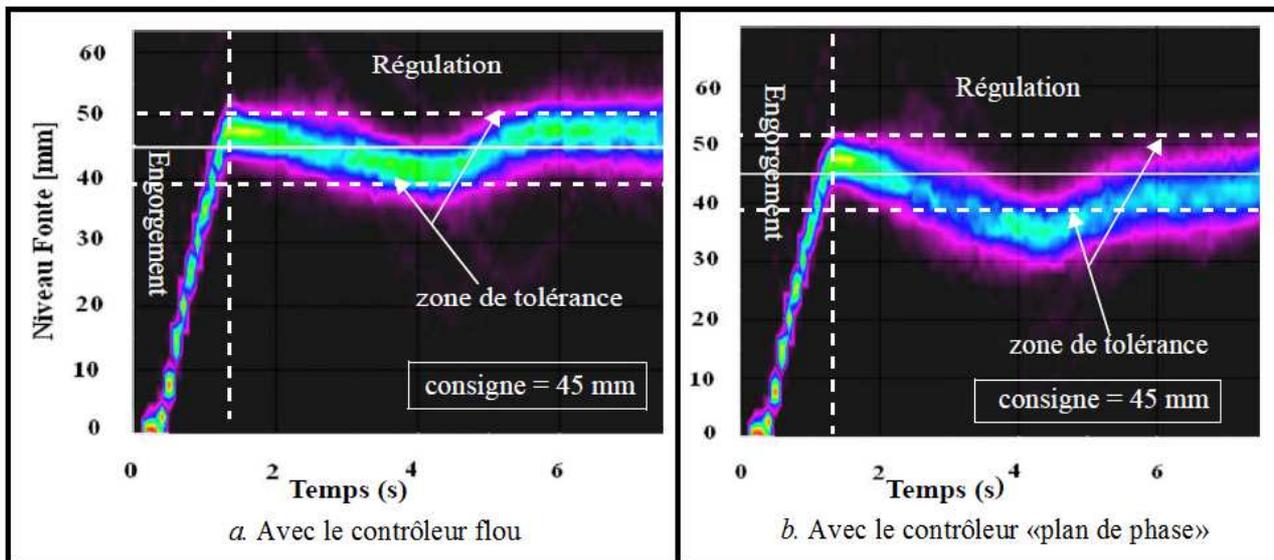


Figure 84 : Résultats de la régulation pour une consigne de 45mm.

La performance des résultats obtenus valide la stratégie de commande proposée. Nous pouvons notamment mentionner le fait que le contrôleur flou permet de réduire la dispersion des niveaux de fonte obtenus sur l'ensemble des moules remplis. De plus, ce contrôleur est capable de lisser les

transitions dues à des commutations brutales qui peuvent induire des instabilités et des à-coups sur la quenouille.

### 1.8 Illustration 8 : Contrôle flou pour la détection de la couleur

L'approche développée a été validée sur la base d'une expérience où 100 tests (100 images acquises /couleur) où différentes conditions de luminosité et d'orientation ont été considérées (les détails techniques sont donnés dans [154]). En effet, pour chaque balle, nous avons demandé au robot NAO d'identifier sa couleur *via* sa caméra intégrée. Les résultats obtenus en termes de taux de détection et de conflit entre couleurs sont répertoriés dans le tableau 13. Le seuil de détection a été choisi égal à 0.15.

Couleur	Détection par le système flou	Situations de conflit entre couleurs
Bleu	98 %	2 %
Pourpre	93 %	7 %
Rose	44 %	56 %
Rouge	65 %	35 %
Marron	70 %	30 %
Orange	68 %	32 %
Jaune	37 %	63 %
Vert	62 %	38 %
Cyan	38 %	62 %
<b>Moyenne</b>	<b>64 %</b>	<b>36 %</b>

Tableau 13 : Résultats du système de détection de la couleur.

A partir des résultats obtenus, il est possible de constater que les performances de la détection sont raisonnables. Les situations de conflits sont essentiellement dues à la présence des imprécisions et/ou des incertitudes dans l'environnement considéré.

## Annexe 2 : Illustrations du chapitre 2

### 2.1 Illustration 1 : Equivalence entre intervalles flous et intervalles graduels

Cet exemple est extrait de notre article [18]. Considérons les deux intervalles flous  $A$  et  $B$  définis par leur fonctions d'appartenance  $\mu_A$  et  $\mu_B$ , comme illustré dans la figure 85.

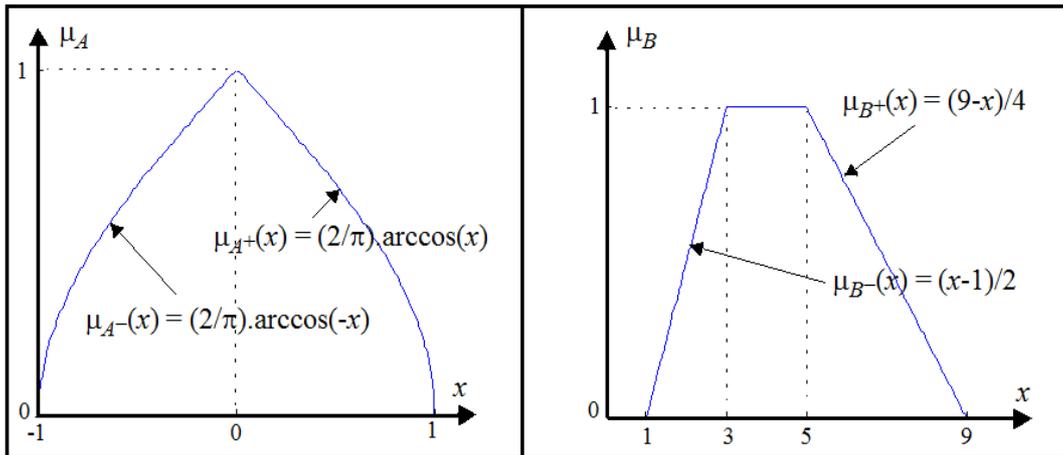


Figure 85 : Intervalles flous  $A$  et  $B$ .

L'intervalle flou  $A$  peut être représenté par un intervalle graduel  $a(\lambda)$  dont  $a^-(\lambda)$  et  $a^+(\lambda)$  sont calculés comme suit :

$$\lambda = \mu_{A^-}(x) = (2/\pi) \cdot \arccos(-x) \Rightarrow a^-(\lambda) = (\mu_{A^-})^{-1}(\lambda) = -\cos(\pi/2 \cdot \lambda); \text{ et}$$

$$\lambda = \mu_{A^+}(x) = (2/\pi) \cdot \arccos(x) \Rightarrow a^+(\lambda) = (\mu_{A^+})^{-1}(\lambda) = \cos(\pi/2 \cdot \lambda)$$

Le même principe est exploité pour calculer  $b(\lambda)$  associé à  $B$ . Les intervalles graduels sont représentés dans la figure 86. Dans l'espace  $MR$ , les intervalles graduels  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  sont donnés par :

$$a(\lambda) = (M_a(\lambda), R_a(\lambda)) = (0, \cos(\pi/2 \cdot \lambda)) \quad ; \quad b(\lambda) = (M_b(\lambda), R_b(\lambda)) = (5-\lambda, 4-3\lambda)$$

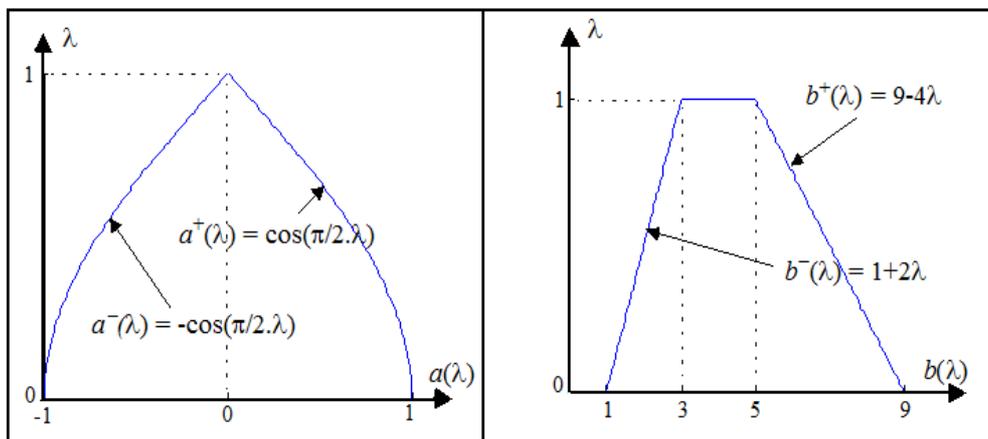


Figure 86 : Intervalles graduels  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  dans l'espace  $EP$ .

## 2.2 Illustration 2 : Calcul des degrés de possibilité et de nécessité

Prenons un exemple pour illustrer le calcul des degrés de possibilité et de nécessité pour les intervalles  $[5,10]$  et  $[7, 10]$  selon l'intervalle graduel  $a(\lambda)$  (cf. figure 87).

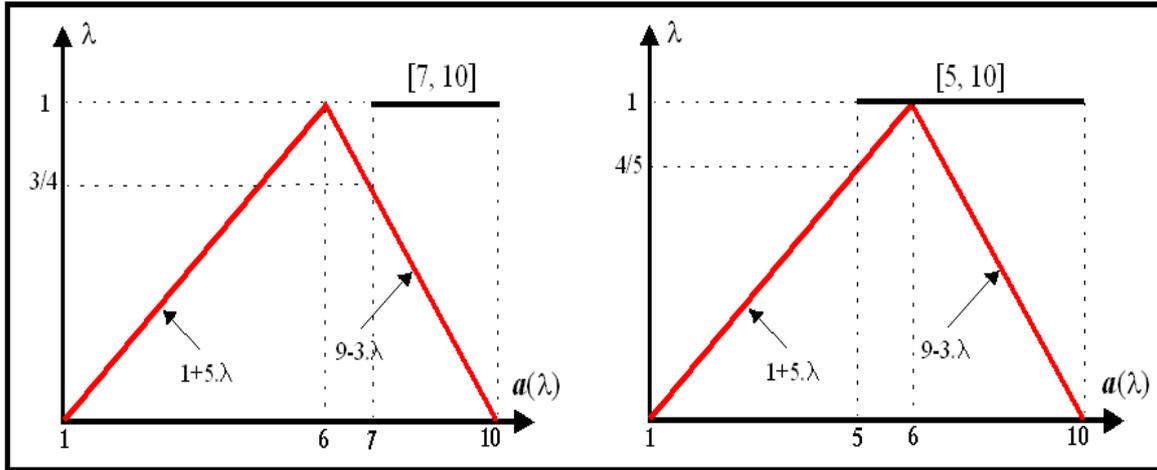


Figure 87 : Degrés de possibilité et de nécessité sur un intervalle graduel triangulaire.

Les résultats sont illustrés dans la figure 87 et donnés par :

$$\Pi([5, 10]) = 1 \text{ et } N([5, 10]) = 1 - 4/5 = 1/5.$$

$$\Pi([7, 10]) = 3/4 \text{ et } N([7, 10]) = 1 - 1 = 0.$$

Dans cas, il est facile de vérifier que :

$$N([5,10]) + \Pi([5,10]^c) = 1, N([5,10]) + N([5,10]^c) \leq 1,$$

$$\Pi([5,10]) + \Pi([5,10]^c) \geq 1 \text{ et } N([5,10]) \leq \Pi([5,10])$$

Les mêmes propriétés sont également vérifiées pour l'intervalle  $[7, 10]$ .

## 2.3 Illustration 3 : Manipulation des intervalles graduels

### 2.3.1 Exemple1

Cet exemple a pour objectif d'explicitier le gain en précision induit par l'utilisation des opérateurs IGE. Considérons le cas traité dans notre article [18] où deux intervalles graduels propres  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  sont exploités. Ces derniers sont donnés dans l'espace  $MR$  par :

$$a(\lambda) = (M_a(\lambda), R_a(\lambda)) = (5-\lambda, 4-3\lambda) \text{ et } b(\lambda) = (M_b(\lambda), R_b(\lambda)) = (3-0.5\lambda, 2-1.5\lambda)$$

L'utilisation des opérateurs dans IGP et IGE conduit aux résultats suivants :

- Soustraction dans IGP:  $a(\lambda) - b(\lambda) = (2-0.5\lambda, 6-4.5\lambda)$ .

- Division dans IGP : sachant que  $|RX_a(\lambda)| \leq 1$  et  $|RX_b(\lambda)| \leq 1$  :

$$a(\lambda)/b(\lambda) = \delta_b(\lambda) \times a(\lambda) \times b(\lambda) = ((5\lambda^2 - 17.5\lambda + 23)/(-2\lambda^2 + 3\lambda + 5), (3\lambda^2 - 20.5\lambda + 22)/(-2\lambda^2 + 3\lambda + 5))$$

- Soustraction dans IGE :  $a(\lambda) - b(\lambda) = (2-0.5\lambda, 2-1.5\lambda)$ ;

sachant que  $R_a(\lambda) > R_b(\lambda) \Rightarrow a(\lambda) - b(\lambda)$  est un intervalle graduel propre, *i.e.*  $a(\lambda) - b(\lambda) \in \text{IGP}$ .

- Division dans IGE : l'expression de  $a(\lambda)/b(\lambda)$  est donnée par :

$$a(\lambda)/b(\lambda) = \delta_b(\lambda) \times a(\lambda) \times \text{dual}(b(\lambda)) = ((-4\lambda^2 + 6.5\lambda + 7)/(-2\lambda^2 + 3\lambda + 5), (-1.5\lambda + 2)/(-2\lambda^2 + 3\lambda + 5))$$

Dans cette situation, il est possible de vérifier que  $a(\lambda)/b(\lambda) \in \text{IGP}$  car  $|RX_a(\lambda)| > |RX_b(\lambda)|$ .

Ces résultats sont illustrés (dans l'espace  $EP$ ) dans la figure 88. Selon cette figure, nous pouvons constater que les opérateurs proposés (dans IGE) sont moins imprécis que les opérateurs conventionnels (dans IGP). Dans ce cas, les indicateurs de surestimation donnent les résultats suivants :

$$\Xi_{-}(\lambda) = (R_a(\lambda) - R_b(\lambda)) / (R_a(\lambda) + R_b(\lambda)) = 1/3 : \text{entre les opérateurs de soustraction.}$$

$$\Xi_{/}(\lambda) = (RX_a(\lambda) - RX_b(\lambda)) / (RX_a(\lambda) + RX_b(\lambda)) = 1 / (-2\lambda + 11) : \text{entre les opérateurs de division.}$$

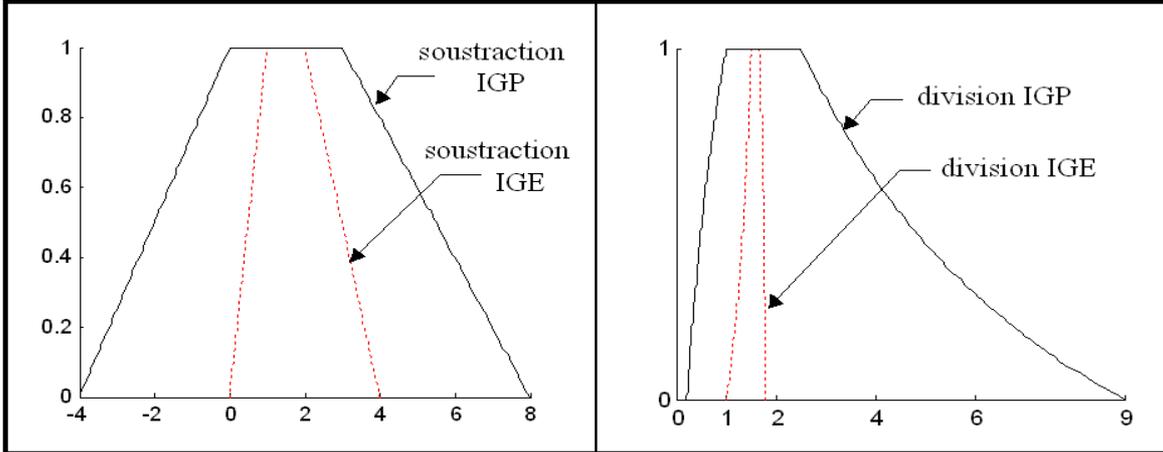


Figure 88 : Comparaison des opérations IGP et IGE.

A partir de ces résultats, nous constatons que  $\Xi_{-}(\lambda)$  est une fonction constante alors que  $\Xi_{/}(\lambda)$  est une fonction non linéaire. D'un point de vue interprétatif,  $\Xi_{-}(\lambda) = 1/3$  signifie que l'opérateur proposé réduit l'imprécision par un rapport de 3. Dans le même temps, l'opérateur de division étendue réduit l'imprécision d'un rapport égal à 11 pour  $\lambda=0$  et par un rapport égal à 9 pour  $\lambda=1$ .

Evaluons maintenant les opérations précédentes quand  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  sont permutés :

- Soustraction dans IGE :  $b(\lambda) - a(\lambda) = (-2 + 0.5\lambda, -2 + 1.5\lambda)$ .  
Dans ce cas,  $b(\lambda) - a(\lambda)$  est un intervalle graduel impropre ( $b(\lambda) - a(\lambda) \in \text{IGI}$ ) car  $R_b(\lambda) < R_a(\lambda)$ .

- Division dans IGE :

$$b(\lambda)/a(\lambda) = \delta_a(\lambda) \times b(\lambda) \times \text{dual}(a(\lambda)) = ((4\lambda^2 - 6.5\lambda - 7) / (8\lambda^2 - 14\lambda - 9), (-1.5\lambda + 2) / (8\lambda^2 - 14\lambda - 9))$$

Dans cette situation,  $b(\lambda)/a(\lambda) \in \text{IGI}$ . En effet, le résultat est un intervalle graduel impropre car  $|RX_b(\lambda)| < |RX_a(\lambda)|$ .

Si le résultat graduel est impropre, ce dernier n'a pas de signification physique. Dans ce contexte, on doit se tourner vers une arithmétique IGP ou une implémentation selon le principe d'extension.

### 2.3.2 Exemple 2

Cet exemple vise à mettre en évidence l'intérêt du "gain en précision" des opérateurs IGE dans la préservation de la stabilité d'un système lors de son échantillonnage. Supposons par exemple qu'on demande à un expert automatique d'estimer le gain et la constante de temps d'un procédé dont la fonction de transfert est du premier ordre. En fonction de ses quelques observations et de son expérience sur le procédé, l'expert nous fournit les informations suivantes.

- Je suis certain que la constante de temps de ce procédé se situe entre 4s et 17s mais les valeurs entre 9s et 12s me semblent être les plus vraisemblables.

- Je suis certain que le gain de la fonction de transfert se situe entre 2 et 13 mais les valeurs entre 6 et 8 me semblent être les plus vraisemblables.

Dans ce cas, les paramètres du système (le gain statique  $K$  et la constante de temps  $T$ ) peuvent être interprétés par les intervalles graduels trapézoïdaux suivants :

$$\mathbf{K}(\lambda) = [4\lambda+2, 13-5\lambda] = (7.5-0.5\lambda, 5.5-4.5\lambda) \text{ et } \mathbf{T}(\lambda) = [5\lambda+4, 17-5\lambda] = (11.5, 6.5-5\lambda)$$

Une implantation sur calculateur numérique d'une stratégie de commande sur ce procédé nous impose une discrétisation de la fonction de transfert. Dans ce cadre, l'exploitation de la méthode d'approximation du "rectangle inférieur" conduit à l'équation de récurrence suivante :

$$y_{k+1}(\lambda) = a_0(\lambda) \times y_k(\lambda) + b_0(\lambda) \times u_k(\lambda)$$

où  $u_k$  et  $y_k$  sont respectivement l'entrée et la sortie et les paramètres sont donnés par :

$$a_0(\lambda) = (T(\lambda)-T_e)/T(\lambda) \text{ et } b_0(\lambda) = K(\lambda).T_e/T(\lambda).$$

Si l'on choisit une période d'échantillonnage  $T_e = 1s$ , les paramètres  $a_0(\lambda)$  et  $b_0(\lambda)$  obtenus par un calcul dans IGP et IGE sont illustrés dans la figure 89. Il est clair que le résultat obtenu par un opérateur défini dans IGP peut conduire à l'instabilité du système. En effet, pour un degré de certitude sur le paramètre  $a_0(\lambda)$ , une valeur précise de ce paramètre (dans son intervalle d'imprécision) peut conduire à la divergence de la sortie (valeur du paramètre à l'extérieur du cercle unité). Le calcul IGE préserve cette stabilité (la valeur précise du paramètre est toujours à l'intérieur du cercle unité, quel que soit son degré de certitude).

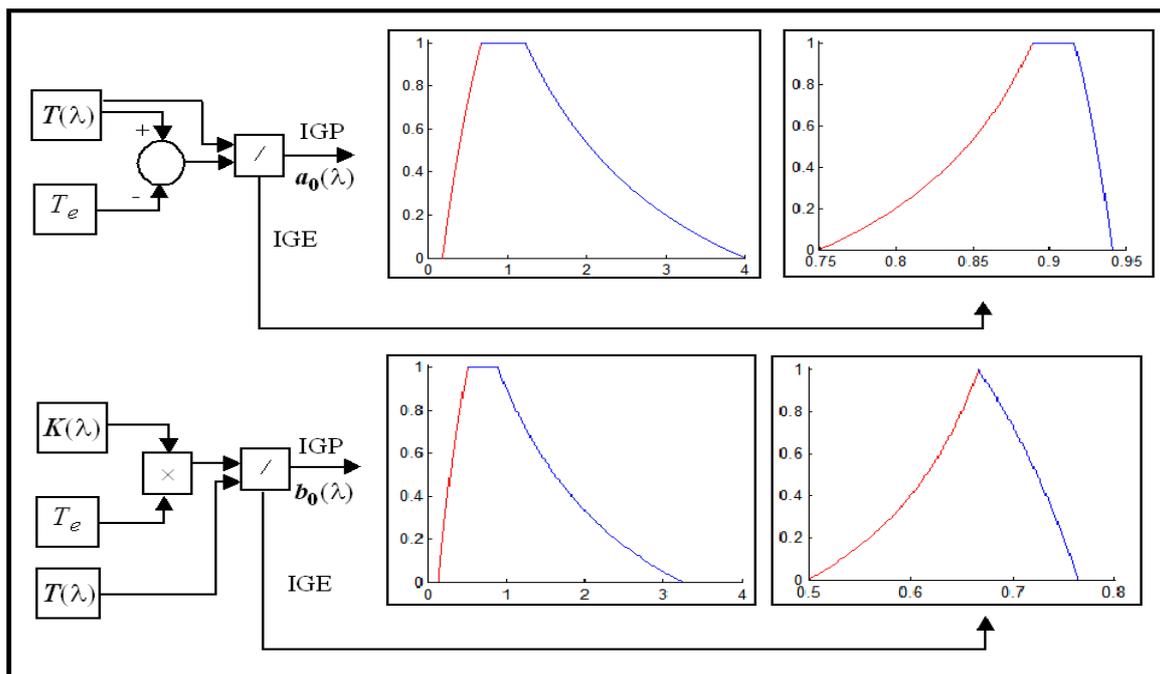


Figure 89 : Résultats de la discrétisation d'un modèle graduel.

### 2.3.3 Exemple 3

Cet exemple illustre des manipulations entre intervalles complexes où des quantités graduelles pures peuvent se produire. Considérons les intervalles graduels propres suivants (illustrés à la figure 90) :

$$a_1(\lambda) = (4-0.5.\sin(\lambda\pi), 2-2\lambda+0.5.\sin(\lambda\pi)) \text{ et } b_1(\lambda) = (-2.75-0.25\lambda, 1.25-1.25\lambda)$$

$$a_2(\lambda) = (-5\lambda^2 + 6\lambda+4, 2\lambda^2-9\lambda+7) \text{ et } b_2(\lambda) = (2, \cos(\pi.\lambda/2))$$

Les résultats des opérations sont illustrés dans les figures 91 et 92. Nous constatons que les opérations dans IGE peuvent conduire à des intervalles graduels purs, non représentables par des intervalles flous ou par des distributions de possibilité (cf. figure 91). De la même manière, les profils par morceaux issus d'un calcul IGP sont préservés dans les résultats IGE (cf. figure 92).

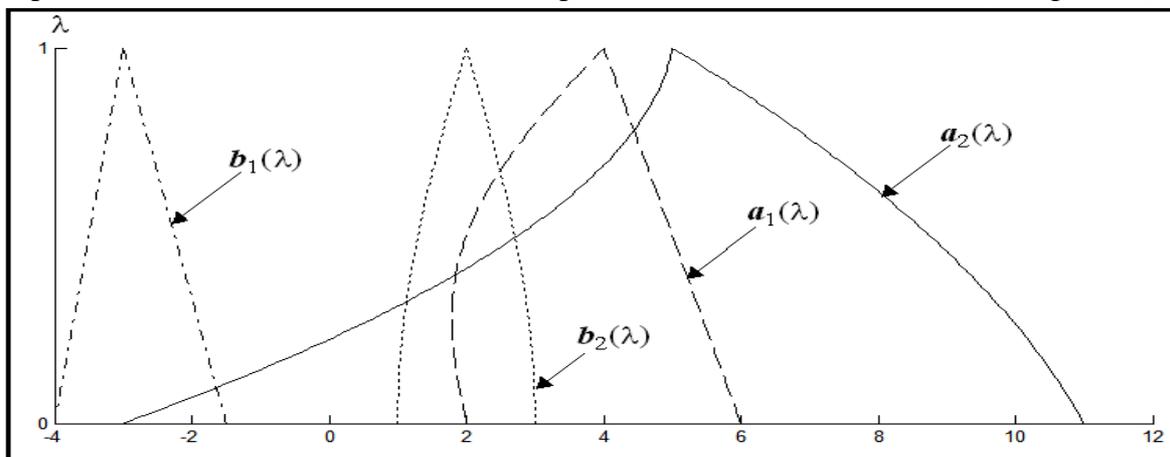


Figure 90 : représentation des intervalles graduels  $a_1(\lambda)$ ,  $b_1(\lambda)$ ,  $a_2(\lambda)$  et  $b_2(\lambda)$ .

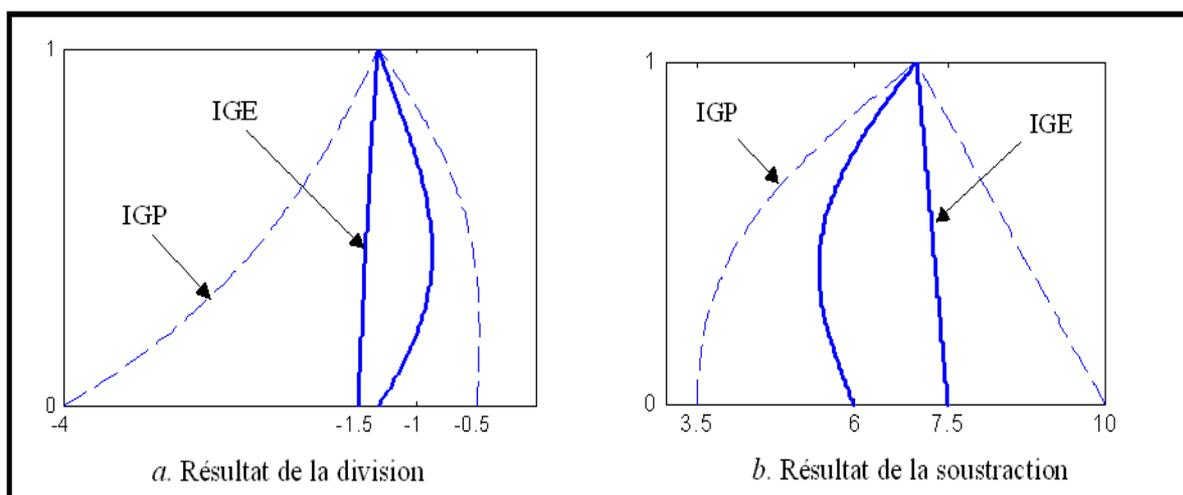


Figure 91 : Soustraction et division entre  $a_1(\lambda)$  et  $b_1(\lambda)$ .

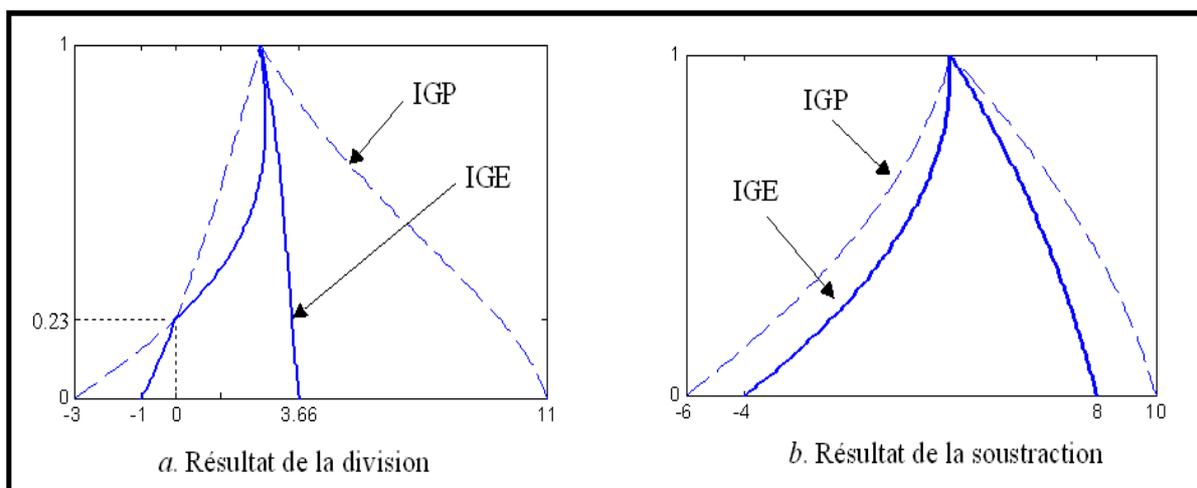


Figure 92 : Soustraction et division entre  $a_2(\lambda)$  et  $b_2(\lambda)$

### 2.3.4 Exemple 4

Cet exemple donne un aperçu de l'exploitation de l'opérateur de division étendue dans la résolution des équations floues linéaires. Considérons la résolution de l'équation floue  $\mathbf{a}(\lambda) \times x \subseteq \mathbf{b}(\lambda)$  donnée dans [128] où  $\mathbf{a}(\lambda)$  et  $\mathbf{b}(\lambda)$  sont des intervalles flous triangulaires,  $\mathbf{a}(\lambda)$  avec un support de [1, 3] et un noyau de {2};  $\mathbf{b}(\lambda)$  avec un support de [3, 5] et un noyau de {4}. Si on note  $\mathbf{x}(\lambda)$  l'ensemble des solutions de cette équation, cette dernière peut s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{a}(\lambda) \times \mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{b}(\lambda) \text{ et } \mathbf{x}(\lambda) = [x^-(\lambda), x^+(\lambda)] = \mathbf{b}(\lambda) / \mathbf{a}(\lambda) = (4, 1-\lambda) / (2, 1-\lambda)$$

Le résultat de cette opération est un intervalle graduel impropre car  $|RX_b(\lambda)| \leq |RX_a(\lambda)|$ . La solution  $\mathbf{x}(\lambda)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\lambda) &= \mathbf{b}(\lambda) / \mathbf{a}(\lambda) = \delta_a(\lambda) \times \mathbf{b}(\lambda) \times \text{dual}(\mathbf{a}(\lambda)) \\ &= ((\lambda^2 - 2\lambda - 7) / (\lambda^2 - 2\lambda - 3), 2 \cdot (1 - \lambda) / (\lambda^2 - 2\lambda - 3)) = [(\lambda + 3) / (\lambda + 1), (\lambda - 5) / (\lambda - 3)] \end{aligned}$$

Il est possible de constater que  $R_x(\lambda) \leq 0$  et les bornes de l'intervalle sont inversées (cf. figure 93.a). Dans ce cas, l'ensemble de solution  $\Omega_{\nabla\exists}$  telle que :  $x^-(\lambda) \leq x \leq x^+(\lambda)$  est réduit à  $x = \mathbf{x}(1)$ . Ce résultat est en adéquation avec la solution donnée dans [128].

Dans le même état d'esprit, considérons l'équation linéaire précédente dans le cas où  $\mathbf{a}(\lambda)$  et  $\mathbf{b}(\lambda)$  sont des intervalles flous triangulaires donnés par  $\mathbf{a}(\lambda) = (7, 5-5\lambda) = [5\lambda + 2, 12-5\lambda]$  et  $\mathbf{b}(\lambda) = (7, 5-3\lambda) = [3\lambda + 2, 12-3\lambda]$ . L'ensemble des solutions de cette équation est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\lambda) &= [x^-(\lambda), x^+(\lambda)] = \mathbf{b}(\lambda) / \mathbf{a}(\lambda) = (7, 5-3\lambda) / (7, 5-5\lambda) \\ &= ((15\lambda^2 - 40\lambda - 24) / (25\lambda^2 - 50\lambda - 24), (-14\lambda) / (25\lambda^2 - 50\lambda - 24)) = [(3\lambda + 2) / (5\lambda + 2), (3\lambda - 12) / (5\lambda - 12)] \end{aligned}$$

Le résultat de cette opération est un intervalle graduel propre car  $|RX_b(\lambda)| \geq |RX_a(\lambda)|$ . L'ensemble de solutions  $\Omega_{\nabla\exists}$ , équivalent à celui obtenu dans [128], s'exprime comme suit :

$$\Omega_{\nabla\exists} = \{x \mid (3\lambda + 2) / (5\lambda + 2) \leq x \leq (3\lambda - 12) / (5\lambda - 12)\}$$

Toutefois, il est possible de constater que  $\mathbf{x}(\lambda)$  est un intervalle graduel pur (cf. figure 93.b). Dans ce cas et comme discuté dans [128], la seule solution plausible est le singleton  $x = \mathbf{x}(0) = 1$ .

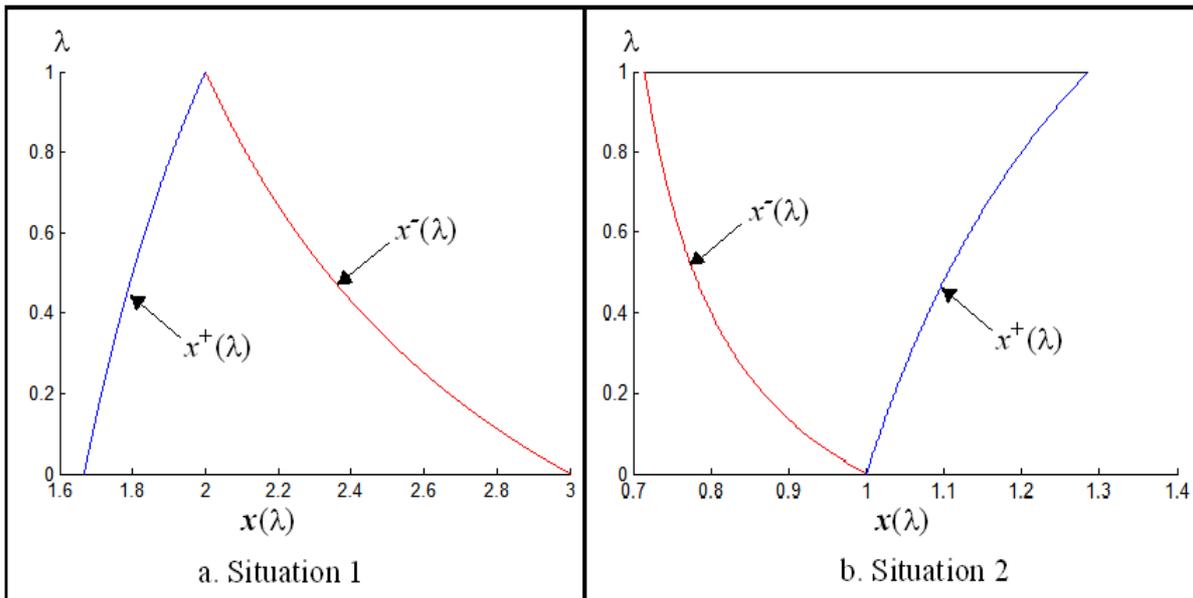


Figure 93 : Solutions de l'équation floue  $\mathbf{a}(\lambda) \times x \subseteq \mathbf{b}(\lambda)$ .

### 2.3.5 Exemple 5

Dans cet exemple, le possible passage par des formes graduelles intermédiaires impropres lors d'un calcul graduel est illustré. Evaluons maintenant la soustraction entre les deux intervalles graduels impropres  $b(\lambda)/a(\lambda)$  et  $b(\lambda)-a(\lambda)$  obtenus précédemment (cf. exemple 1, lorsque  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  sont permutés). Le résultat est résumé dans la figure 94. Bien que les deux quantités  $b(\lambda)/a(\lambda)$  et  $b(\lambda)-a(\lambda)$  soient impropres, le résultat de la fonction :

$$f(a(\lambda), b(\lambda)) = b(\lambda)/a(\lambda) - (b(\lambda)-a(\lambda))$$

est propre. En effet, dans l'évaluation des expressions mathématiques graduelles, des formes impropres intermédiaires peuvent survenir.

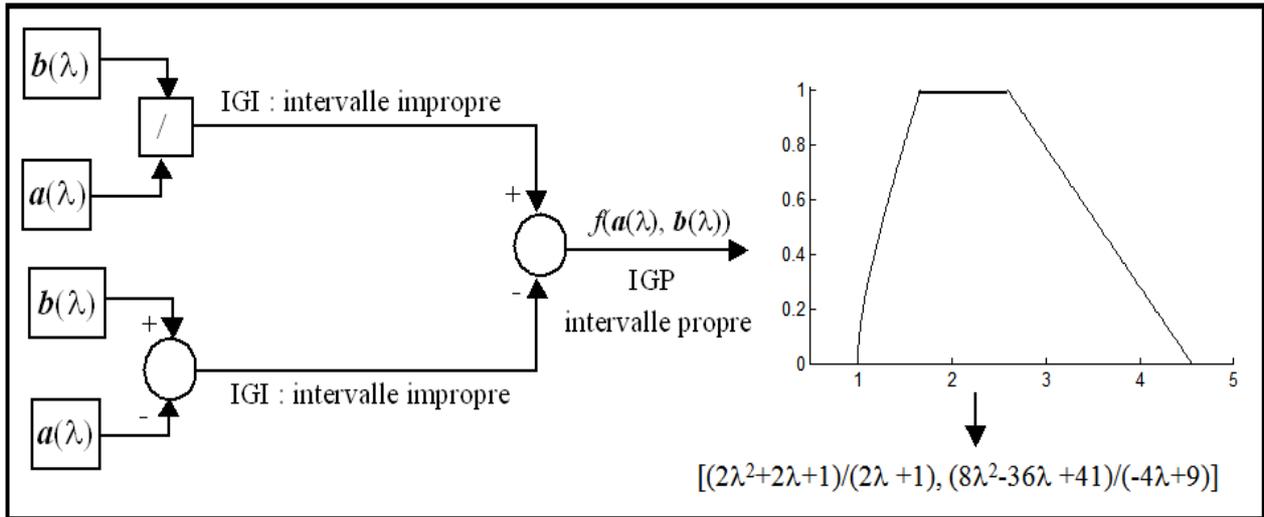


Figure 94 : Opérations entre quantités graduelles impropres.

### 2.3.6 Exemple 6

Cet exemple, extrait de notre publication [18], explicite la simplification de fonctions pour réduire les copies multiples d'une variable. Considérons les deux fonctions  $F$  et  $G$  données par :

$$F(a(\lambda), b(\lambda)) = 2 \times a(\lambda) - a(\lambda) \times b(\lambda) / b(\lambda) + b(\lambda) \quad \text{et} \quad G(a(\lambda), b(\lambda)) = a(\lambda) + b(\lambda)$$

Dans l'arithmétique ordinaire où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels, les fonctions  $F$  et  $G$  sont strictement égales. Cependant, dans l'arithmétique d'intervalles, ces deux fonctions ne sont pas équivalentes. En effet, la fonction  $F$  donne un résultat plus imprécis que celui produit par  $G$ . Ce problème bien connu est dû au fait que tous les intervalles sont traités en tant que variables indépendantes, y compris les copies doubles de la même variable. Dans ce cas, l'absence des opérations inverses ne permet pas les simplifications symboliques :

$$F(a(\lambda), b(\lambda)) = 2 \times a(\lambda) - \delta_b(\lambda) \times a(\lambda) \times b(\lambda) \times b(\lambda) + b(\lambda) \neq G(a(\lambda), b(\lambda))$$

En utilisant les intervalles graduels IGP définis dans l'illustration 1, on obtient le résultat suivant pour la fonction  $F$  :

$$F(a(\lambda), b(\lambda)) = ((-12\lambda^3 + 94\lambda^2 - 164.5\lambda + 48) / (2\lambda^2 - 3\lambda - 5), (-6\lambda^3 - 13\lambda^2 + 149.5\lambda - 162) / (2\lambda^2 - 3\lambda - 5))$$

Par application des opérateurs proposés dans IGE nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(a(\lambda), b(\lambda)) &= 2 \times a(\lambda) - \delta_b(\lambda) \times a(\lambda) \times b(\lambda) \times \text{dual}(b(\lambda)) + b(\lambda) \\ &= 2 \times a(\lambda) - \delta_b(\lambda) \times (1/\delta_b(\lambda), 0) \times a(\lambda) + b(\lambda) \end{aligned}$$

$$= 2 \times a(\lambda) - a(\lambda) + b(\lambda) = a(\lambda) + b(\lambda) = G(a(\lambda), b(\lambda)) = (8 - 1.5\lambda, 6 - 4.5\lambda)$$

Dans ce contexte, l'effet de surestimation induit par la copie multiple d'une variable a été éliminé.

## 2.4 Illustration 4 : Opérations *min* et *max* entre intervalles triangulaires

Dans chaque situation, le *min* et le *max* entre les intervalles sont calculés (cf. figures 95-102). Dans ce contexte, il est possible de constater les changements des relations partielles entre intervalles en fonction de l'intersection des profils ascendants (respectivement descendants).

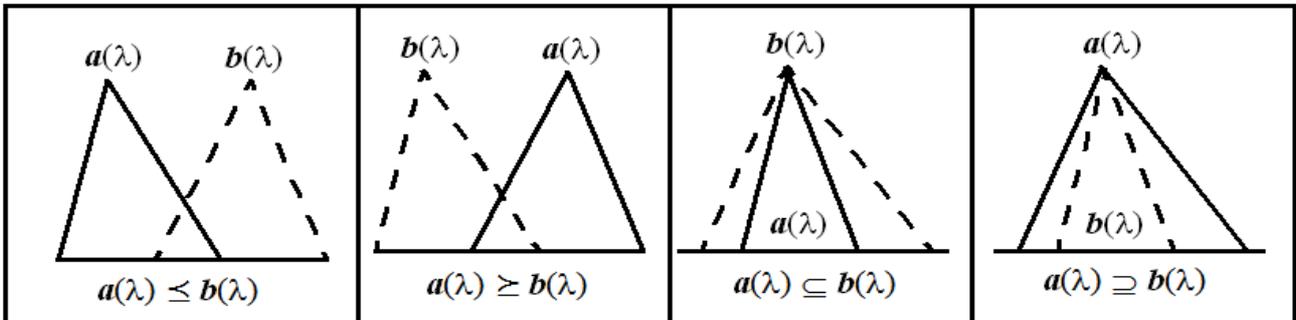


Figure 95 : Relations simples entre  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$ .

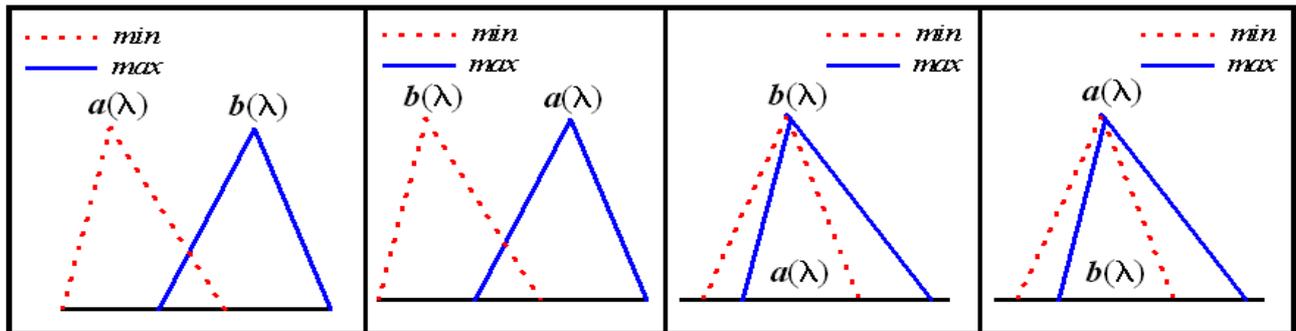


Figure 96 : Le *min* et le *max* entre  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  relatifs à la figure 95.

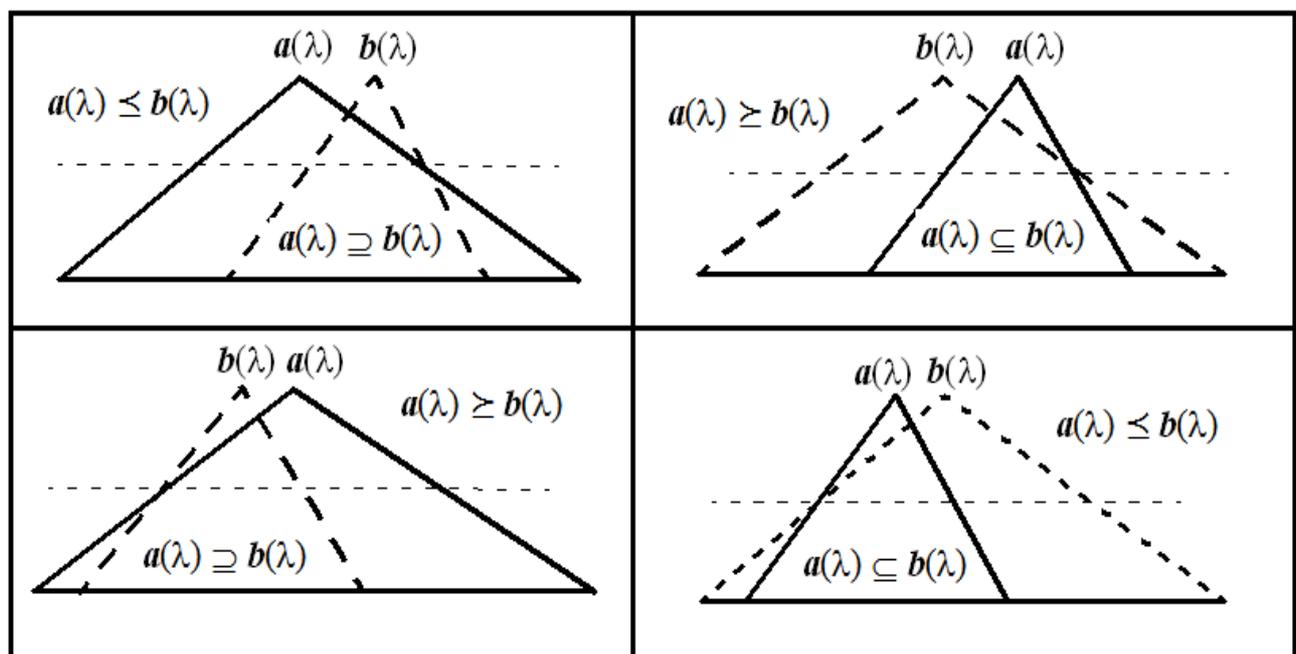


Figure 97 : Coexistence de deux relations entre  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$ .

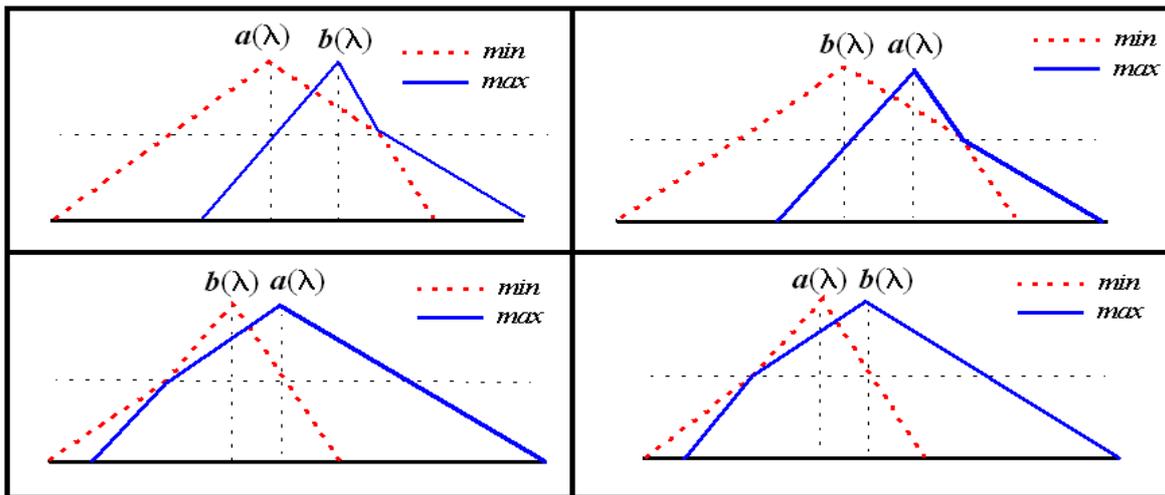


Figure 98 : Le *min* et le *max* entre  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  relatifs à la figure 97.

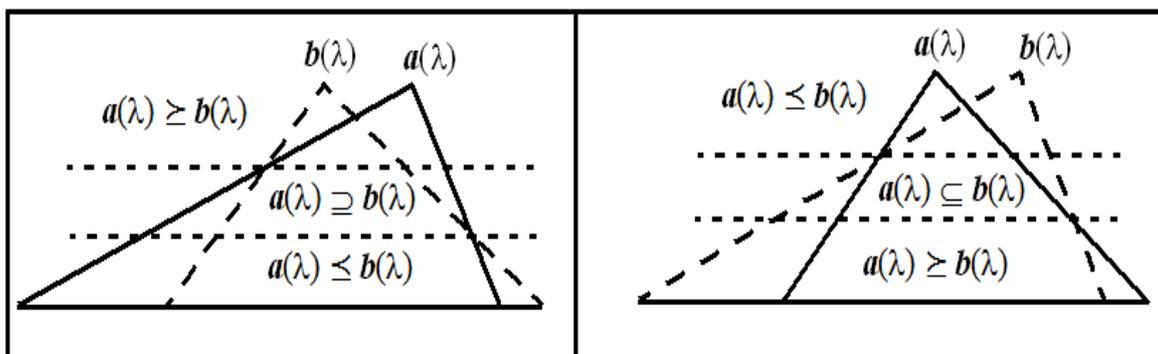


Figure 99 : Coexistence de trois relations entre  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$ .

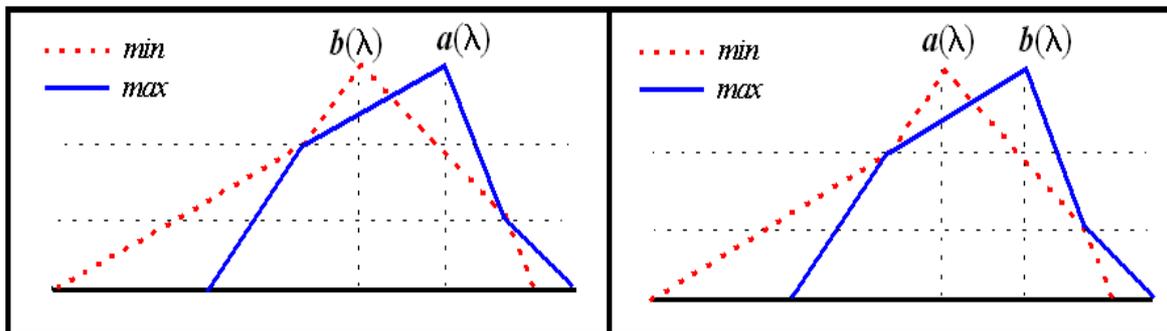


Figure 100 : Le *min* et le *max* entre  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  relatifs à la figure 99.

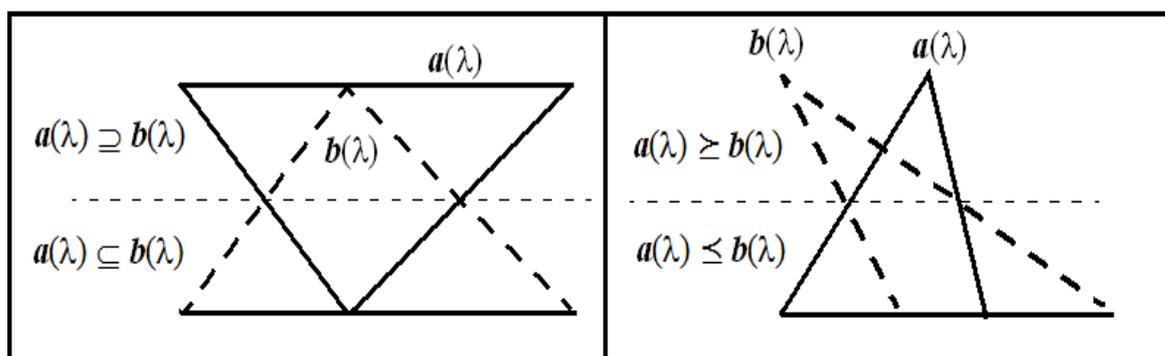


Figure 101 : Relations entre intervalles graduels purs.

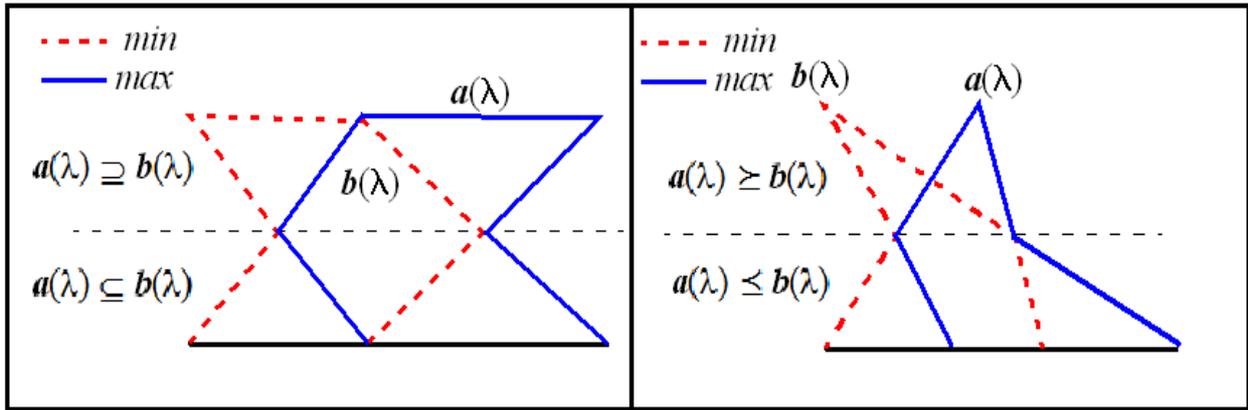


Figure 102 : Le *min* et le *max* entre  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  relatifs à la figure 101.

## 2.5 Illustration 5 : Mécanisme calculatoire du *min* et du *max*

Dans cette illustration, nous calculons le *min* et le *max* entre deux intervalles graduels  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  donnés par :

$$a(\lambda) = [4+4\lambda, 17-3\lambda] = (10.5+0.5\lambda, 6.5-3.5\lambda) ; \text{ et}$$

$$b(\lambda) = [2+11\lambda, 14-\lambda] = (8+5\lambda, 6-6\lambda)$$

Les points d'intersections entre profils sont donnés par :

$$a^-(\lambda) = b^-(\lambda) \Rightarrow \lambda = 2/7 ; \text{ et}$$

$$a^+(\lambda) = b^+(\lambda) \Rightarrow \lambda = 3/5$$

Les différentes opérations en fonction des relations partielles entre les intervalles sont illustrées dans la figure 103.

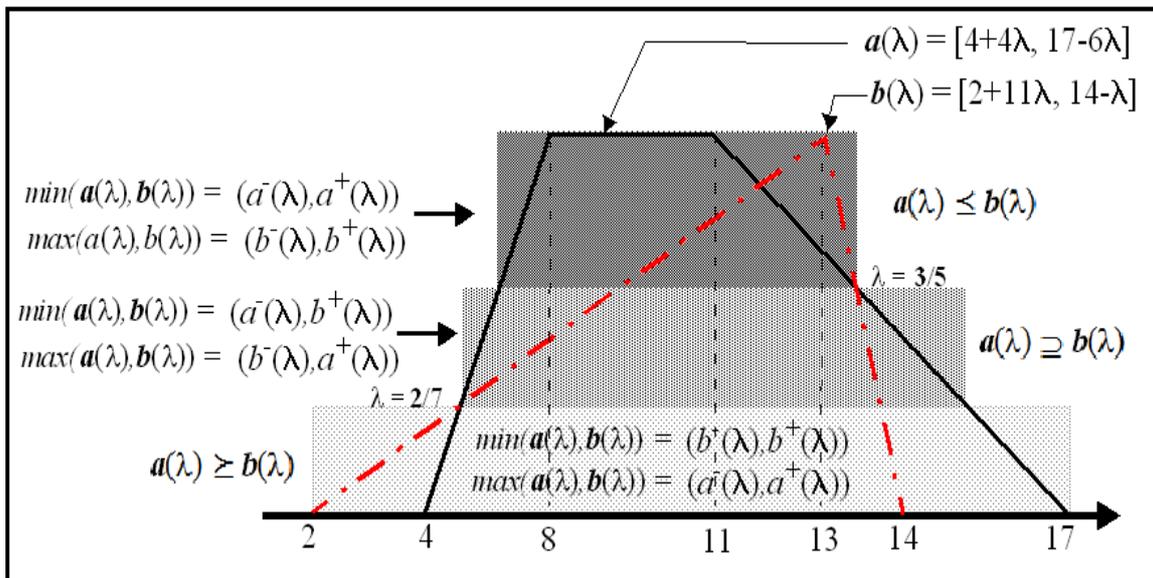


Figure 103 : Mécanisme calculatoire des opérateurs *min* et *max*.

Par application de l'expression générique donnée par l'équation (21), le résultat final illustré dans la figure 104 est obtenu. Il est important de signaler ici que cette procédure peut s'implémenter de manière récursive.

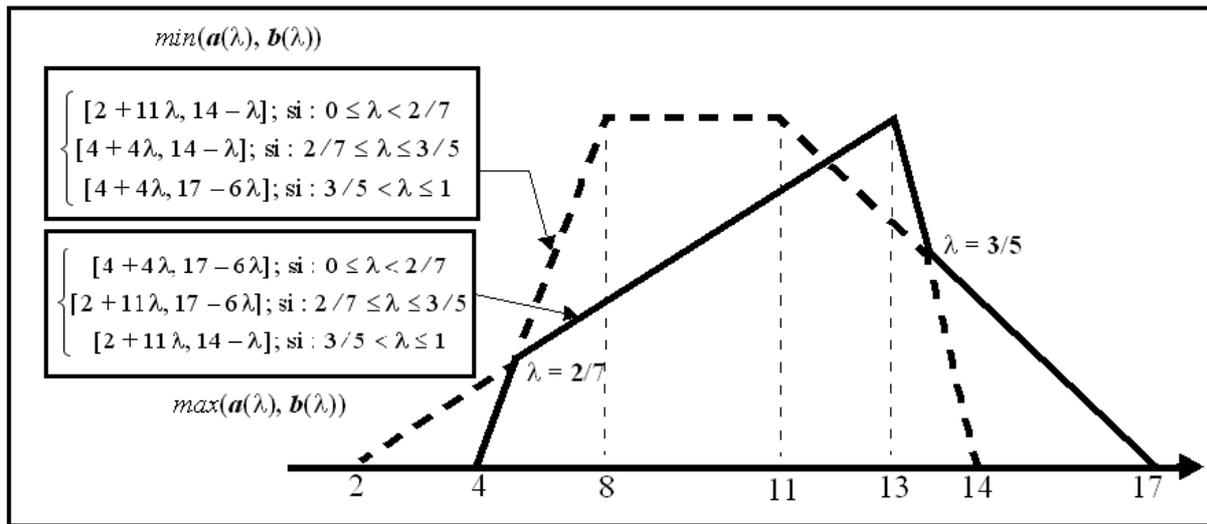


Figure 104 : Expression générique des opérateurs  $\min$  et  $\max$  entre  $a(\lambda)$  et  $b(\lambda)$ .

## 2.6 Illustration 6 : MGP - exemple 1

Cet exemple, extrait de [126], est traité dans notre publication [17] où les scores et les poids sont donnés dans le tableau 14 et tracés dans la figure 105. L'application de la MGP conduit au résultat suivant :

$$G(\lambda) = \text{MGP}(x_1(\lambda), \dots, x_5(\lambda), w_1(\lambda), \dots, w_5(\lambda)) = \left[ \frac{23\lambda^2 + 120\lambda + 140}{24 + 13\lambda}, \frac{20\lambda^2 - 207\lambda + 470}{56 - 19\lambda} \right]$$

Scores	Poids
$x_i = [x_i^-(\lambda), x_i^+(\lambda)] = (M_{x_i}(\lambda), R_{x_i}(\lambda))$	$w_i = [w_i^-(\lambda), w_i^+(\lambda)] = (M_{w_i}(\lambda), R_{w_i}(\lambda))$
$x_1 = [1+\lambda, 3-\lambda] = (2, 1-\lambda)$	$w_1 = [1+\lambda, 5-3\lambda] = (3-\lambda, 2-2\lambda)$
$x_2 = [2+3\lambda, 7-2\lambda] = (4.5+0.5\lambda, 2.5-2.5\lambda)$	$w_2 = [2+0.5\lambda, 3-0.5\lambda] = (2.5, 0.5-0.5\lambda)$
$x_3 = [6+2\lambda, 9-\lambda] = (7.5+0.5\lambda, 1.5-1.5\lambda)$	$w_3 = [4+3\lambda, 9-2\lambda] = (7.5-0.5\lambda, 2.5-1.5\lambda)$
$x_4 = [7+2\lambda, 10-\lambda] = (8.5+0.5\lambda, 1.5-1.5\lambda)$	$w_4 = [3+\lambda, 7-3\lambda] = (5-\lambda, 2-2\lambda)$
$x_5 = [10+\lambda, 12-\lambda] = (11, 1-\lambda)$	$w_5 = [2+\lambda, 4-\lambda] = (3, 1-\lambda)$

Tableau 14 : Scores et poids.

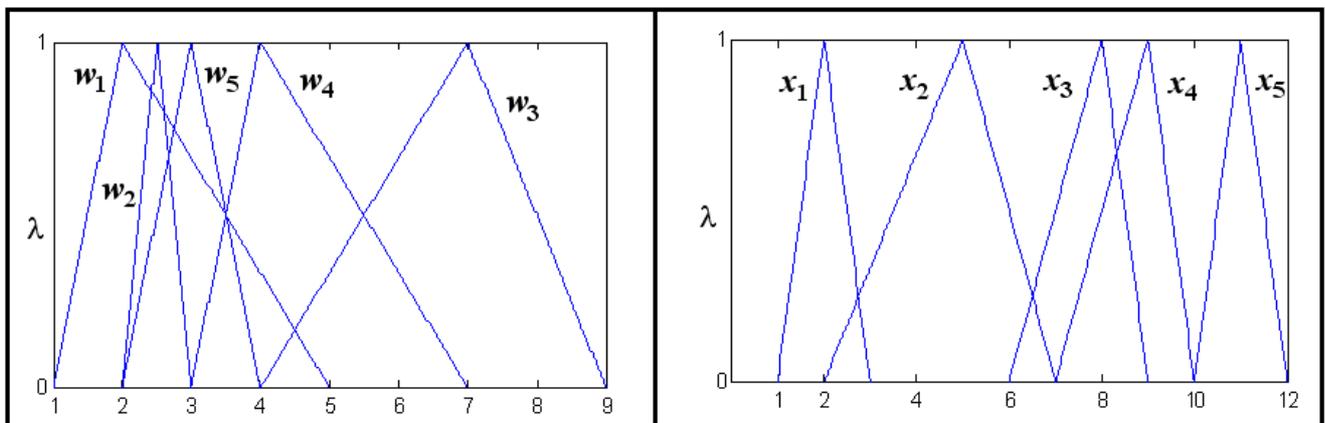


Figure 105 : Représentation graphique des scores et des poids.

On peut vérifier que  $G(\lambda) \in \text{IGP}$  car :

$$|RX_{num}(\lambda)| \geq |RX_{den}(\lambda)|.$$

En effet, les bornes de l'intervalle graduel  $G(\lambda)$  sont monotones. Ce dernier est représentable par une distribution de possibilité. Dans ce cas,  $G(\lambda)$  est un intervalle flou  $F(\lambda)$  et il peut être représenté par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_F(x) = \begin{cases} -60/23 + (13/46)x + (1/46)\sqrt{169x^2 - 912x + 1520} & \text{if : } 5.83 \leq x \leq 7.64 \\ 207/40 - (19/40)x - (1/40)\sqrt{361x^2 - 3386x + 5249} & \text{if : } 7.64 \leq x \leq 8.39 \end{cases}$$

Dans un but de comparaison, le tableau 15 et la figure 106 regroupent la *MFP* exacte selon le principe d'extension de Zadeh en appliquant l'algorithme récent de Karnik-Mendel [126], la *MGP* utilisant les opérateurs IGP et la *MGP* selon les opérateurs IGE.

Méthode	Borne inférieure	Borne supérieure	Support	Noyau
<b>MPF - IGP</b>	$\frac{23\lambda^2 + 120\lambda + 140}{56 - 19\lambda}$	$\frac{20\lambda^2 - 207\lambda + 470}{24 + 13\lambda}$	[2.50, 19.58]	7.64
<b>MPF Liu, Mendel et Wu [126]</b>	$\frac{9\lambda^2 + 122\lambda + 152}{34 + 3\lambda}$	$\frac{-2\lambda^2 - 57\lambda + 342}{36 + \lambda}$ ; si $0 \leq \lambda < 0.588$ $\frac{8\lambda^2 - 157\lambda + 432}{46 - 9\lambda}$ ; si $0.588 \leq \lambda \leq 1$	[4.47, 9.5]	7.64
<b>MGP - IGE</b>	$\frac{23\lambda^2 + 120\lambda + 140}{24 + 13\lambda}$	$\frac{20\lambda^2 - 207\lambda + 470}{56 - 19\lambda}$	[5.83, 8.39]	7.64

Tableau 15 : Comparaison analytique entre la *MPF* et la *MGP* (exemple 1).

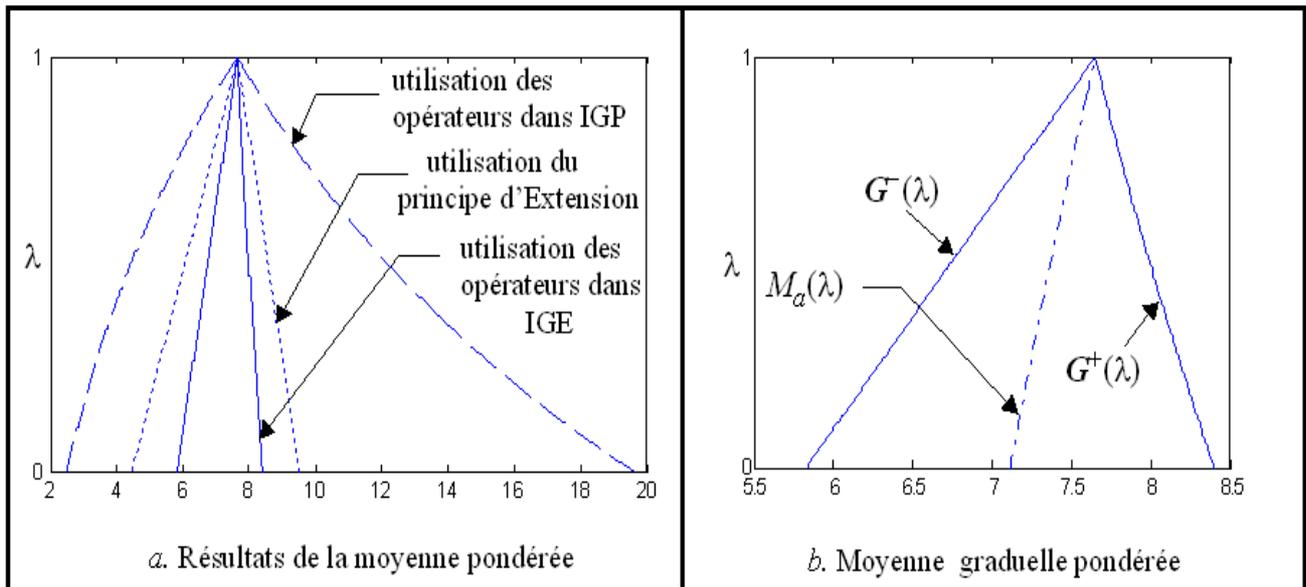


Figure 106 : Comparaison graphique entre la *MPF* et la *MGP* (exemple 1).

On peut constater que pour  $\lambda = 1$ , toutes les approches donnent le même résultat, *i.e.* la moyenne pondérée pour des nombres réels précis. Pour les autres valeurs de  $\lambda$ , selon l'indicateur d'inclusion, il est possible de constater  $MPF_{IGP} \supseteq MPF_{Zadeh} \supseteq MGP_{IGE}$ . D'une manière évidente, le résultat obtenu par les opérateurs IGE est moins imprécis que les autres solutions. Dans ce cas, il est possible de quantifier le gain en précision à travers l'indicateur  $\Xi_{\bullet}(\lambda)$  (cf. paragraphe 2.8.1.2).

## 2.7 Illustration 7 : MGP - Exemple 2

Cet exemple, largement traité dans la littérature [44][105][126], est publié dans notre article [17]. Les scores et les poids de sont donnés dans le tableau 16 et dans la figure 107.

Scores	Poids
$x_i = [x_i^-(\lambda), x_i^+(\lambda)] = (M_{x_i}(\lambda), R_{x_i}(\lambda))$	$w_i = [w_i^-(\lambda), w_i^+(\lambda)] = (M_{w_i}(\lambda), R_{w_i}(\lambda))$
$x_1 = [\lambda, 2-\lambda] = (2, 1-\lambda)$	$w_1 = [0.3\lambda, 0.9-0.6\lambda] = (0.45-0.15\lambda, 0.45-0.45\lambda)$
$x_2 = [2+\lambda, 4-\lambda] = (3, 1-\lambda)$	$w_2 = [0.4+0.3\lambda, 1-0.3\lambda] = (0.7, 0.3-0.3\lambda)$
$x_3 = [4+\lambda, 6-\lambda] = (5, 1-\lambda)$	$w_3 = [0.6+0.2\lambda, 1-0.2\lambda] = (0.8, 0.2-0.2\lambda)$

Tableau 16 : Scores et poids.

Le tableau 17 et la figure 108 regroupent les résultats de la *MFP* et la *MGP*.

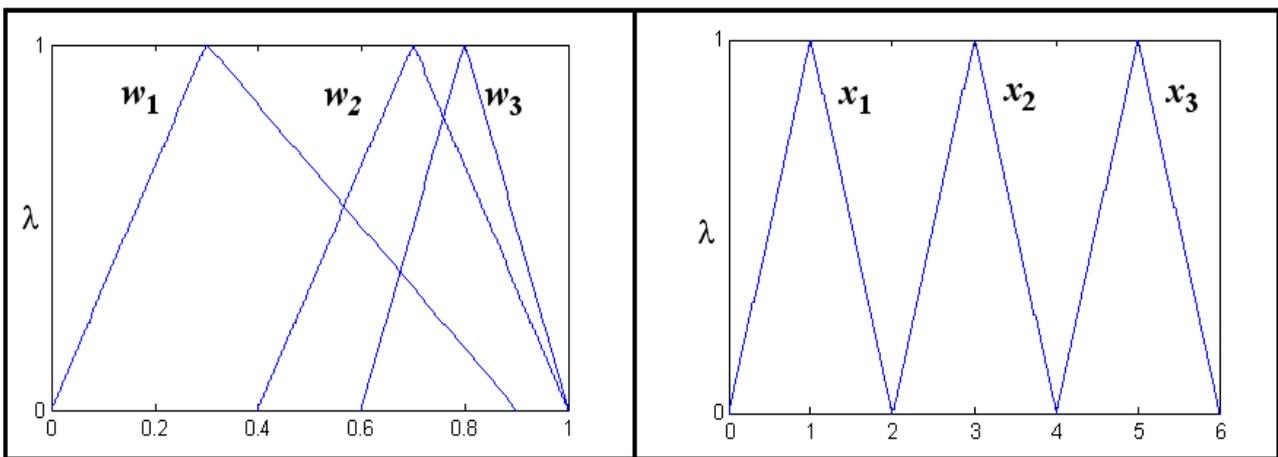


Figure 107 : Représentation graphique des scores et des poids.

Méthode	Borne inférieure	Borne supérieure	Support	Noyau
<b>MPF - IGP</b>	$\frac{8\lambda^2 + 24\lambda + 32}{29 - 11\lambda}$	$\frac{5.5\lambda^2 - 32.5\lambda + 59}{5 + 4\lambda}$	[1.10, 11.80]	3.55
<b>MPF Liu, Mendel et Wu [126]</b>	$\frac{-\lambda^2 + 33\lambda + 32}{19 - \lambda}$ ; if $0 \leq \lambda < 0.375$ $\frac{-7\lambda^2 + 27\lambda + 44}{25 - 7\lambda}$ ; if $0.375 \leq \lambda \leq 1$	$\frac{-2\lambda^2 - 4\lambda + 38}{7 + 2\lambda}$	[1.68, 5.42]	3.55
<b>MGP - IGE</b>	$\frac{4\lambda^2 + 12\lambda + 16}{5 + 4\lambda}$	$\frac{11\lambda^2 - 65\lambda + 118}{29 - 11\lambda}$	[3.2, 4.07]	3.55

Tableau 17 : Comparaison analytique entre la *MPF* et la *MGP* (exemple 2).

En inspectant le résultat de la *MGP*, nous remarquons que sa borne inférieure, c'est-à-dire le nombre graduel  $G^-(\lambda)$ , n'est pas monotone. L'intervalle graduel  $G(\lambda)$  n'étant pas un intervalle flou, une approximation floue  $F(\lambda)$  est alors recherchée afin de pouvoir interpréter celle-ci comme une distribution de possibilité. Comme discuté précédemment, la forme de l'intervalle  $G(\lambda)$  est supposée pour  $F(\lambda)$  et le problème d'approximation est vu comme un problème d'estimation paramétrique. Dans ce cas l'intervalle flou recherché est choisi sous la forme :

$$F(\lambda) = [g_1\lambda^2 + g_2\lambda + g_3 / g_4\lambda + g_3, d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3 / d_4\lambda + d_3]$$

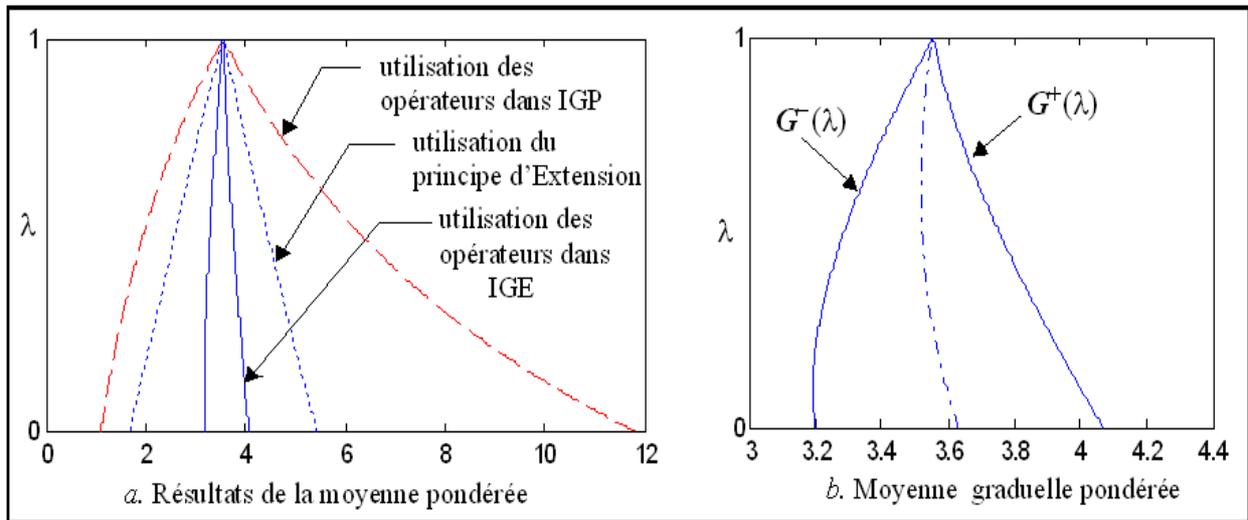


Figure 108 : Comparaison analytique entre la *MPF* et la *MGP* (exemple 1).

Dans la méthode de régression, les paramètres des profils gauche ( $g_1, \dots, g_5$ ) et droite ( $d_1, \dots, d_5$ ) de  $F(\lambda)$  sont obtenus par la méthode d'optimisation décrite dans le paragraphe 2.7.1. Dans la procédure d'implantation, les paramètres à identifier ont été initialisés aléatoirement entre 2 et 5 et le pas de discrétisation de  $\lambda$  a été fixé à 0.01.

L'intervalle flou obtenu est donné par :

$$F(\lambda) = [(3.76\lambda^2 + 5.88\lambda + 26.24)/(1.84\lambda + 8.24), (1.72\lambda^2 - 10.17\lambda + 18.51)/(-1.72\lambda + 4.55)]$$

Cet intervalle est également représenté dans la figure 109 où le critère d'optimisation a atteint une valeur pratiquement nulle. Nous pouvons également vérifier que le profil droite de  $F(\lambda)$  a rejoint celui de  $G(\lambda)$ , monotone à l'origine.

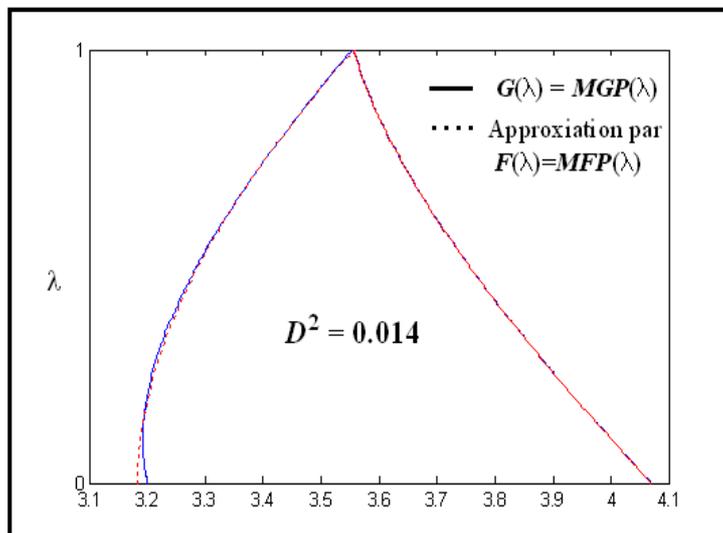


Figure 109 : Approximation d'un intervalle graduel par un intervalle flou

Dans des situations pratiques, une forme linéaire plus simple peut être souhaitée et recherchée pour l'intervalle flou  $F(\lambda)$ . Toutefois, les performances de l'approximation seront dégradées. Ce choix conduit à imposer l'expression paramétrique  $F(\lambda) = [g_1 + g_2\lambda, d_1 + d_2\lambda]$ . Le problème d'optimisation sous contraintes conduit à l'obtention des résultats illustrés dans la figure 110, avec ou sans relaxation de la condition de ressemblance.

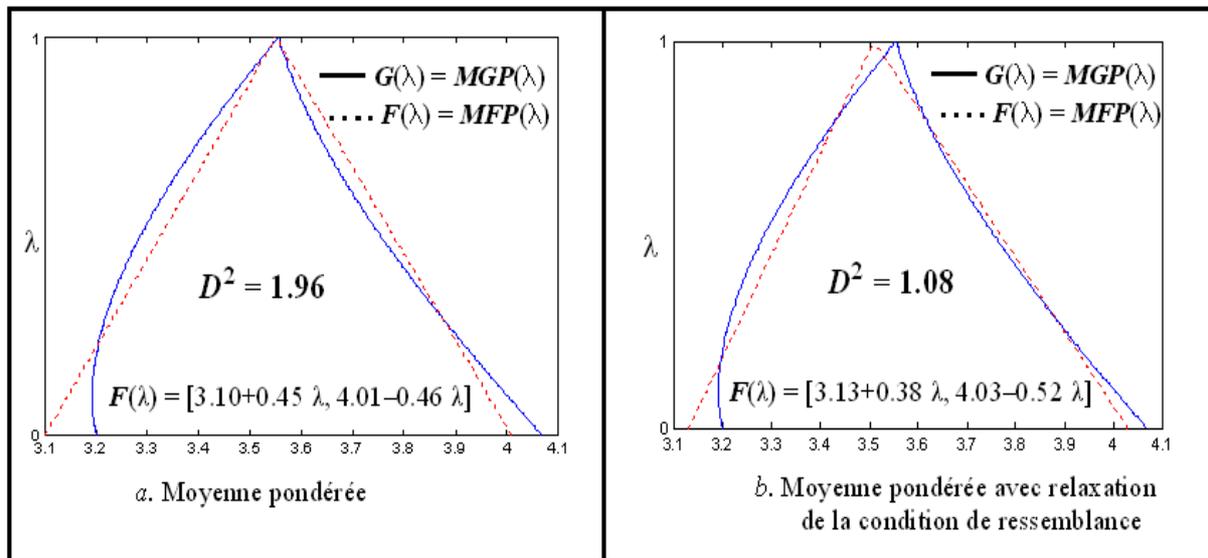


Figure 110 : Approximation d'un intervalle graduel par un intervalle flou triangulaire.

## 2.8 Illustration 8 : Inversion graduelle à gauche

Afin d'illustrer ce principe d'inversion, considérons le problème simple du producteur-consommateur [123][203]. Cet exemple est extrait de notre article [18]. Dans un contexte économique, il est bien connu que la fonction d'approvisionnement qui décrit la relation entre le prix  $x$  d'un produit et les quantités  $q_s$  que les producteurs veulent vendre à ce prix puisse être interprétée comme un modèle régressif d'ordre 1, donné par :

$$q_s = b_0 + b_1 \cdot x, \text{ où } : b_0 > 0 \text{ et } b_1 > 0.$$

En pratique, les paramètres de ce modèle ne sont pas stables. De plus, ils sont rarement connus avec exactitude et plus particulièrement dans le cas où les capacités d'approvisionnement sont imprécises. Cette imperfection est due non seulement à un manque d'informations sur les comportements des consommateurs mais elle peut être aussi la conséquence d'une certaine flexibilité que l'entreprise se donne en prévoyant ses capacités. Dans ce cadre, le modèle précis précédent est remplacé par un modèle graduel qui s'exprime comme suit :

$$q_s(\lambda) = \mathbf{b}_0(\lambda) + \mathbf{b}_1(\lambda) \times x(\lambda).$$

Supposons que les paramètres  $\mathbf{b}_0(\lambda)$  et  $\mathbf{b}_1(\lambda)$ , représentant l'élasticité du modèle, aient été déterminés par des experts économiques ou identifiés par une méthode de régression, *i.e.*

$$\mathbf{b}_0(\lambda) = (10, 2 - 2\lambda) \text{ et } \mathbf{b}_1(\lambda) = (2, 0.5 - 0.5\lambda)$$

Dans ce contexte, supposer que les paramètres sont des intervalles graduels mène à considérer que la quantité  $q_s$  est également graduelle. Cette dernière est vue comme la flexibilité souhaitée pour une capacité d'approvisionnement. Dans ce cas, l'objectif peut être rattaché à la détermination de l'élasticité des prix qui va refléter la flexibilité envisagée. Cet objectif est atteint par une inversion du modèle graduel précédent, *i.e.* :

$$x(\lambda) = (q_s(\lambda) - \mathbf{b}_0(\lambda)) / \mathbf{b}_1(\lambda).$$

Comme discuté précédemment, cette solution s'interprète comme l'ensemble de solutions  $x$  :  $x^-(\lambda) \leq x \leq x^+(\lambda)$  de l'équation  $\mathbf{b}_0(\lambda) + \mathbf{b}_1(\lambda) \times x \subseteq q_s(\lambda)$ .

Par exemple, si la capacité d'approvisionnement est choisie égale à  $q_s(\lambda) = (16, 4 - 4\lambda)$  alors l'élasticité des prix correspondante est donnée par :

$$x(\lambda) = ((16, 4 - 4\lambda) - (10, 2 - 2\lambda)) / (2, 0.5 - 0.5\lambda) = \left( \frac{4(11 + 2\lambda - \lambda^2)}{15 + 2\lambda - \lambda^2}, \frac{4(1 - \lambda)}{15 + 2\lambda - \lambda^2} \right)$$

Comme illustré à la figure 111, pour la capacité d'approvisionnement  $q_s(\lambda)$ , l'élasticité des prix est un intervalle graduel propre.

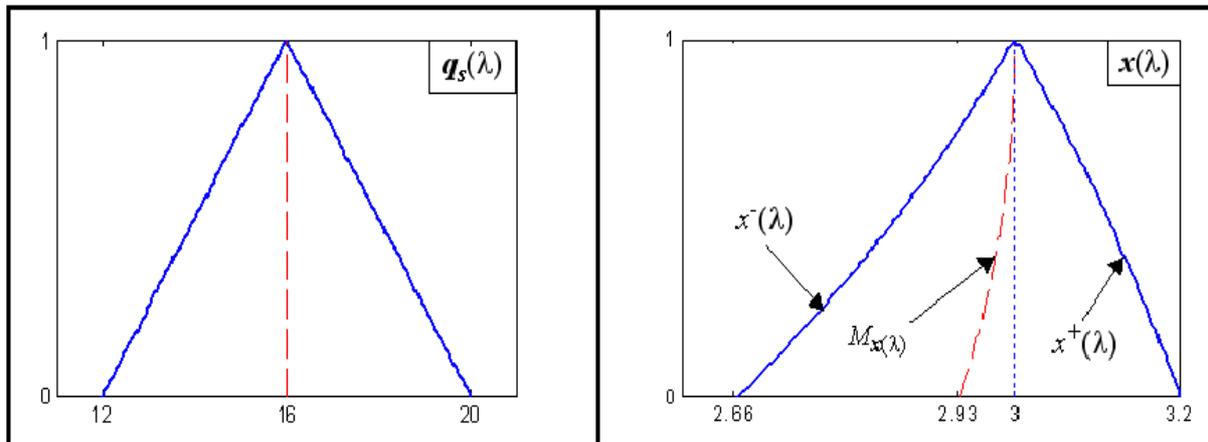


Figure 111 : La quantité et l'élasticité du prix correspondante.

Dans un contexte général, ce résultat n'est pas toujours vrai. En effet,  $x(\lambda) \in \text{IGP}$  si et seulement si la condition (23) est respectée. Cette dernière s'interprète comme suit :

$$R_{q_s}(\lambda) \geq R_{b_0}(\lambda) + |M_{q_s}(\lambda) - M_{b_0}(\lambda)| \times |RX_{b_1}(\lambda)| \Rightarrow R_{q_s}(\lambda) \geq 3.5 - 3.5\lambda$$

Cette condition est une limite inférieure assurant une solution graduelle propre. Une limite supérieure vue comme une contrainte de saturation peut également être imposée sur l'élasticité des prix afin de garantir des valeurs acceptables et raisonnables (zone de saturation). Supposons que l'imprécision sur le prix soit contrainte par  $x(\lambda) \leq S(\lambda)$ . Si nous fixons  $S(\lambda) = (2 - 2\lambda)$  nous obtenons le résultat suivant :

$$R_{q_s}(\lambda) \leq 0.25\lambda^3 - 0.75\lambda^2 - 6.75\lambda + 7.25$$

Enfinement et comme illustré dans la figure 112, l'élasticité du prix est imposée par les deux contraintes précédentes, *i.e.*

$$3.5 - 3.5\lambda \leq R_{q_s}(\lambda) \leq 0.25\lambda^3 - 0.75\lambda^2 - 6.75\lambda + 7.25$$

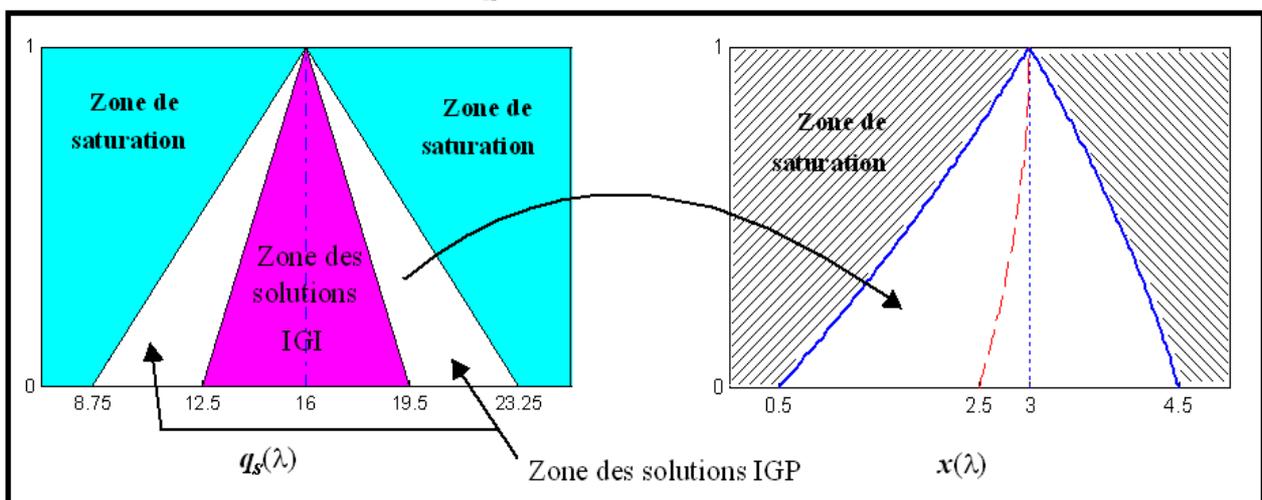


Figure 112 : Les quantités et les élasticités des prix atteignables.

La figure 112 donne toutes les quantités graduelles admissibles au sens des conditions (23) et la contrainte de saturation. Dans ce cadre, pour toute flexibilité imprécise et incertaine, sa propagation sur l'élasticité du prix peut être déterminée et donnée sous forme graduelle.

## 2.9 Illustration 9 : Intégrale de Choquet 2-additive

Pour illustrer ce calcul graduel, considérons le cas de trois critères ( $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ) avec leurs distributions de possibilité. Ces dernières sont représentées par des intervalles graduels  $a_1(\lambda)$ ,  $a_2(\lambda)$  et  $a_3(\lambda)$  illustrées dans la figure 113.

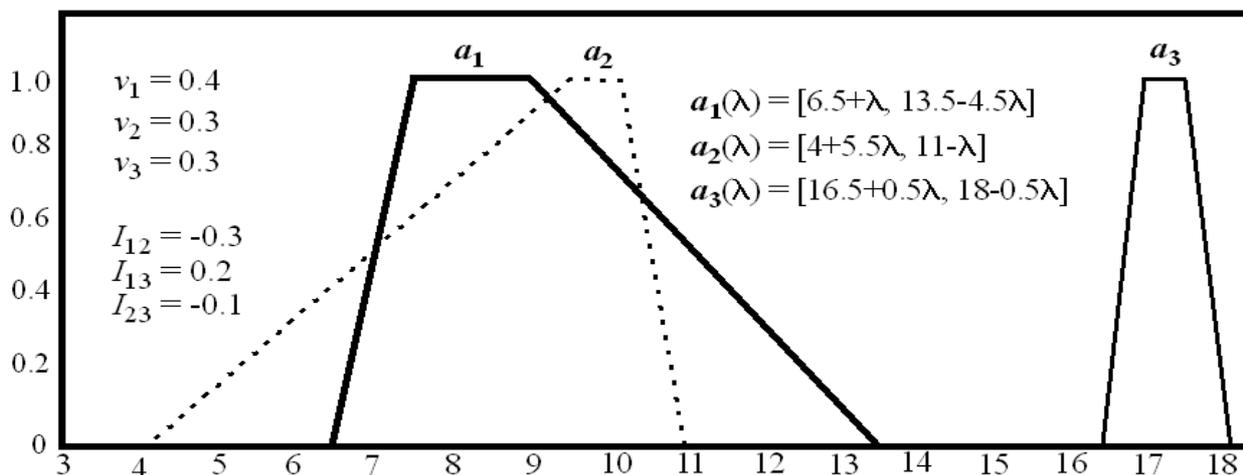


Figure 113 : Paramètres de l'intégrale de Choquet 2-additive.

L'expression de l'intégrale de Choquet est donnée par :

$$IC(a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda)) = 0.2 \cdot \min(a_1(\lambda), a_3(\lambda)) + 0.3 \cdot \max(a_1(\lambda), a_2(\lambda)) + 0.1 \cdot \max(a_2(\lambda), a_3(\lambda)) + 0.15 a_1(\lambda) + 0.25 a_2(\lambda) + 0.3 a_3(\lambda)$$

Le résultat final après propagation est donné par l'intervalle suivant (cf. figure 114).

$$IC(a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda)) = \begin{cases} [15.125 + 2.325 \cdot \lambda, 22.325 - 3.475 \cdot \lambda] & ; \text{si } 0 \leq \lambda < 5/9 \\ [14.375 + 3.675 \cdot \lambda, 22.325 - 3.475 \lambda] & ; \text{si } 5/9 \leq \lambda \leq 5/7 \\ [14.375 + 3.675 \cdot \lambda, 21.575 - 2.425 \cdot \lambda] & ; \text{si } 5/7 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

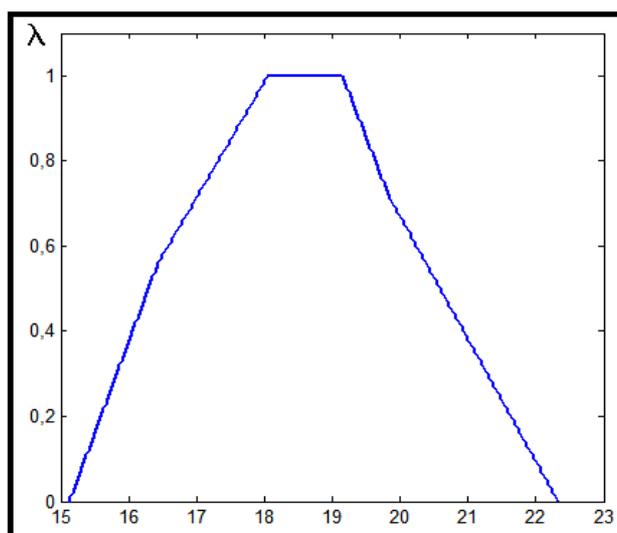


Figure 114 : Résultat de l'agrégation par l'intégrale de Choquet 2-additive.



## Annexe 3 : Illustrations du chapitre 3

### 3.1 Illustration 1 : Régression possibiliste linéaire – Tendances du modèle

Dans cette illustration extraite de [13], le jeu de données présenté dans le tableau 18 est considéré [191][204]. Les entrées sont précises et les sorties sont imprécises et représentées par des intervalles. L'intervalle de définition du modèle est défini par  $D = [5, 17]$ .

$j$	1	2	3	4	5
Entrée	5	8	11	14	17
Sortie	$[3,11] = (7, 2)$	$[8,10] = (9,1)$	$[9,11] = (10, 1)$	$[7,15] = (11, 4)$	$[4, 22] = (13, 9)$

Tableau 18 : Entrées précises et sorties imprécises.

Comme illustré dans la figure 115, deux tendances des imprécisions sont nettement visibles. En effet, la tendance de la sortie est d'abord décroissante, puis croissante. Le point de rupture correspond à l'entrée  $x = 11$  (indice  $j = 3$ ).

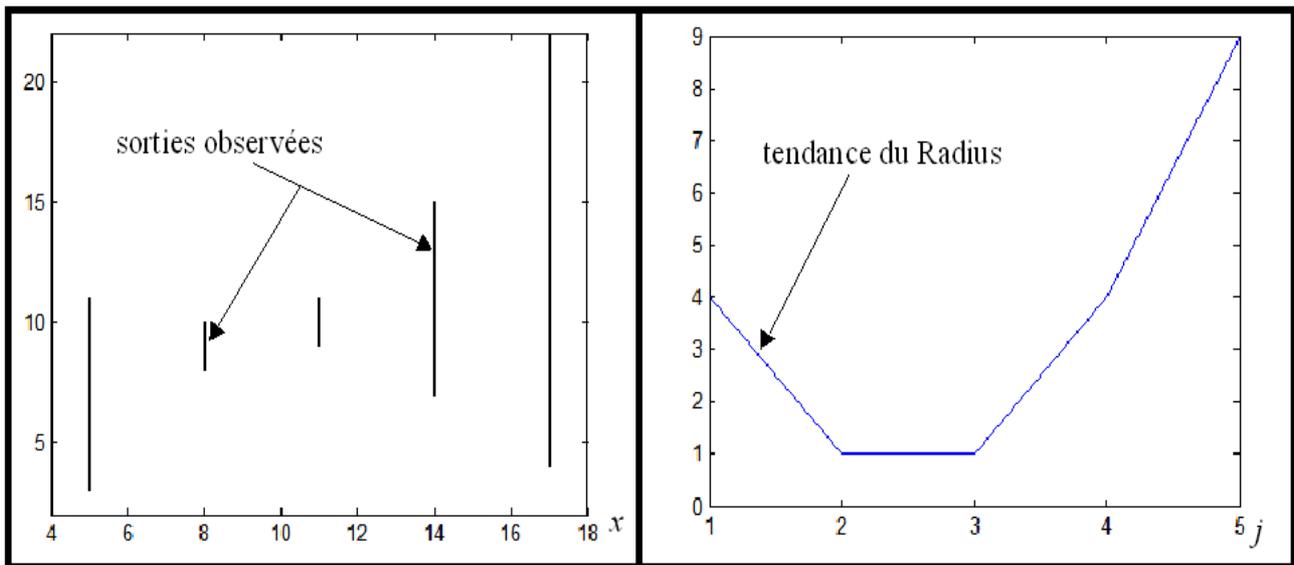


Figure 115 : Sorties observées et tendance des imprécisions.

Afin de pouvoir représenter les deux tendances, un modèle linéaire par morceaux est identifié. Ce dernier est composé de deux sous-modèles linéaires indépendants. Les résultats de la régression possibiliste sont donnés dans la figure 116 avec et sans le paramètre de décalage.

Il est important de mentionner ici que la quasi-totalité des méthodes de régression possibiliste publiées dans la littérature aboutissent au modèle décrit par la figure 116.a où la variation de l'imprécision est clairement mal appréhendée. Il est clair que la méthode proposée (cf. figure 116.b) est mieux armée pour exhiber la variabilité et les tendances des imprécisions.

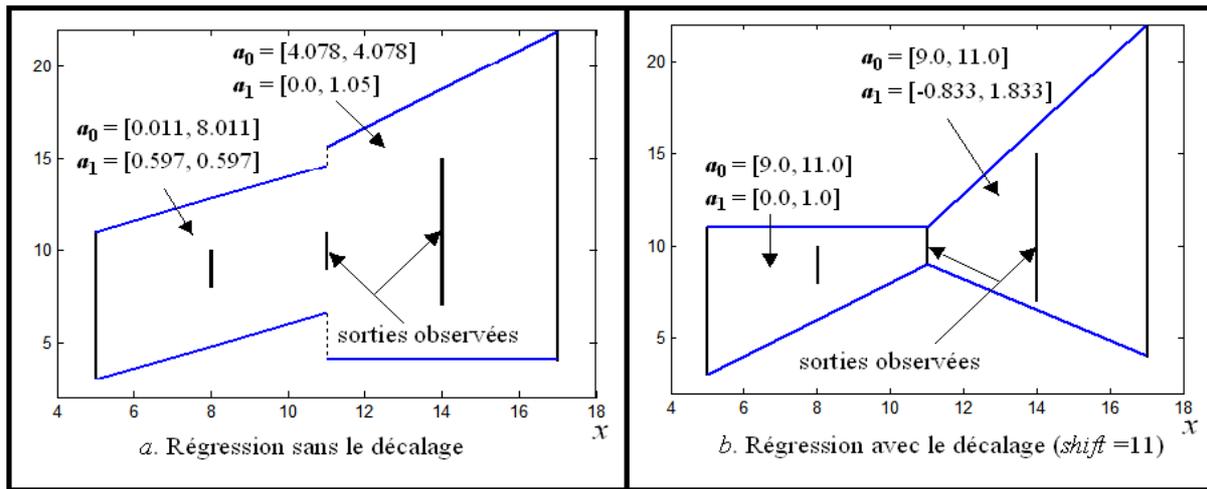


Figure 116 : Régression possibiliste avec et sans décalage.

### 3.2 Illustration 2 : Régression possibiliste - Représentation MR

Prenons maintenant le jeu de données (cf. tableau 19) exploité dans [92] et traité dans notre article [19]. Les entrées et les sorties sont imprécises et représentées par des intervalles. A partir des données, l'intervalle  $D$  est égal à  $[1.5, 13] = (7.25, 5.75)$  et le domaine de définition  $\Delta$  est représenté dans la figure 117.

$j$	Entrées	Sorties
1	$[1.5, 2.5] = (2, 0.5)$	$[3.5, 4.5] = (4, 0.5)$
2	$[3, 4] = (3.5, 0.5)$	$[5, 6] = (5.5, 0.5)$
3	$[4.5, 6.5] = (5.5, 1)$	$[6.5, 8.5] = (7.5, 1)$
4	$[6.5, 7.5] = (7, 0.5)$	$[6, 7] = (6.5, 0.5)$
5	$[8, 9] = (8.5, 0.5)$	$[8, 9] = (8.5, 0.5)$
6	$[9.5, 11.5] = (10.5, 1)$	$[7, 9] = (8, 1)$
7	$[10.5, 11.5] = (11, 0.5)$	$[10, 11] = (10.5, 0.5)$
8	$[12, 13] = (12.5, 0.5)$	$[9, 10] = (9.5, 0.5)$

Tableau 19 : Entrées et sorties imprécises.

Nous cherchons ici à identifier un modèle linéaire d'ordre 1 par l'approche possibiliste. Les résultats obtenus sont illustrés dans la figure 117.

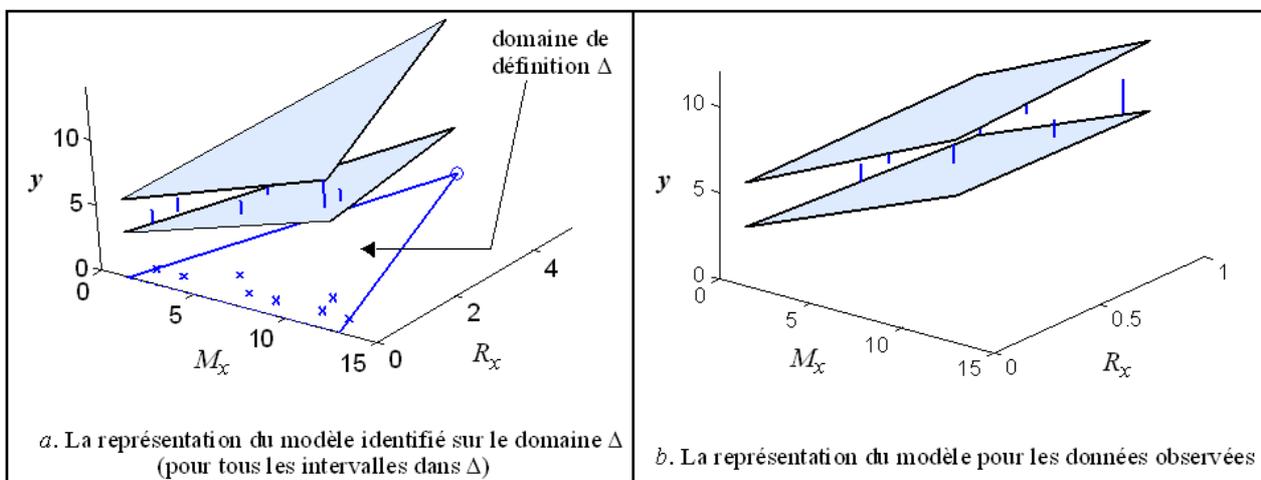


Figure 117 : Représentation du domaine sur son domaine de définition.

Le modèle identifié est alors donné dans l'espace  $MR$  par :

$$y(x) = a_0 + a_1 \times x = (4.047, 1.203) + (0.469, 0.031) \times x$$

Les évolutions du Radius et du Midpoint de la sortie sont illustrées dans la figure 118.

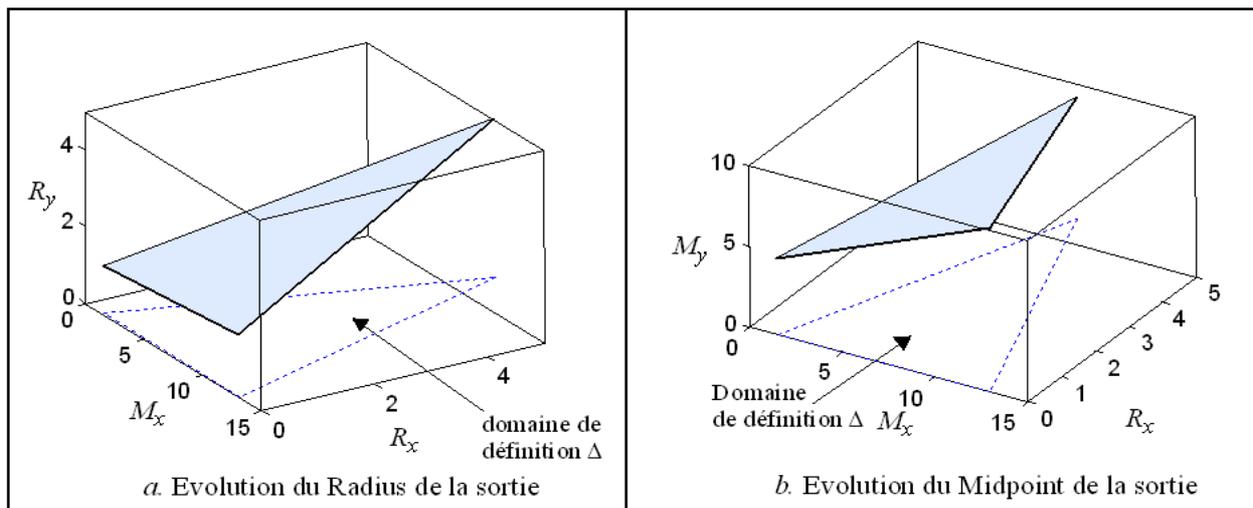


Figure 118 : Evolutions du Midpoint et du Radius de la sortie.

Sur l'axe  $M_x$  (la base du triangle  $\Delta$ ), seule l'imprécision des paramètres est exhibée, tandis qu'au sommet du triangle, l'imprécision de la sortie est maximum, correspondant à l'entrée la plus incertaine dans  $\Delta$ .

Dans cet exemple, le Radius de la sortie est "quasiment" constant sur la base du triangle, correspondant au cas d'un paramètre  $a_1$  "quasiment" constant. Dans ce cas, l'augmentation du Radius de la sortie sur  $\Delta$  est essentiellement due aux entrées imprécises. La même analyse peut être faite sur l'évolution du Midpoint de la sortie. D'une manière générale, en plus de permettre d'exhiber les imprécisions dans le modèle, la méthode proposée (dans l'espace  $MR$ ) s'affranchit des inconvénients relatifs à la représentation  $EP$ .

### 3.3 Illustration 3 : Régression possibiliste – Entrée/sortie précises

Nous considérons ici le cas d'un système où les entrées et les sorties sont précises. Le modèle exploité pour générer les données est extrait de [98]. Il est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} x(k) = 0.04x(k-1) - 1 ; k = 1, 2, \dots, 51 \\ y(k) = x(k) + 2 \cdot \exp(-16x^2(k)) + 0.5 \cdot e(k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(k) = x(k) ; \text{ et } x_2(k) = \exp(-16 \cdot x^2(k)) \\ y(k) = a_1 \cdot x_1(k) + a_2 \cdot x_2(k) + 0.5 \cdot e(k) \end{cases} ; \text{ avec } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

où  $e(k)$  est un bruit représenté par une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

En supposant la connaissance de la structure du système, le problème de régression est vu comme un problème d'estimation des paramètres  $a_1$  et  $a_2$ . Dans un premier temps, une approche statistique conventionnelle est employée. Dans un second temps, les résultats de cette dernière sont confrontés à la vision possibiliste.

Les résultats issus de la régression statistique au sens des moindres carrés sont donnés dans la figure 119.

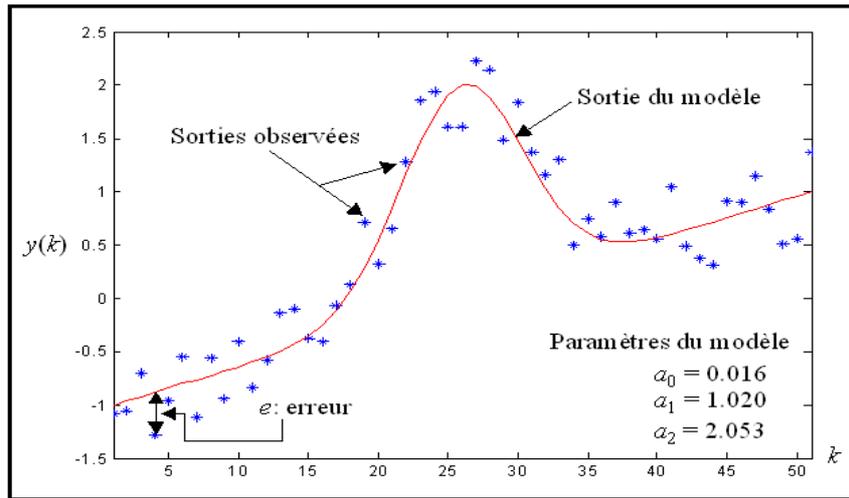


Figure 119 : Régression statistique précise.

Il est important de signaler ici qu'en présence d'entrées-sorties précises, la régression par moindres carrés est typiquement une régression statistique. La régression possibiliste par intervalles donne les résultats résumés dans la figure 120.

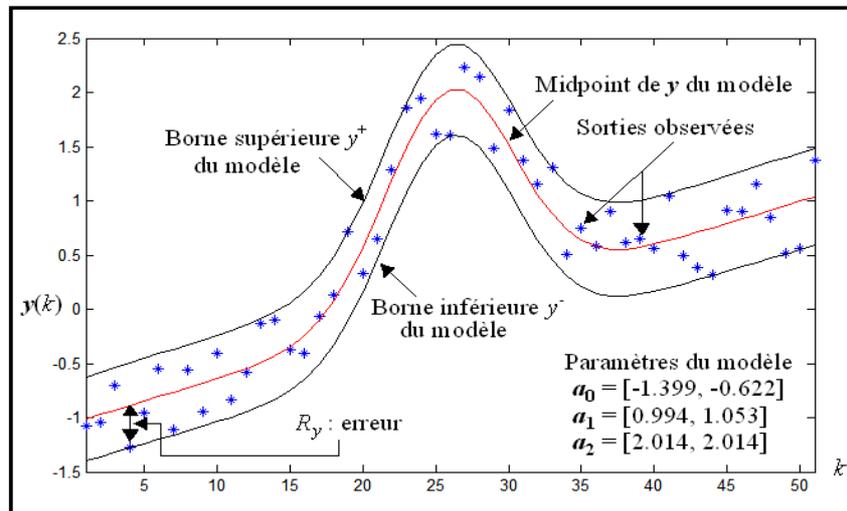


Figure 120 : Régression possibiliste imprécise.

Dans ce cas, la sortie du modèle imprécis (avec un décalage de -1 sur l'entrée  $x_1$ ) est donnée par :

$$y(x) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \times (x_1 + 1) + \mathbf{a}_2 \times x_2 = [-1.399, -0.622] + [0.994, 1.053] \times (x_1 + 1) + [2.014, 2.014] \times x_2$$

La comparaison entre les deux approches est résumée dans le tableau 20 et la figure 121. Les indicateurs de comparaison sont la *RMSE* (Root Mean Square Error) et le  $R^2$  proposés dans [36].

Méthode exploitée	$R^2$	<i>RMSE</i>
Régression conventionnelle	0.9183	0.2572
Régression possibiliste (Midpoint de la sortie)	0.9164	0.2578

Tableau 20 : Performances des régressions possibiliste et statistique (structure connue).

Dans cette régression, le Midpoint du modèle possibiliste peut être considéré comme une sortie précise du modèle imprécis (la sortie "défuzzifiée").

Dans l'approche possibiliste, l'essence de notre critère d'optimisation, basé sur la quantification de l'imprécision sur l'ensemble du domaine de définition, permet de traiter le cas des entrées-sorties

précises. En effet, la régression possibiliste vise à identifier un modèle imprécis enveloppant toutes les sorties. Dans ce contexte, la tendance du Midpoint de la sortie peut être vue comme une sortie précise du modèle à identifier. Comme discuté dans le chapitre 3, cette tendance du Midpoint est toujours comparable à une sortie obtenue par régression statistique. A ce stade, ce résultat relève plus de l'intuition que d'une vérité scientifique.

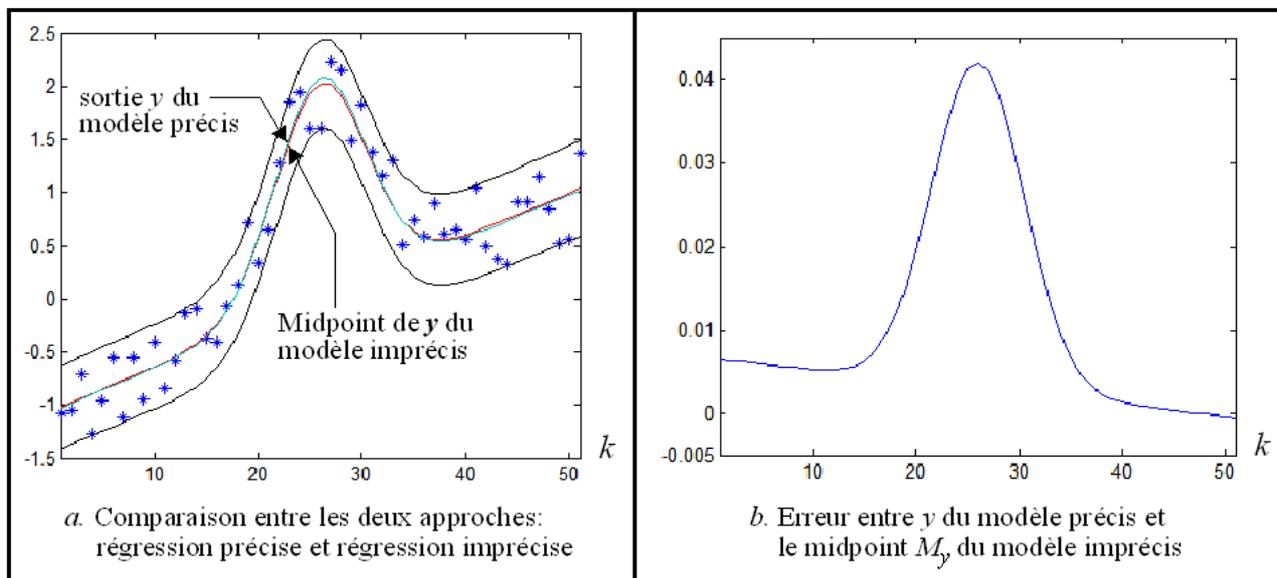


Figure 121 : Comparaison entre les régressions possibiliste et statistique.

Supposons maintenant que la structure du modèle soit inconnue. Nous avons alors recherché le modèle sous une forme polynomiale. Le critère AIC nous a renseignés sur l'ordre optimal du modèle à savoir  $n = 6$ . Les résultats obtenus par la régression possibiliste polynomiale sont résumés dans la figure 122.

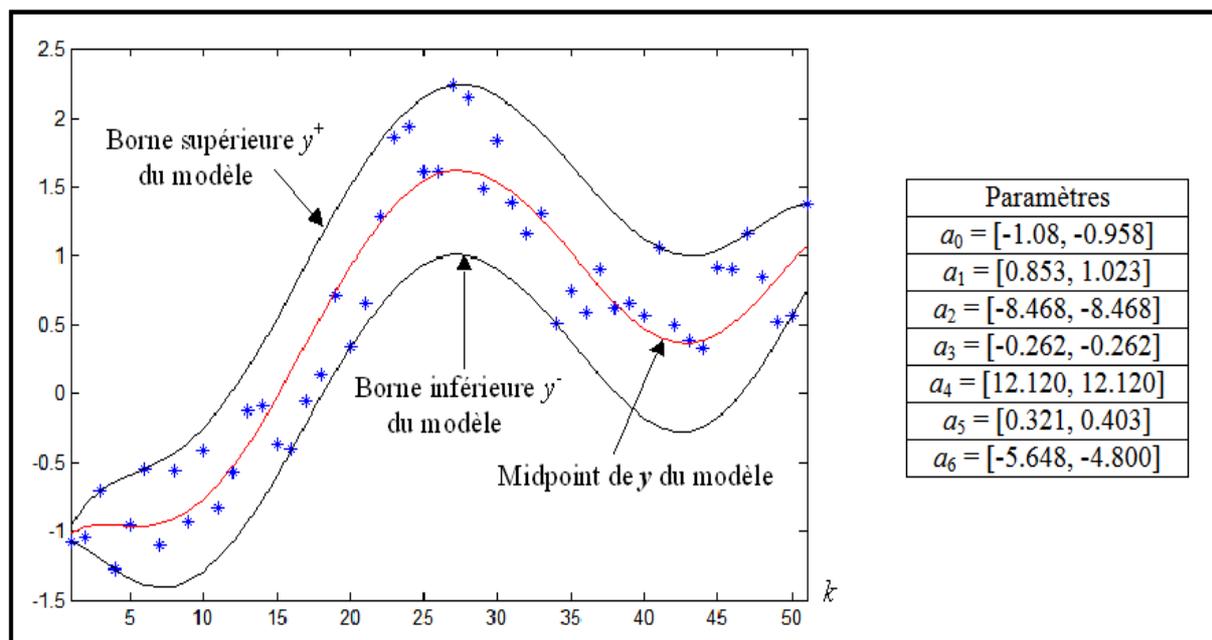


Figure 122 : Régression possibiliste polynomiale.

Le comparatif entre la régression statistique et la régression possibiliste polynomiale est résumé dans le tableau 21.

Méthode exploitée	$R^2$	RMSE
Régression conventionnelle	0.8820	0.3041
Régression possibiliste polynomiale (Midpoint de la sortie)	0.8560	0.3286

Tableau 21 : Performances des régressions possibiliste et statistique (structure inconnue).

Les mêmes remarques énoncées sur le cas linéaire précédent restent valables dans un cadre polynomial.

### 3.4 Illustration 4 : Régression possibiliste linéaire par morceaux

Traisons maintenant le jeu de données (cf. tableau 22) relativement complexe donné dans [36]. Cet exemple est extrait de notre article [19]. Les entrées et les sorties sont imprécises et représentées par des intervalles. A titre de comparaison, les résultats de notre approche sont comparés avec ceux donnés dans [36] où des méthodes d'apprentissage à base de réseaux ISVIRN (Interval Support Vector Interval Regression Networks) ont été exploitées.

Indice	Entrée	Sortie	Indice	Entrée	Sortie
1	[-2.0216, -2.0129]	[3.0747, 5.5086]	21	[0.0147, 0.0159]	[-1.5157, -0.6034]
2	[-1.9833, -1.8472]	[2.6593, 5.3167]	22	[0.0332, 0.0452]	[-1.5441, -0.6068]
3	[-1.8708, -1.7937]	[2.1659, 4.6264]	23	[0.2357, 0.2937]	[-1.7381, -0.5897]
4	[-1.6856, -1.6597]	[1.7191, 3.9269]	24	[0.2786, 0.3812]	[-1.7750, -0.5500]
5	[-1.6573, -1.6264]	[1.6099, 3.8040]	25	[0.3552, 0.3654]	[-1.7356, -0.5578]
6	[-1.5110, -1.4405]	[0.9350, 3.0874]	26	[0.4635, 0.5429]	[-1.7913, -0.4410]
7	[-1.3539, -1.3405]	[0.6322, 2.5689]	27	[0.5711, 0.6627]	[-1.7842, -0.3265]
8	[-1.3019, -1.1915]	[0.3766, 2.3968]	28	[0.6203, 0.6980]	[-1.8132, -0.3221]
9	[-1.1970, -1.1836]	[0.1969, 2.0139]	29	[0.7280, 0.7661]	[-1.7362, -0.2243]
10	[-1.0913, -1.0495]	[-0.0819, 1.6821]	30	[0.8716, 0.9286]	[-1.6193, 0.0301]
11	[-1.0307, -1.0093]	[-0.2289, 1.4711]	31	[0.9800, 1.0128]	[-1.5524, 0.1475]
12	[-0.9254, -0.8637]	[-0.5381, 1.1247]	32	[1.1189, 1.1345]	[-1.3651, 0.4035]
13	[-0.8846, -0.8294]	[-0.6047, 1.0183]	33	[1.2148, 1.2408]	[-1.2335, 0.6293]
14	[-0.7296, -0.5908]	[-1.0032, 0.5606]	34	[1.3356, 1.3738]	[-1.0899, 0.9009]
15	[-0.6068, -0.5678]	[-1.0037, 0.3751]	35	[1.4117, 1.4645]	[-0.8971, 1.1787]
16	[-0.5190, -0.4943]	[-1.1321, 0.1756]	36	[1.4941, 1.5334]	[-0.7424, 1.3681]
17	[-0.3495, -0.3467]	[-1.2932, -0.1293]	37	[1.5843, 1.6595]	[-0.5304, 1.7392]
18	[-0.2990, -0.2970]	[-1.3375, -0.2122]	38	[1.6278, 1.6399]	[-0.4704, 1.6792]
19	[-0.2048, -0.1976]	[-1.4083, -0.3533]	39	[1.7990, 1.8175]	[-0.0811, 2.2200]
20	[-0.1416, -0.1000]	[-1.4504, -0.4383]	40	[1.8688, 1.8922]	[0.1440, 2.5072]
			41	[1.9198, 1.9600]	[0.2256, 2.6829]

Tableau 22 : Entrées et sorties imprécises.

Un modèle linéaire simple ne peut pas correctement représenter le comportement de ces entrées-sorties [19]. Dans un premier temps, une stratégie de représentation linéaire par morceaux est adoptée. Pour déterminer le nombre de sous-modèles, une classification à base de FCM a été exploitée [19].

Deux configurations ont été implémentées. Dans la première, deux sous-modèles linéaires sont employés. Quant à la seconde configuration, elle intègre 4 sous-modèles linéaires. Les résultats obtenus par l'approche possibiliste sont récapitulés dans les tableaux 23 et 24.

	Domaine	Paramètres du modèle
Sous-modèle 1	$D_1 = [-2.021, -0.1] = (-1.060, 0.9608)$	$a_{01} = (-1.438, 0.552)$ ; $a_{11} = (-2.416, 0.746)$
Sous-modèle 2	$D_2 = [0.014, 1.96] = (0.987, 0.972)$	$a_{02} = (-1.443, 0.813)$ ; $a_{12} = (1.202, 0.487)$

Table 23 : Paramètres du modèle (configuration 1).

	Domaines	Paramètres du modèle
Sous-modèle 1	$D_1 = [-2.021, -1.009] = (-1.5155, 0.506)$	$a_{01} = (-3.078, 0.349)$ ; $a_{11} = (-3.551, 0.523)$
Sous-modèle 2	$D_2 = [-0.925, -0.100] = (-0.512, 0.412)$	$a_{02} = (-1.196, 0.475)$ ; $a_{12} = (-1.542, 0.451)$
Sous-modèle 3	$D_3 = [0.014, 1.012] = (0.513, 0.499)$	$a_{03} = (-1.172, 0.557)$ ; $a_{13} = (0.316, 0.437)$
Sous-modèle 4	$D_4 = [1.118, 1.960] = (1.539, 0.420)$	$a_{04} = (-3.334, 0.588)$ ; $a_{14} = (2.448, 0.328)$

Table 24 : Paramètres du modèle (configuration 2).

A titre d'illustration, la sortie identifiée pour la première configuration (2 sous-modèles) dans l'espace  $MR$  est illustrée à la figure 123.

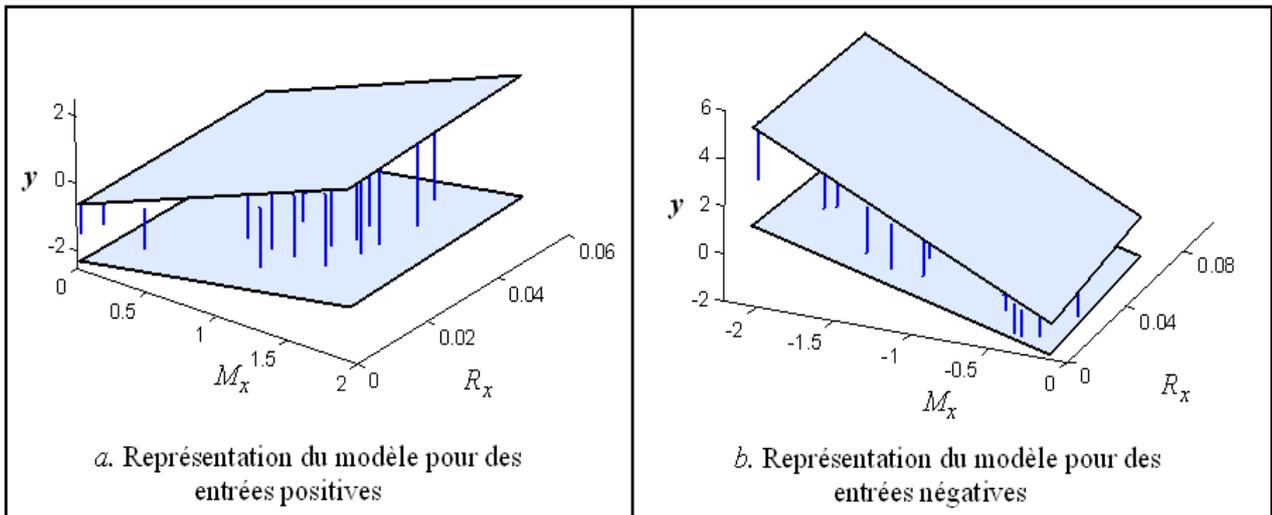


Figure 123 : Représentation du modèle dans l'espace  $MR$  (configuration 1).

Les résultats obtenus pour les deux configurations dans l'espace  $EP$  sont illustrés à la figure 124.

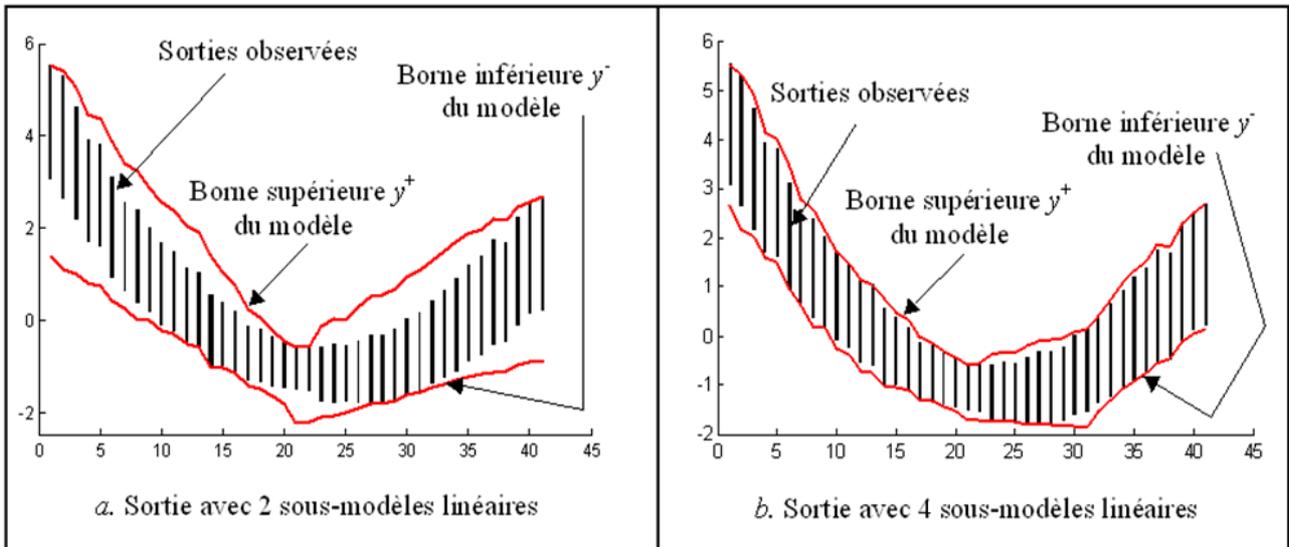


Figure 124 : Représentation du modèle dans l'espace  $EP$  (configurations 1 et 2).

La comparaison des résultats obtenus est résumée dans le tableau 25, démontrant ainsi la performance des techniques de régression proposées par rapport à la méthode ISVIRN (itérative, complexe et difficile à mettre en œuvre).

Méthode exploitée	Configuration du modèle	RMSE	R <sup>2</sup>
La méthode ISVIRN [36]	Nœuds cachés = 6	0.2517	0.9669
	Nœuds cachés = 11	<b>0.2399</b>	<b>0.9895</b>
Approche possibiliste	2 sous-modèles	0.8468	0.7489
	4 sous-modèles	<b>0.2046</b>	<b>0.9851</b>

Tableau 25 : Comparatif entre différentes méthodes de régression.

### 3.5 Illustration 5 : Régression possibiliste polynômiale

Nous exploitons les informations entrées-sorties de l'illustration 4 (cf. tableau 22). Le modèle linéaire par morceaux a été remplacé par un modèle polynomial d'ordre 2 (ordre optimal déterminé par le critère AIC). Les résultats obtenus par la régression possibiliste dans les espaces  $MR$  et  $EP$  sont donnés dans la figure 125.

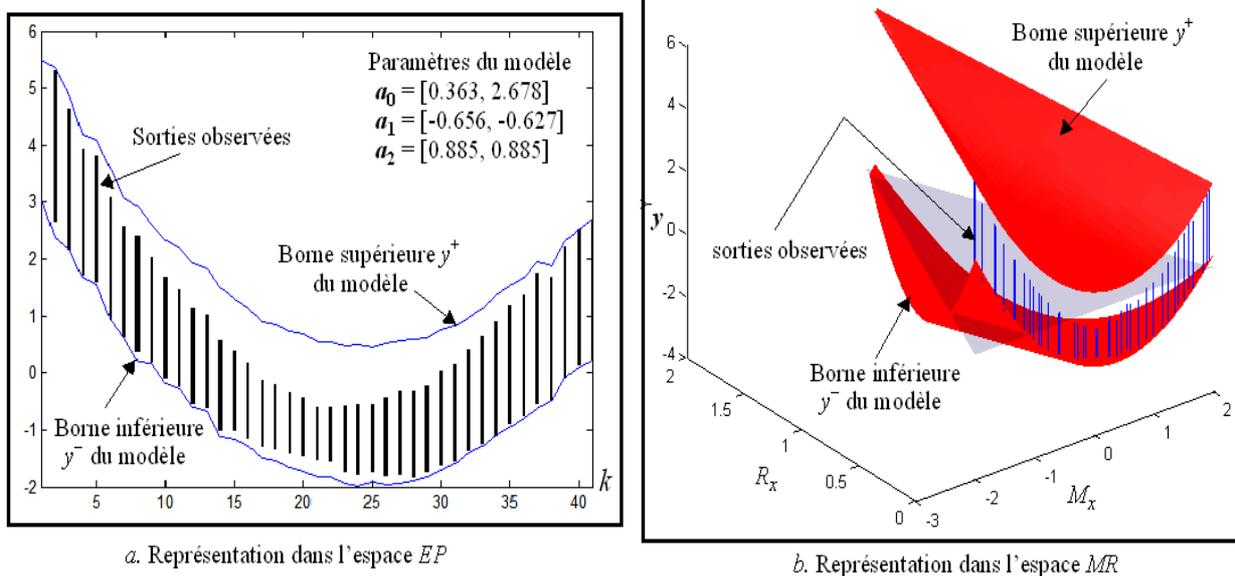


Figure 125 : Régression possibiliste polynômiale (espace  $EP$  et  $MR$ ).

A nouveau, nous redonnons dans le tableau 26 les résultats comparatifs du tableau 25 en présence de la régression possibiliste polynômiale.

Méthode exploitée	Configuration du modèle	RMSE	R <sup>2</sup>
La méthode ISVIRN [36]	Nœuds cachés = 6	0.2517	0.9669
	Nœuds cachés = 11	<b>0.2399</b>	<b>0.9895</b>
Approche possibiliste	2 sous-modèles	0.8468	0.7489
	4 sous-modèles	<b>0.2046</b>	<b>0.9851</b>
	Polynôme d'ordre 2	<b>0.7365</b>	<b>0.8070</b>

Tableau 26 : Comparatif entre différentes méthodes de régression (possibiliste et ISVIRN).

### 3.6 Illustration 6 : Régression polynômiale au sens des MC

Les entrées-sorties exploités dans l'illustration 4 sont à nouveau considérés dans cet exemple. Les contraintes d'inclusion de l'approche possibiliste sont relaxées à travers une approche au sens des MC. Dans ce contexte, l'objectif est de minimiser non pas l'imprécision globale sur le domaine de

définition mais la distance entre les sorties prédites et les sorties observées. Les résultats obtenus sont résumés dans la figure 126.

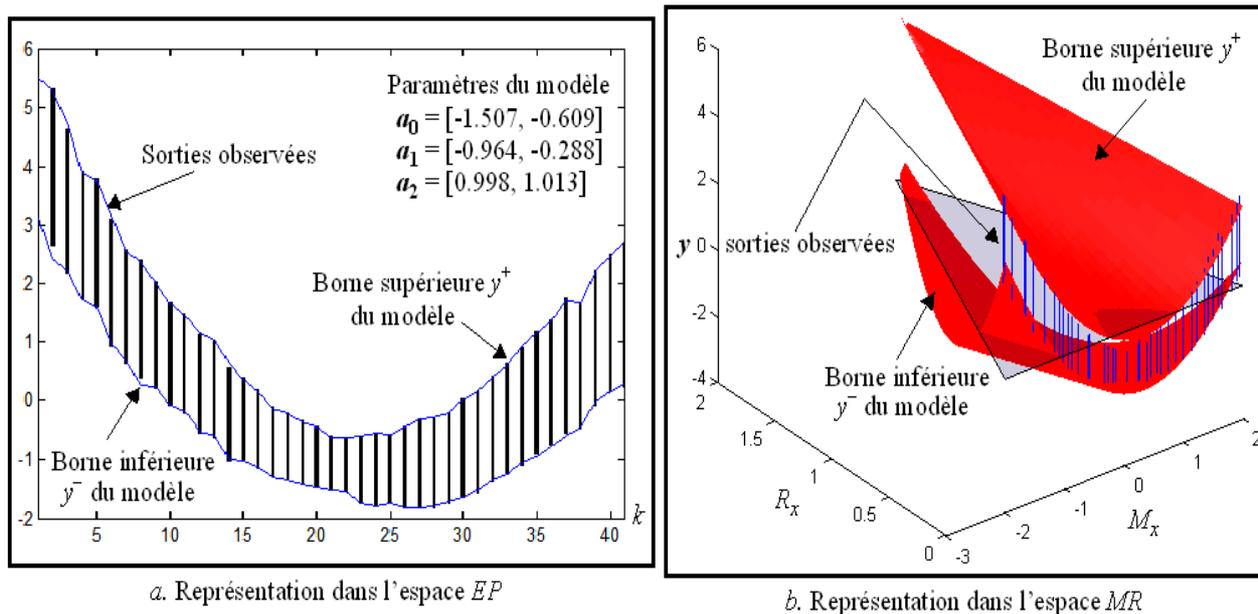


Figure 126 : Régression polynomiale au sens des MC (espace  $EP$  et  $MR$ ).

Les résultats du tableau 26 sont complétés par ceux obtenus avec une approche au sens des MC (cf. tableau 27).

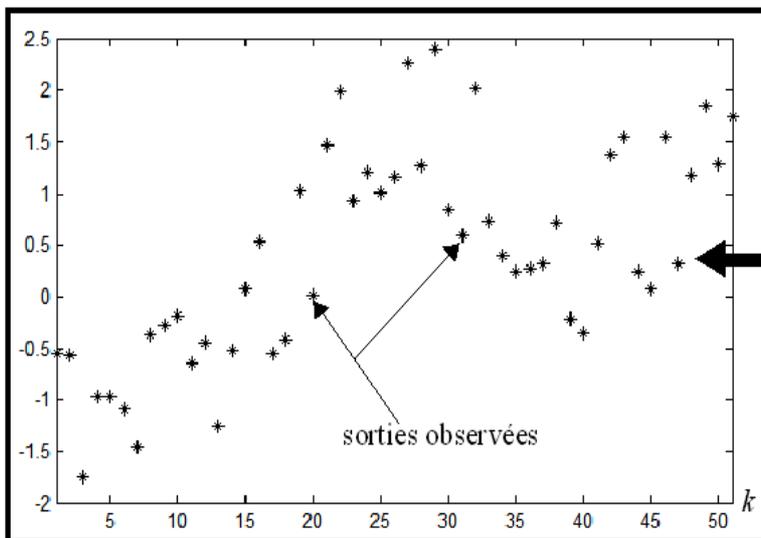
Méthode exploitée	Configuration du modèle	$RMSE$	$R^2$
La méthode ISVIRN [36]	Nœuds cachés = 6	0.2517	0.9669
	Nœuds cachés = 11	<b>0.2399</b>	<b>0.9895</b>
Approche possibiliste	2 sous-modèles	0.8468	0.7489
	4 sous-modèles	<b>0.2046</b>	<b>0.9851</b>
Approche par moindres carrés	Polynôme d'ordre 2	<b>0.7365</b>	<b>0.8070</b>
	Polynôme d'ordre 2	<b>0.0555</b>	<b>0.9989</b>

Tableau 27 : Comparatif entre différentes méthodes de régression (possibiliste, MC et ISVIRN).

Notons que si les contraintes d'inclusion de l'approche possibiliste sont relaxées, la méthode des MC mène vers un meilleur ajustement du modèle par rapport aux observations.

### 3.7 Illustration 7 : Régression graduelle possibiliste – Données précises

Dans cette illustration, les données ont été générées avec le modèle donné dans l'illustration 3 en considérant différents niveaux de bruit. Supposons qu'un professeur ait confié à trois de ses étudiants de prélever les mesures d'une expérience chimique. Le premier a respecté scrupuleusement le protocole donné par le professeur et il a intégré les différentes conditions préconisées (luminosité, température, etc.) et les régimes de fonctionnement stipulés. Le deuxième élève, non attentif, a oublié un certain nombre de recommandations et a moyennement respecté le protocole. Le troisième, relativement "malin" et connaissant le modèle théorique du résultat attendu par le professeur, n'a prélevé que des cas favorables obtenus dans des conditions particulières. Les trois étudiants ont présenté leur travail au professeur. Les résultats et les commentaires du professeur, relatifs aux imprécisions et aux incertitudes de cette expérience, sont illustrés dans les figures 127-129.

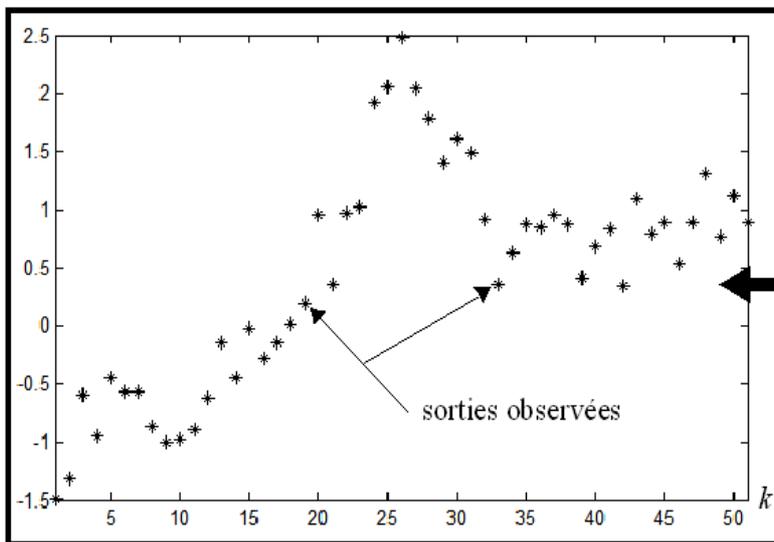


Je suis sûr à 100% (certain) que ces sorties sont les plus représentatives de l'expérience

↓

Ces sorties sont les plus imprécises mais avec le degré de certitude le plus élevé (les sorties les plus certaines)

Figure 127 : Les mesures les plus imprécises mais les plus certaines (situation 1 : élève 1).

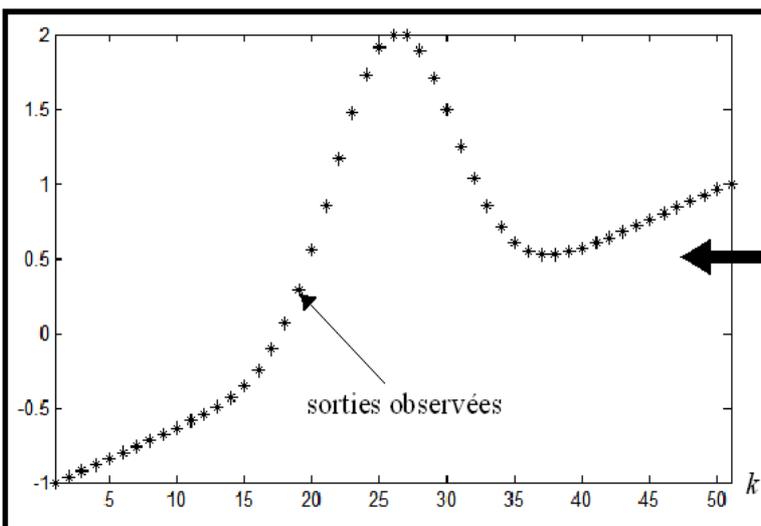


Je suis moyennement sûr (à 50%) que ces sorties sont représentatives de l'expérience

↓

Ces sorties sont imprécises mais avec un degré de certitude de 50%

Figure 128 : Un compromis entre l'imprécision et l'incertitude (situation 2 : élève 2).



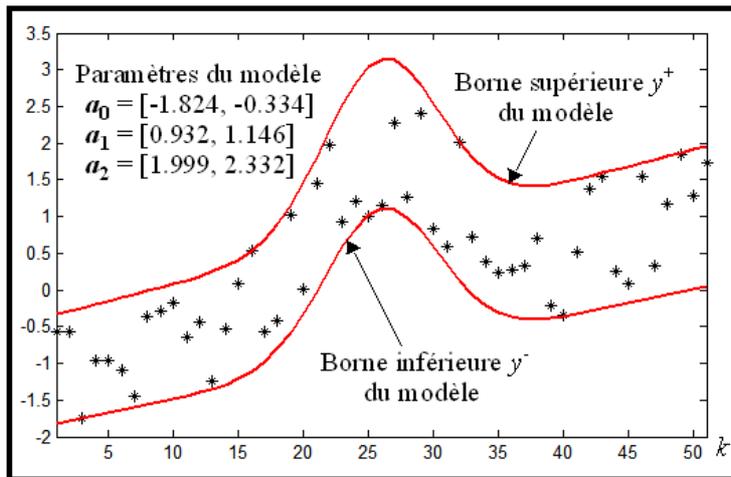
Je suis certain que ces sorties ne sont pas représentatives de l'expérience

↓

Ces sorties sont les plus précises mais avec le degré de certitude le plus faible (les sorties les plus incertaines)

Figure 129 : Les mesures les plus précises mais les plus incertaines (situation 3 : élève 3).

L'identification de chaque modèle par la méthode de régression possibiliste en supposant la forme du modèle connue a conduit aux résultats illustrés dans les figures 130-132.

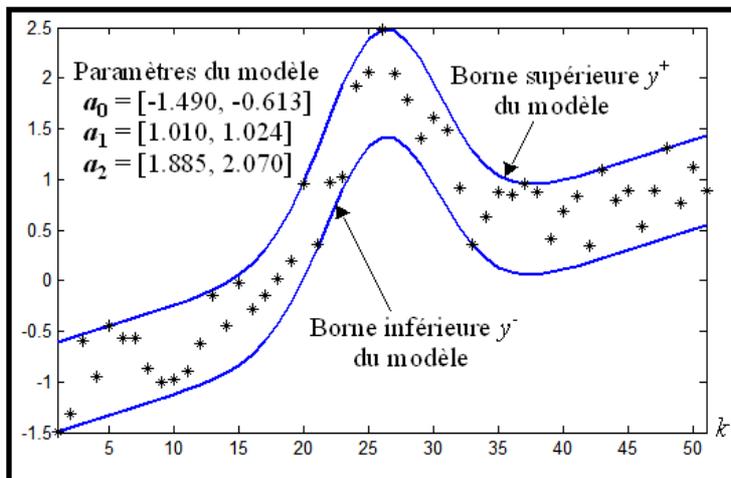


Expression du modèle entrées-sortie  
 $y = a_0 + a_1 \cdot (x_1 + 1) + a_2 \cdot x_2$

↓

L'intervalle de chaque paramètre est le plus imprécis, mais il est considéré comme le plus sûr avec le degré de certitude le plus élevé (=1) pour qu'une valeur précise de ce paramètre soit dans cet intervalle (l'intervalle le plus optimiste).

Figure 130 : Modèle possibiliste relatif à la situation 1.

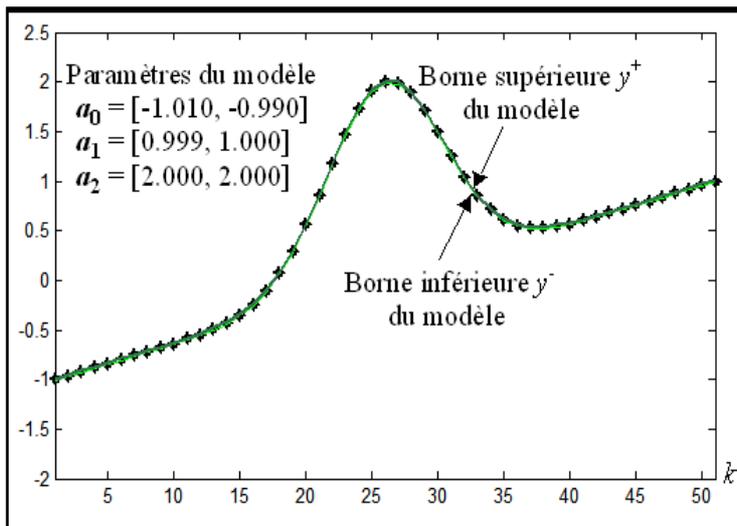


Expression du modèle entrées-sortie  
 $y = a_0 + a_1 \cdot (x_1 + 1) + a_2 \cdot x_2$

↓

L'intervalle de chaque paramètre est considéré comme imprécis mais avec un degré de certitude de 0.5 (50%) pour qu'une valeur précise de ce paramètre soit dans cet intervalle.

Figure 131 : Modèle possibiliste relatif à la situation 2.



Expression du modèle entrées-sortie  
 $y = a_0 + a_1 \cdot (x_1 + 1) + a_2 \cdot x_2$

↓

L'intervalle de chaque paramètre est considéré comme le plus précis mais avec le degré de certitude le plus faible (=0) pour qu'une valeur précise de ce paramètre soit dans cet intervalle (l'intervalle le plus risqué).

Figure 132 : modèle possibiliste relatif à la situation 3.

La juxtaposition de trois modèles donnés dans les figures 130-132 conduit à la figure 133.

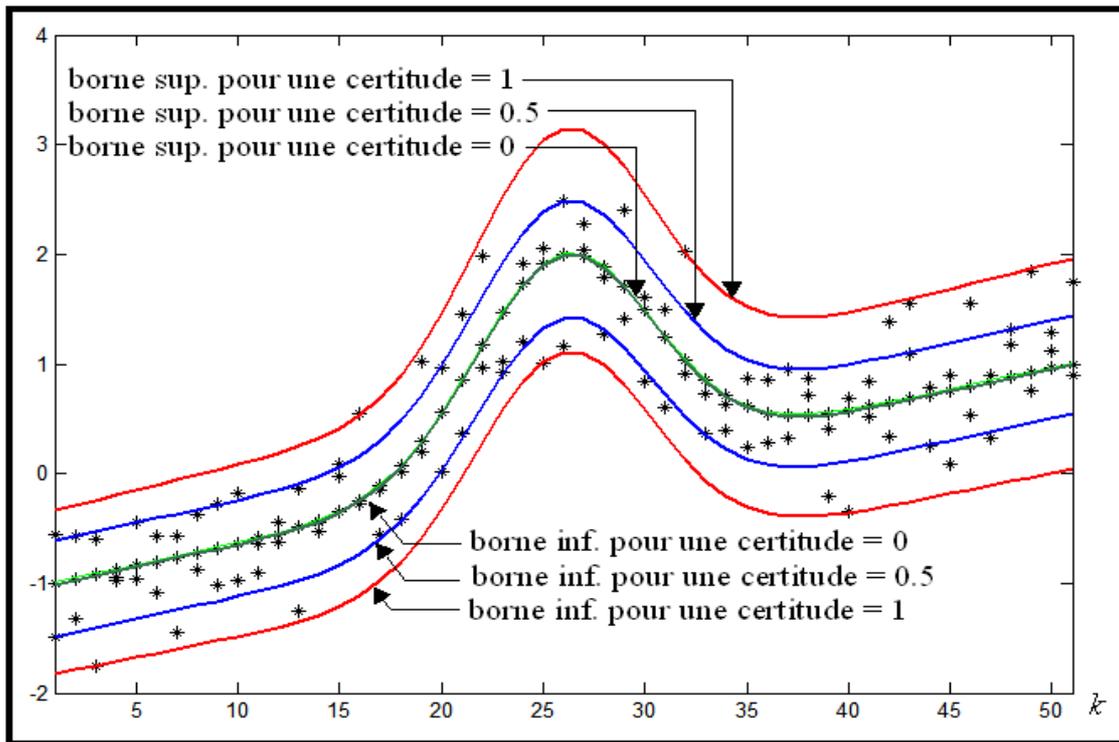


Figure 133 : représentation des trois modèles relatifs aux trois situations.

A titre d'exemple, le paramètre  $a_2$  peut être interprété *via* des intervalles imprécis auxquels sont attachés des niveaux de confiance ou encore des incertitudes. En effet, cette interprétation peut conduire aux propositions suivantes.

- P1 : je suis certain à 100% que  $a_2$  soit dans l'intervalle  $\mathbf{a}_2 = [1.99, 2.33]$ .
- P2 : je suis certain à 50% que  $a_2$  soit dans l'intervalle  $\mathbf{a}_2 = [1.88, 2.07]$ .
- P3 : je suis totalement incertain (certain à 0%) que  $a_2$  soit dans l'intervalle  $\mathbf{a}_2 = [2.0, 2.0]$ .

Dans ce contexte, la méthodologie donnée dans le paragraphe 2.7 peut être exploitée pour construire des distributions de possibilité (par approximation) pour ce paramètre. Toutefois, sachant que les intervalles des niveaux de confiance ne sont pas emboîtés, la construction d'une distribution de possibilité peut induire une augmentation de l'imprécision du paramètre. Ici nous avons choisi d'outrepasser la présence des intervalles non emboîtés et de construire directement des intervalles graduels. En effet, la fusion des sous-modèles précédents peut aboutir au modèle graduel donné par l'expression suivante :

$$y(\lambda) = \mathbf{a}_0(\lambda) + \mathbf{a}_1(\lambda) \cdot (x_1(\lambda) + \mathbf{1}(\lambda)) + \mathbf{a}_2(\lambda) \cdot x_2(\lambda)$$

où  $\mathbf{a}_0(\lambda)$ ,  $\mathbf{a}_1(\lambda)$  et  $\mathbf{a}_2(\lambda)$  sont des intervalles graduels représentés dans la figure 134. Pour des raisons de simplicité, les intervalles ont été construits par interpolation linéaire entre les niveaux  $\lambda=0$ ,  $\lambda=0.5$  et  $\lambda=1$ . Bien évidemment ce n'est qu'une approximation et la présence d'informations supplémentaires peut affiner ces profils linéaires par morceaux. Dans cet exemple, aucune condition de monotonie sur les profils n'a été imposée, donnant au concept graduel toute sa signification. Ce modèle intègre à la fois de, l'imprécision par l'intermédiaire d'une représentation par intervalles (dimension horizontale) et de l'incertitude à travers sa dimension verticale. Si des contraintes de monotonie (emboîtement des intervalles de confiance) sont imposées dans le problème d'optimisation, ces dernières induiront une augmentation de l'imprécision de  $\mathbf{a}_2(\lambda)$ .

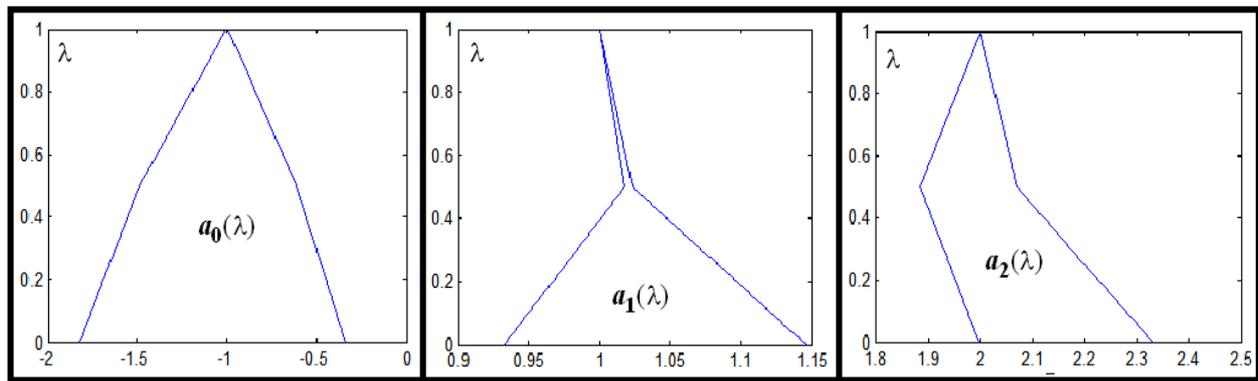


Figure 134 : Paramètres du modèle approximés par des intervalles graduels.

### 3.8 Illustration 8 : Régression graduelle possibiliste – Données subjectives

Dans cet exemple, les données stipulées dans [36][59] ont été exploitées. Les entrées sont considérées comme précises et les sorties sous formes d’intervalles flous triangulaires sont données par un expert. La forme relativement complexe des données nous a orientés vers la recherche d’un modèle polynomial. Les résultats de l’approche possibiliste sont illustrés dans la figure 135.

Dans ce contexte, contrairement à toutes les méthodes de régression possibiliste publiées dans la littérature et qui visent l’obtention d’un modèle triangulaire, nous avons proposé l’exploitation d’un modèle trapézoïdal afin d’assurer les contraintes d’inclusion. Nous avons démontré dans [13] qu’un modèle triangulaire abordé selon le principe des  $\alpha$ -coupes était incapable de satisfaire les contraintes d’inclusion, sauf dans le cas où les valeurs modales des intervalles des sorties sont alignées.

La forme linéaire des intervalles graduels trapézoïdaux nous autorise à exprimer ces derniers seulement en fonction de leurs niveaux  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 1$ . Le critère d’Aikake a conduit à un modèle polynomial d’ordre 4. Ces résultats sont comparables à ceux obtenus dans [36][59]. Les principales distinctions entre les deux méthodes viennent de la recherche de l’inclusion des observations dans les prédictions, contrainte non introduite dans [36][59]. De plus, l’introduction du décalage sur les entrées a permis la représentation des tendances de l’imprécision selon l’amplitude de l’entrée.

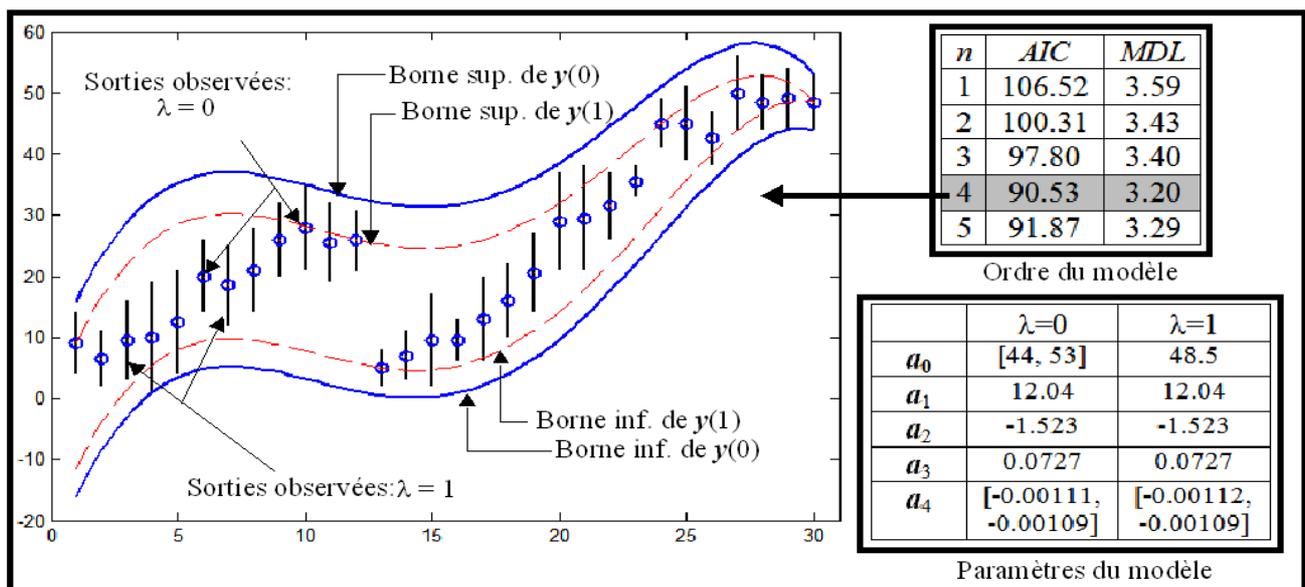


Figure 135 : Approche possibiliste à base d’intervalles graduels trapézoïdaux.

### 3.9 Illustration 9 – Régression polynomiale au sens des MC – Données subjectives

Considérons maintenant les entrées-sorties représentées par les distributions de possibilité (intervalles flous) triangulaires données dans le tableau 27. Ces informations sont formulées par un expert sur un comportement linéaire d'un modèle à identifier.

$j$	Entrée	Sortie
1	$[0.5+1.5.\lambda, 2.5-0.5.\lambda]$	$[-2.5+\lambda, 0.25-1.75.\lambda]$
2	$[3.5+\lambda, 4.5-\lambda]$	$[-2.25+1.25.\lambda, 1.75-2.75.\lambda]$
3	$[4+1.5.\lambda, 6.5-\lambda]$	$[-1.75+1.75.\lambda, 3-3.\lambda]$
4	$[6.5+0.5.\lambda, 8.5-1.5.\lambda]$	$[-0.75+1.25\lambda, 3.75-3.25.\lambda]$
5	$[6.75+1.75.\lambda, 10-1.5.\lambda]$	$[-0.25+1.75.\lambda, 3.75-2.25.\lambda]$
6	$[9.5+\lambda, 11.5-\lambda]$	$[0.25+1.25.\lambda, 4.25-3.75.\lambda]$
7	$[10.5+0.5.\lambda, 11.75-0.75.\lambda]$	$[1+\lambda, 5.5-3.5.\lambda]$
8	$[12+0.5.\lambda, 14.5-2.\lambda]$	$[1.25+1.75.\lambda, 7-4.\lambda]$

Tableau 27 : Entrées-sorties graduelles.

Nous cherchons alors à obtenir un modèle linéaire d'ordre 1 selon une approche par MC. Dans l'implantation de la méthode, une discrétisation sur les intervalles graduels est opérée, *i.e.*  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 11$  pour obtenir des intervalles conventionnels.

Afin d'obtenir des intervalles graduels monotones, les contraintes de monotonie sont introduites dans le problème d'optimisation. Les résultats obtenus sont résumés dans la figure 136, montrant l'efficacité de la technique de régression proposée.

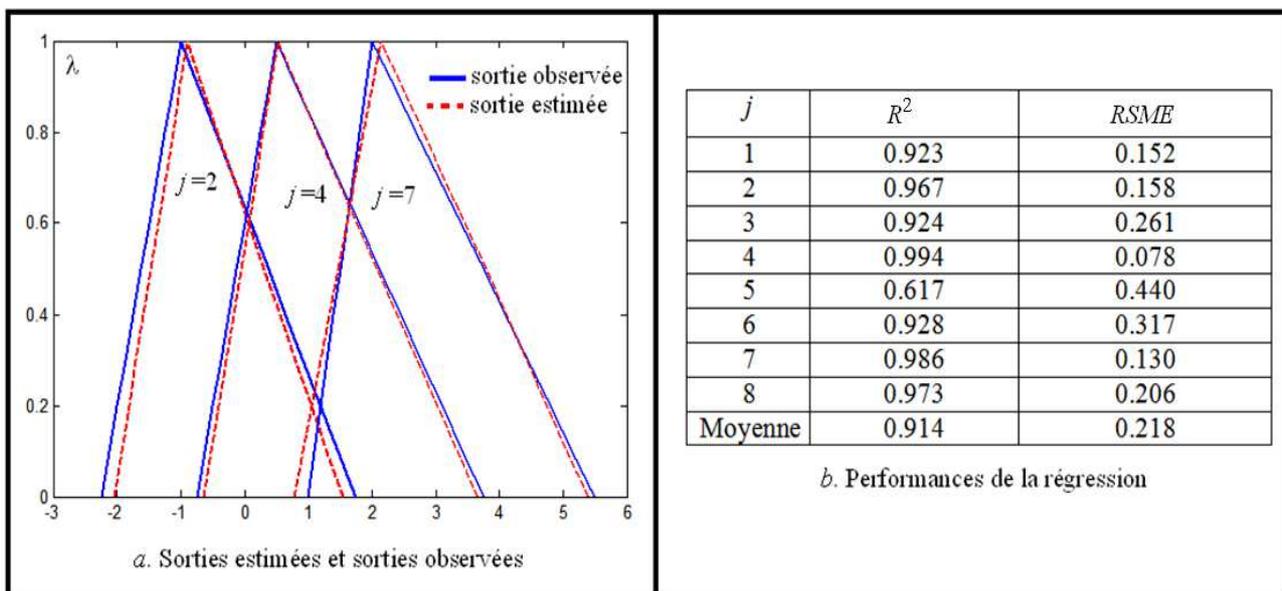


Figure 136 : Régression graduelle au sens des moindres carrés.

Le modèle graduel ainsi obtenu est donné par :

$$y(\lambda) = a_0(\lambda) + a_1(\lambda) \times x(\lambda)$$

où les paramètres  $a_0(\lambda)$  et  $a_1(\lambda)$  sont représentés dans la figure 137. Il est important de noter ici que la relaxation des contraintes d'inclusion et de monotonie des paramètres simplifie le problème de régression et peut aboutir à un modèle moins imprécis. Toutefois, le modèle obtenu sera graduel, non monotone et non interprétable par un modèle flou.

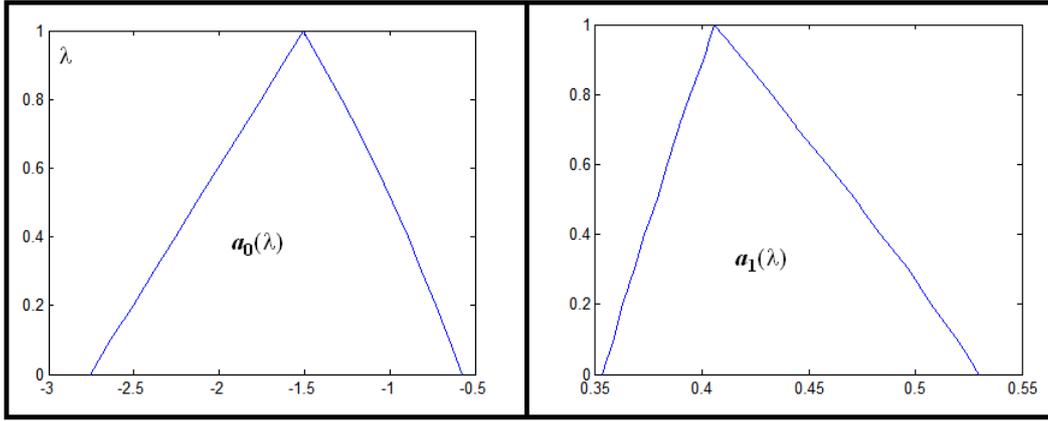


Figure 137 : Paramètres du modèle approximés par des intervalles graduels triangulaires.

### 3.10 Illustration 10 : Applicabilité du contrôle graduel

A titre d'illustration, considérons un système linéaire échantillonné d'ordre 2, extrait de notre article [18] et donné par :

$$y_{k+1} = a_0.y_k + a_1.y_{k-1} + b_0.u_k \quad (40)$$

pour lequel une identification des paramètres  $a_0$ ,  $a_1$  et  $b_0$  est requise. Cette identification est effectuée à partir des observations sur l'entrée  $u_k$  et la sortie  $y_k$ . Nous demandons à un expert automaticien (spécialiste des méthodes d'identification) de nous résumer les résultats obtenus suite à plusieurs expériences d'identification réalisées. Ces conclusions sont les suivantes.

Je suis certain que le paramètre  $a_0$  est entre 0.05 et 0.15,  $a_1$  est entre  $-0.6$  et  $-0.4$  et  $b_0$  est entre 0.95 et 1.05. Toutefois, les valeurs 0.1,  $-0.5$  et 1 sont respectivement les plus vraisemblables pour les trois paramètres  $a_0$ ,  $a_1$  et  $b_0$ .

Dans ce contexte, les paramètres peuvent être décrits par des distributions de possibilité. Ils peuvent s'exprimer comme des intervalles graduels triangulaires :

$$\mathbf{a}_0(\lambda) = (0.1, 0.05 - 0.05\lambda), \mathbf{a}_1(\lambda) = (-0.5, 0.1 - 0.1\lambda) \text{ et } \mathbf{b}_0(\lambda) = (1, 0.05 - 0.05\lambda).$$

Dans cette représentation des paramètres, l'information la plus imprécise mais la plus certaine est représentée par l'intervalle au niveau  $\lambda = 0$ . Cependant, l'intervalle à  $\lambda = 1$  est le plus précis mais c'est le plus risqué (car le moins certain). Ici et pour des raisons de simplicité, nous avons supposé des profils linéaires pour les intervalles graduels. Cette restriction peut être levée en présence d'informations supplémentaires. Les paramètres sont supposés donnés par un expert. Toutefois, il est possible de les identifier directement, à partir d'un jeu de données entrées-sorties par la méthode régressive proposée précédemment.

Supposer les paramètres graduels conduit à l'écriture du système (40) sous une forme graduelle :

$$\mathbf{y}_{k+1}(\lambda) = \mathbf{a}_0(\lambda) \times \mathbf{y}_k(\lambda) + \mathbf{a}_1(\lambda) \times \mathbf{y}_{k-1}(\lambda) + \mathbf{b}_0(\lambda) \times \mathbf{u}_k(\lambda) \quad (41)$$

où  $\mathbf{a}_0(\lambda)$ ,  $\mathbf{a}_1(\lambda) \in \text{IGP}$  et  $\mathbf{b}_0(\lambda) \in \text{IGP}^*$ .

Considérons une trajectoire de référence graduelle sous une forme triangulaire donnée dans l'espace  $MR$  par  $\mathbf{r}_k(\lambda) = (2, 1.5 - 1.5\lambda)$ . Les conditions initiales sont choisies égales aux valeurs initiales de la trajectoire désirée. Les comportements de la sortie du système et de la commande, obtenus par application de la technique proposée sont illustrés dans la figure 138. De ces résultats, il apparaît clairement que le système suit parfaitement la trajectoire désirée. Quand  $\lambda = 1$  (entrée précise), la

sortie est égale à la trajectoire nominale. Il est important de noter ici que la commande obtenue peut toujours être calculée. Toutefois, elle n'est pas toujours représentable par un intervalle graduel propre. Dans ce cas, afin d'assurer l'existence d'un contrôleur IGP, la condition (39) doit être garantie.

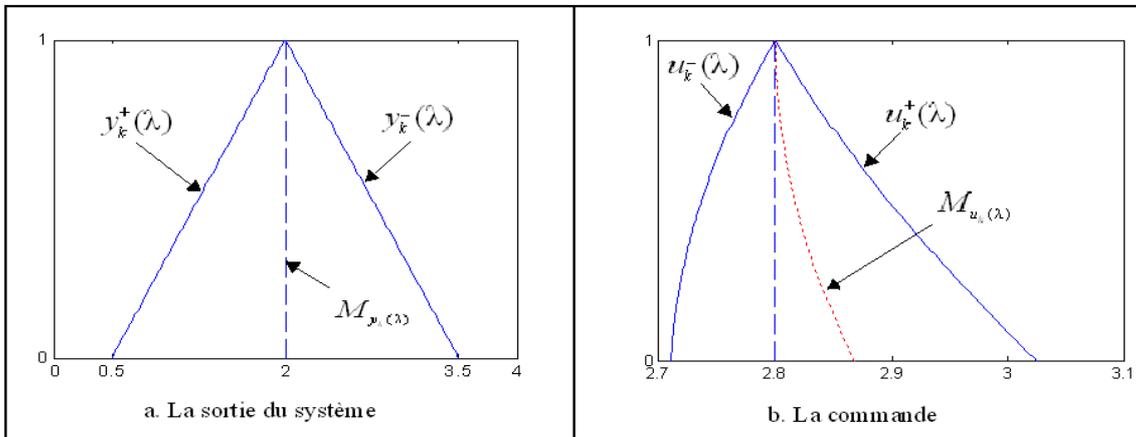


Figure 138 : Sortie et commande graduelles

Sachant que le contrôleur impose  $y_k(\lambda) = r_k(\lambda)$ , la condition (39) conduit au résultat illustré dans la figure 139 où toutes les trajectoires graduelles IGP admissibles (zone non grisée) sont représentées.

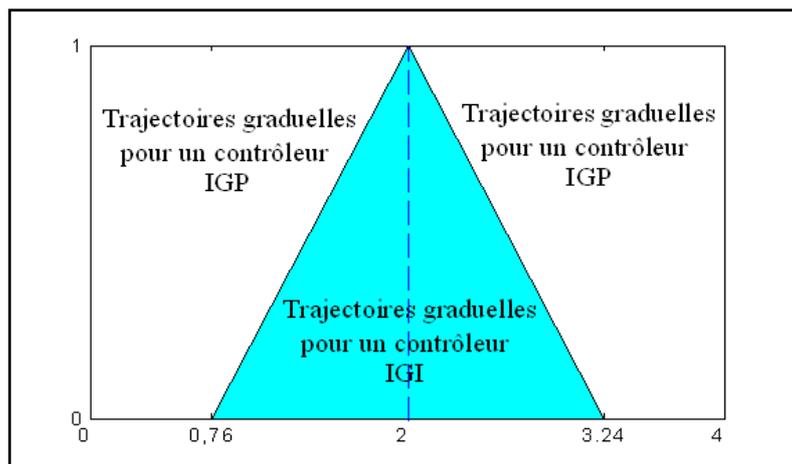


Figure 139 : Trajectoires graduelles IGP et IGI.

La méthode développée ne se limite pas à des trajectoires constantes, mais peut être appliquée à des trajectoires variables dans le temps. Considérons maintenant que la trajectoire désirée nominale constante soit remplacée par :

$$M_{r_k}(\lambda) = 2/3 \cdot \sin(2k\pi/25) + \sin(2k\pi/50).$$

Dans ce cas, la trajectoire graduelle désirée est donnée par :

$$r_k(\lambda) = (M_{r_k}(\lambda), R_{r_k}(\lambda)) = (2/3 \cdot \sin(2k\pi/25) + \sin(2k\pi/50), 1.5 - 1.5\lambda)$$

Les résultats obtenus sont donnés dans la figure 140 pour deux instants  $k=15$  et  $k=44$ .

Ces résultats montrent que de bonnes performances sont obtenues, illustrant l'efficacité de la technique proposée. Sachant que le Midpoint de la trajectoire n'est pas constant, à chaque instant  $k$ , la commande est un intervalle graduel comme illustré dans la figure 140.b. Dans ce cas, le contrôleur est dans IGP si la trajectoire est choisie de sorte que la condition (39) soit respectée.

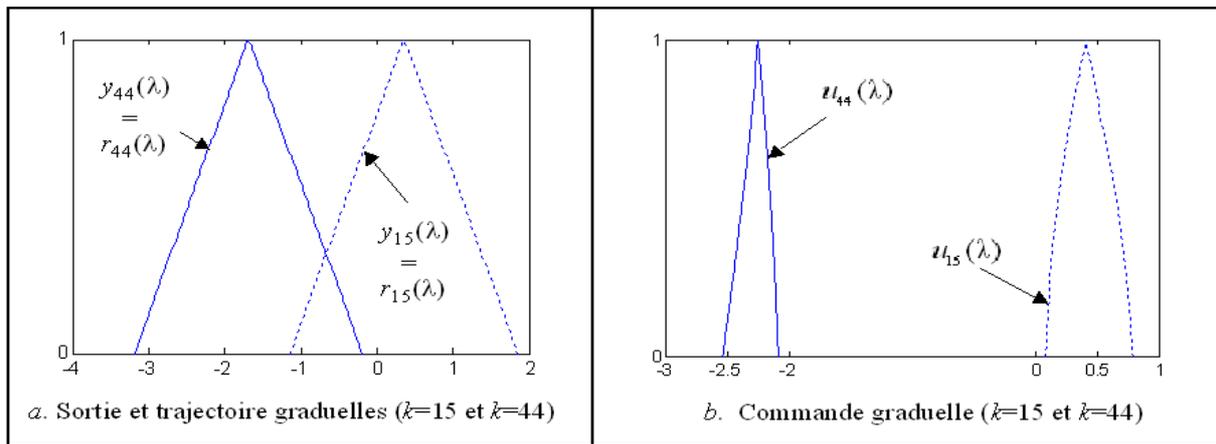


Figure 140 : Sorties et commande graduelles.

Evaluons la sortie du système pour des degrés de préférence  $\lambda=0.3$  et  $\lambda=0.8$ . Les résultats correspondants sont donnés dans les figures 141 et 142 confirmant le comportement antagoniste entre la préférence et la certitude.

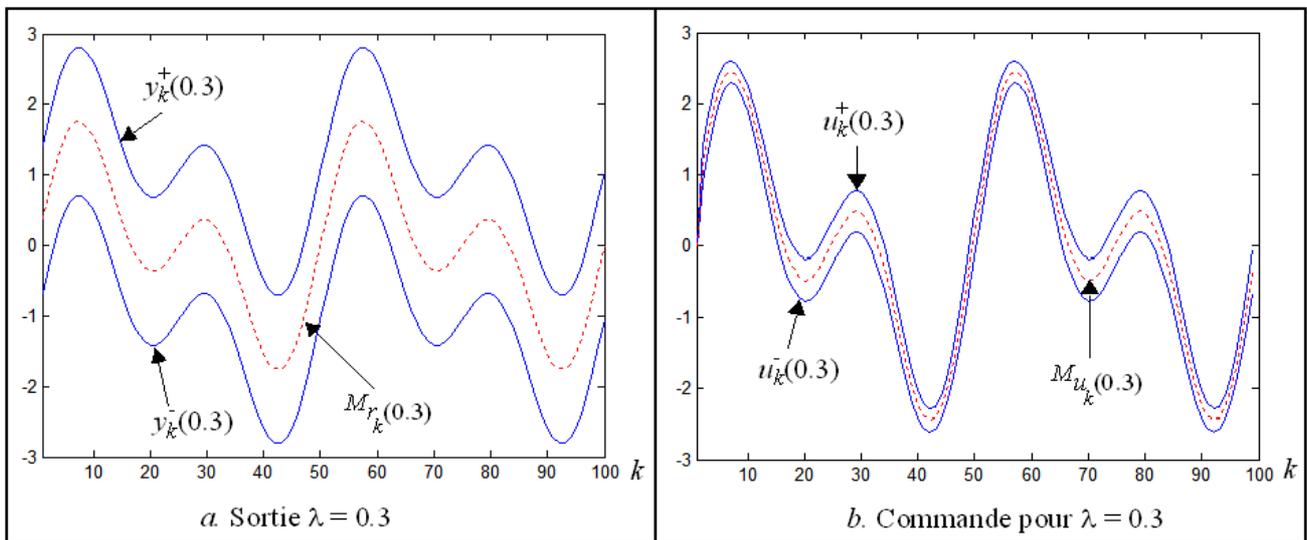


Figure 141 : Sortie et commande pour un degré de préférence  $\lambda = 0.3$ .

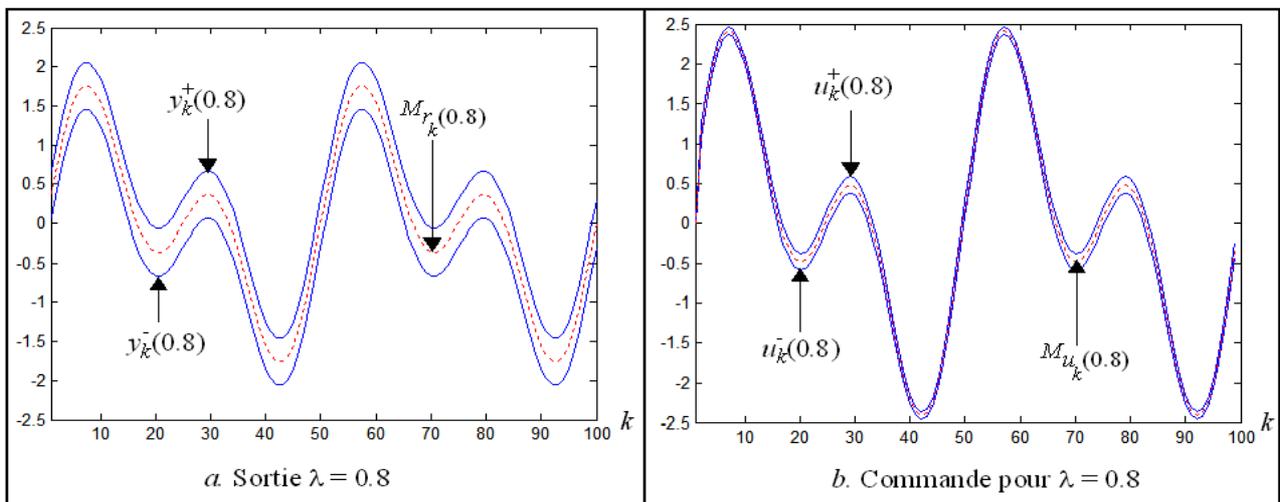


Figure 142 : Sortie et commande pour un degré de préférence  $\lambda = 0.8$ .

### 3.11 Illustration 11 : Commande supervisée d'un système de production

Pour illustrer notre démarche, l'exemple de la ligne de production à 4 modules donné dans l'annexe 1 est réutilisé (cf. illustration 6). Nous considérons les trois indicateurs de performance  $P_1$  (le surplus final moyen),  $P_2$  (le surplus final instantané) et  $P_3$  (l'encours global *WIP - Work-In-Process*) et leurs objectifs. Deux opérateurs d'agrégation : la moyenne arithmétique et l'intégrale de Choquet 2-additive ont été utilisés.

Les objectifs, déterminés par des experts, sont donnés par les intervalles graduels suivants :

$$P_1^{obj}(\lambda) = [-3 + 2\lambda, 3 - 2\lambda]; P_2^{obj}(\lambda) = [-3 + 2\lambda, 3 - 2\lambda]; P_3^{obj}(\lambda) = [2 + \lambda, 7 - \lambda]$$

Les résultats de simulation sont illustrés dans la figure ci-dessous. La figure 143.a montre l'évolution du retard moyen tandis que la figure 143.b donne la tendance de l'encours.

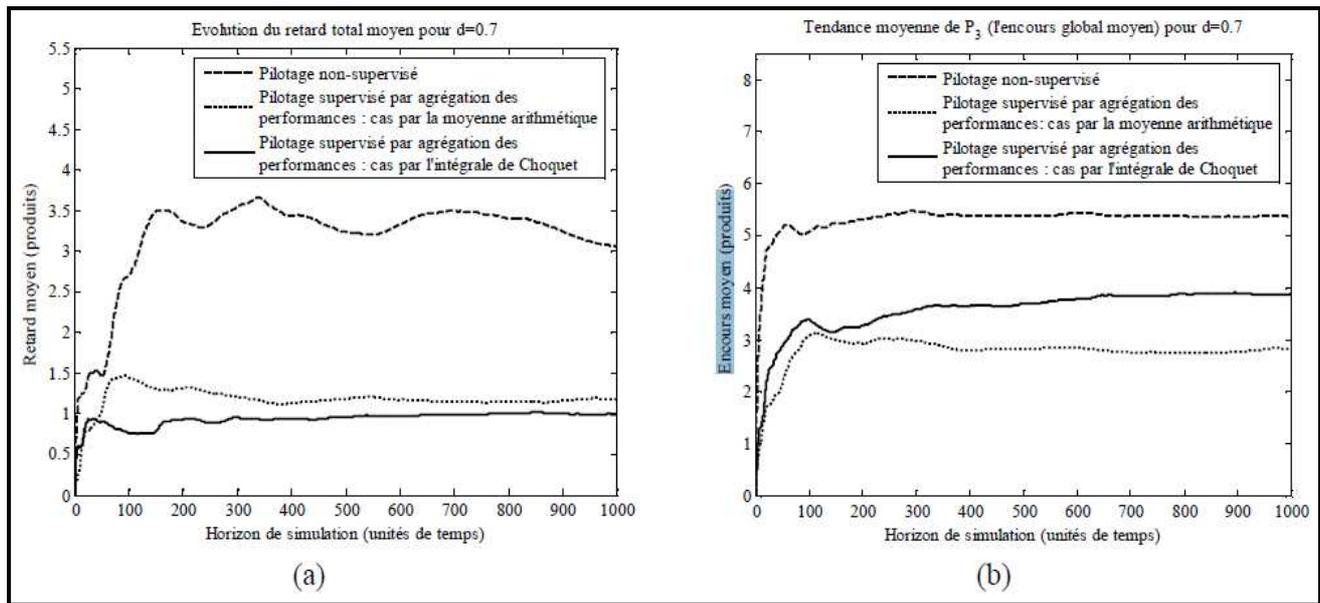


Figure 143 : Performances de la commande supervisée.

Ces résultats montrent clairement une amélioration des différentes performances par rapport au cas non supervisé. Les performances obtenues par supervision *via* l'opérateur de l'intégrale de Choquet (par rapport à la moyenne) montrent un compromis entre le retard et l'encours (dans le sens de l'amélioration du premier au détriment du second), mais tout en restant dans le domaine du fonctionnement admissible du système.

### 3.12 Illustration 12 : Pilotage supervisé pour la détection de la couleur

Pour évaluer les performances de la méthode proposée, nous exploitons à nouveau l'exemple donné dans l'annexe 1 (cf. illustration 8). Les détails techniques de cette illustration sont disponibles dans [154].

Dans l'implantation de la méthode, une caméra IP supplémentaire est utilisée pour détecter la couleur. Les fiabilités des caméras sont considérées égales à 0.73 pour la caméra de NAO et 0.51 pour la caméra IP.

Les méthodes de Dempster-Shafer ainsi que celle liée à la probabilité pignistique sont utilisées respectivement comme opérateur de combinaison et de décision. Les résultats sont donnés dans le tableau 28.

Selon ces résultats, il est clair que la qualité de détection a été augmentée en utilisant la théorie de l'évidence. En effet, le taux de détection a été amélioré de 26% par rapport à la caméra NAO et de 33% pour la caméra IP. Les situations de non détection (10% des cas) sont dues essentiellement à la présence de conflit total entre les sources (non traité avec l'opérateur de Dempster-Shafer) et/ou à l'existence de quelques sorties des systèmes flous en dehors de l'espace du discernement.

Couleur	Système flou avec la caméra NAO	Système flou avec la caméra IP	Fusion des deux caméras
Bleu	98 %	64 %	100 %
Pourpre	93 %	95 %	100 %
Rose	44 %	40 %	69 %
Rouge	65 %	52 %	90 %
Marron	70 %	51 %	88 %
Orange	68 %	76 %	96 %
Jaune	37 %	44 %	87 %
Vert	62 %	62 %	77 %
Cyan	38 %	26 %	98 %
<b>Moyenne</b>	<b>64 %</b>	<b>57 %</b>	<b>90 %</b>

Tableau 28 : Performances du système de détection supervisé.



# Bibliographie

- [1] Akaike H., A look at the statistical model identification, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 19, N° 6, pp. 716-723, 1974.
- [2] Alt R. and Markov S., On the Algebraic Properties of stochastic Arithmetic. Comparison to Interval Arithmetic, W Kraemer, J.W von Gudenberg (Eds.), Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods, Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 331-341, 2001.
- [3] Aïche F., Comparaison d'intervalles flous pour la programmation multi-objectifs dans l'incertain, Thèse de doctorat, Université de Toulouse III, 2013.
- [4] Alt R., Lamotte J-L and Markov S., Stochastic arithmetic, theory and experiments, Serdica Journal of Computing, Vol. 4, pp. 1-10, 2010.
- [5] Augustin T., Coolen F. P. A., De Cooman G. and Troffaes M. C. M., Introduction to Imprecise Probabilities, Edts. Wiley Series in Probability and Statistics, 2014.
- [6] Babuska R., Fuzzy Modeling for Control, Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [7] Baranyi P., Bavelaar I., Babuska R., Koczy L.T., Titli A., Verbruggen H.B., A method to invert a linguistic fuzzy model, Internat. J. Systems Sci. Vol. 29, N° 7, pp. 711-721, 1998.
- [8] Baudrit C., Représentation et propagation de connaissances imprécises et incertaines : Application à l'évaluation des risques liées aux sites et aux sols polluées, Thèse de doctorat, Université de Toulouse III, 2005.
- [9] Biardeau M., Simplification du remplissage automatique de moules en fonderie de métaux ferreux. Procédé de coulée gravitaire avec quenouille. Thèse de doctorat, spécialité EEA, Université de Savoie, 2009.
- [10] Bikdash M., A highly interpretable form of Sugeno inference systems, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 7, N° 6, pp. 686-696, 1999.
- [11] Bissierier A., Boukezzoula R., Galichet S., Linear Fuzzy Regression Using Trapezoidal Fuzzy Intervals, Journal of Uncertain Systems, Vol. 4, N° 1, pp. 59-72, 2010.
- [12] Bissierier A., Boukezzoula R., Galichet S., A Revisited Approach for Linear Fuzzy Regression Using Trapezoidal Fuzzy Intervals, Information Sciences, Vol. 180, N°. 19, pp. 3653-3673, 2010.
- [13] Bissierier A., Une approche paramétrique de la régression linéaire floue - Formalisation par intervalles. Thèse de doctorat, spécialité STIC - Traitement de l'information, Université de Savoie, 2010.
- [14] Bloch I. et Maitre H., Fusion de données en traitement d'images modèles d'information et décisions, Traitement du Signal, Vol. 11, N° 6, pp. 435-446, 1994.
- [15] Bloch I., Incertitude, imprécision et additivité en fusion de données : point de vue historique, Traitement du Signal Vol. 13, N°4, pp. 267-288, 1996.
- [16] Bodjanova S., Alpha-bounds of fuzzy numbers, Information Sciences, Vol. 152, pp. 237-266, 2003.

- [17] Boukezzoula R., Galichet S., Foulloy L., Elmasry M., Extended gradual interval (EGI) arithmetic and its application to gradual weighted averages, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 257, pp. 67-84, 2014.
- [18] Boukezzoula R., Foulloy L., Galichet S., Model Inversion Using Extended Gradual Intervals Arithmetic, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 2012, N° 1, pp. 82-95, 2012.
- [19] Boukezzoula R., Galichet S., Bissierier A., A Midpoint–Radius approach to regression with interval data, *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 52, N° 9, pp. 1257-1271, 2011.
- [20] Boukezzoula R., Galichet S., Foulloy L., MIN and MAX Operators for Fuzzy Intervals and their Potential Use in Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 15, N° 6, pp. 1135-1144, 2007.
- [21] Boukezzoula R., Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Feedback Linearizing Controller and its Equivalence with the Fuzzy Nonlinear Internal Model Control Structure, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol. 17, N° 2, pp. 233-248, 2007.
- [22] Boukezzoula R., Foulloy L., Galichet S., Inverse Controller Design for Interval Fuzzy Systems, *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, Vol. 14, N° 1, pp. 111-124, 2006.
- [23] Boukezzoula R., Galichet S., Foulloy L., Observer-Based Fuzzy Adaptive Control for a Class of Nonlinear Systems : Real-Time Implementation for a Robot Wrist, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 12, N° 3, pp. 340-351, 2004.
- [24] Boukezzoula R., Galichet S., Foulloy L., Nonlinear Internal Model Control : Application of Inverse Model Based Fuzzy Control, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 11, N° 6, pp. 814-829, 2003.
- [25] Boukezzoula R., Galichet S. and Foulloy L., Fuzzy Adaptive Linearizing Control for Non-affine Systems, *The IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pp. 543-548, 2003.
- [26] Boukezzoula R., Galichet S., Foulloy L., Fuzzy Nonlinear Adaptive Internal Model Control (FNAIMC), *European Journal of Control (EJC)*, Vol. 7, N° 5, pp. 523-540, 2001.
- [27] Boukezzoula R., Galichet S., Foulloy L., Robust fuzzy control for a class of continuous nonlinear systems using input-output linearization : Real-time implementation for a robot wrist, in *Proc. 2001 IEEE Int. Conference on Control Applications (CCA2001)*, Mexico, pp. 311-316, 2001.
- [28] Boukezzoula R., *Commande floue d'une classe de systèmes non linéaires : application au problème de suivi de trajectoire*, Thèse de Doctorat, Université de Savoie, 2000.
- [29] Burkill J. C., Functions of intervals. *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 22, pp. 275-336, 1924.
- [30] Cabrera J.B.D. and Narendra K.S., Issues in the Application of Neural Networks for Tracking Based on Inverse Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, N° 11, pp. 2007-2027, 1999.
- [31] Chalco-Cano Y., Lodwick W.A., Bede B., Single level constraint interval arithmetic, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 257, pp. 146-168, 2014.
- [32] Chanas S., On the interval approximation of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 102, pp. 221-226, 1999.
- [33] Chang P.T., Hung K.C., Lin K.P. and Chang C.H., A comparison of discrete algorithms for fuzzy weighted average, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 14, N° 5, pp. 663-675, 2006.
- [34] Chen B., Lee C. H., and Chang Y. C.,  $H_\infty$  tracking design of uncertain nonlinear SISO systems : Adaptive fuzzy approach, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 4, pp. 32-43, 1996.

- [35] Chiu C.H. and Wang W.J., A simple computation of MIN and MAX operations for fuzzy numbers, *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 126, N° 2, pp. 273-276, 2002.
- [36] Chuang C.C., Extended support vector interval regression networks for interval input–output data, *Information Sciences*, Vol. 178, N° 3, pp. 871-891, 2008.
- [37] Cuso I. and Dubois D., Statistical reasoning with set-valued information : Ontic vs. epistemic views, *International Journal of Approximate Reasoning*, Col. 55, N° 7, pp. 1502-1518, 2014.
- [38] Dempster A.P., Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping, *The annals of mathematical statistics*, Vol. 38, pp. 325-339, 1967.
- [39] Deschrijver G., Generalized arithmetic operators and their relationship to t-norms in interval-valued fuzzy set theory, *Fuzzy Sets and Systems*, N° 160, pp. 3080–3102, 2009.
- [40] Destercke S., Représentation et combinaison d’informations incertaines : application aux études de sûreté nucléaires, thèse de doctorat, Université de Toulouse III, 2008
- [41] Diamond P., Fuzzy Least Squares, *Information Sciences* 46. pp. 141-157, 1988.
- [42] Dimitrova N., Markov S., Popova E., Extended interval arithmetics : new results and applications, in *Computer Arithmetic and Enclosure Methods* (Eds. Atanassova L., Herzberger J.), Elsevier Sci. Publishers, pp. 225-232, 1992.
- [43] Ding Y. and Ying H., Necessary conditions on minimal system configuration for general MISO Mamdani fuzzy systems as universal approximators, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol. 30, N° 6, pp. 857-863, 2000.
- [44] Dong W. M. and Wong F. S., Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle, *Fuzzy Sets and Systems*, N° 1, pp. 183-199, 1987.
- [45] Dubois D. and Prade H., Operations on fuzzy numbers, *Journal of Systems Science*, N° 9, pp. 613-626, 1978.
- [46] Dubois D., Modèles mathématiques de l’imprécis et de l’incertain en vue d’applications aux techniques d’aide à la décision, Thèse d’état, INP de Grenoble, 413 pages, 1983.
- [47] Dubois D. and Prade H., Fuzzy sets and statistical data, *European Journal of Operational Research*, Vol. 25, 345-356, 1986.
- [48] Dubois D et Prade H., Théorie des possibilités, applications à la représentation des connaissances en informatique, Edts. Masson, Paris, 1988.
- [49] Dubois D. and Prade H., Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures, *Computational Intelligence* Vol. 4, N° 3, pp. 244-264, 1988.
- [50] Dubois D. et Prade H., La fusion d’informations imprécises, *Traitement du Signal*, Vol. 11, N° 6, pp. 447-458, 1994.
- [51] Dubois D. et Prade H., La logique floue : un outil pour appréhender pratiquement la similarité, les préférences, et l’incertitude dans les systèmes d’inférence, In *Quaderni*, N° 25, pp. 59-73, 1995.
- [52] Dubois D. and Prade H., An introduction to fuzzy systems, *Clinica Chimica Acta*, Vol. 270, pp. 3-29, 1998.
- [53] Dubois D., Kerre E., Mesiar R. and Prade H., Fuzzy interval analysis, in : D. Dubois, H. Prade (Eds.), *Fundamentals of Fuzzy Sets*, The Handbooks of Fuzzy Sets Series, Kluwer, Boston, pp. 483-581, 2000.
- [54] Dubois D. and Prade H., *Fundamentals of fuzzy sets*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [55] Dubois D. and Prade H., Gradual elements in a fuzzy set, *Soft Computing*, N° 12, pp. 165-175, 2008.

- [56] Dubois D. and Prade H., Formal representations of uncertainty, chap. 3 in Bouyssou D., Dubois D., Pirlot M., Prade H., Edts. *Decision-Making Process*, ISTE, London, UK & Wiley, Hoboken, N.J. USA, 2009.
- [57] Dubois D., On various ways of tackling incomplete information in statistics, *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 55, N° 7, pp. 1570-1574, 2014.
- [58] D'Urso P. and Gastaldi T., A least-squares approach to fuzzy linear regression analysis, *Computational Statistics & Data Analysis*, 34, pp. 427-440, 2000.
- [59] D'Urso P. and Gastaldi T., An orderwise polynomial regression procedure for fuzzy data, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 130, N° 1, pp. 1-19, 2002.
- [60] D'Urso P., Linear regression analysis for fuzzy-crisp input and fuzzy-crisp output data, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 42 (1-2), pp. 47-72, 2003.
- [61] Economou C. G., Morari M., and Palsson B. O., Internal model control. Extension to nonlinear systems, *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. and Dev.* Vol. 25, pp. 403-409, 1986.
- [62] El Hajjaji A., Rachid A., Explicit formulas for fuzzy controller, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 62, pp. 135-141, 1994.
- [63] El Hajjaji A., Rachid A., Analytic formulation of linguistic rules for fuzzy controller, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 73, pp. 219-225, 1995.
- [64] El Masry M., Identification techniques for interval regression, *Rapport de Master II Recherche, Energies Renouvelables et Systèmes Intelligents, spécialité : Traitement de l'information*, LISTIC, Université de Savoie, 2012.
- [65] Feng G., A Survey on Analysis and Design of Model-Based Fuzzy Control Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, Vol. 14, N°5, pp. 676-697, 2006.
- [66] Filev D.P. and R.R. Yager, Operations on fuzzy numbers *via* fuzzy reasoning, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 91, N° 2, pp. 137-142, 1997.
- [67] Fischle K. and Schorder D., Improved stable adaptive fuzzy control method, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 7, pp. 24-40, 1999.
- [68] Florea M.C., Combinaison d'informations hétérogènes dans le cadre unificateur des ensembles aléatoires : approximations et robustesse, *Thèse de doctorat, Université Laval*, 2007.
- [69] Fortin J., Dubois D. and Fargier H., Gradual numbers and their application to fuzzy interval analysis, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 16, N° 2, pp. 388-402, 2008.
- [70] Fortin J., Analyse d'intervalles flous, application à l'ordonnancement dans l'incertain, *Thèse de doctorat, spécialité informatique, Université de Paul Sabatier – Toulouse 3*, 2006.
- [71] Foulloy L., Boukezzoula R., Galichet S., An Educational Tool for Fuzzy Control, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 14, N° 2, pp. 217-221, 2006.
- [72] Francis B.A., *A Course on H-infinity Control Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, 1987.
- [73] Galichet S., *Contrôle flou : de l'interpolation numérique au codage de l'expertise*, HDR, Université de Savoie, 2001.
- [74] Galichet S., Boukezzoula R., Foulloy L., Explicit analytical formulation and exact inversion of decomposable fuzzy systems with singleton consequents, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 146, N° 3, pp. 421-436, 2004.
- [75] Galichet S., Foulloy L., *Fuzzy Controllers : Synthesis and Equivalences*, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 3, N° 2, pp. 140-148, 1995.

- [76] Ge H-W. and Wang S-T., Dependency between degree of fit and input noise in fuzzy linear regression using non-symmetric fuzzy triangular coefficients, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 158, N° 19, pp. 2189-2202, 2007.
- [77] Giachetti R.E. and Young R.E., A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 91, N°2, pp. 185-202, 1997.
- [78] Giachetti R.E. and Young R.E., Analysis of the error in the standard approximation used for multiplication of triangular and trapezoidal fuzzy numbers and the development of a new approximation, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 91, pp. 1-13, 1997.
- [79] Giles, R., Chapter Foundations for a theory of possibility in *Fuzzy Information and Decision Processes* (Gupta, M. M. and Sanchez, E., Ed.), pp. 183-195. Elsevier, Amsterdam, 1982.
- [80] Goldsztejn A., A Right-Preconditioning Process for the Formal-Algebraic Approach to Inner and Outer Estimation of AE-Solution Sets, *Reliable Computing*, 11, pp. 443-478, 2005.
- [81] Grabisch M., Nguen H.T. and Walker E.A., *Fundamentals of uncertainty calculi with applications to fuzzy inference*. Dordrecht, Kluwer Academic, 1994.
- [82] Grabisch M., The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making, *European journal of Operational Research*, Vol. 89, pp. 445-456, 1996.
- [83] Grabisch M., A graphical interpretation of the Choquet integral, *IEEE Transactions Fuzzy Systems*, Vol. 8, N° 5, pp. 627-631, 2000.
- [84] Grabisch M. and Labreuche C., Bi-capacitie-II : The Choquet integral, *Fuzzy Sets Systems*, Vol. 151, N° 2, pp. 237-259, 2005.
- [85] Grzegorzewski P., Nearest interval approximation of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 130, pp. 321-330, 2002.
- [86] Grzegorzewski P. and Mrowka E., Trapezoidal approximations of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 153, pp. 115-135, 2005.
- [87] Grzegorzewski P., Trapezoidal approximations of fuzzy numbers preserving the expected interval-Algorithms and properties, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 159, pp. 1354-1364, 2008.
- [88] Gueh Y.Y., Hon C.C., Lee E.S., Fuzzy weighted average : the linear programming approach *via* Charnes and Cooper's rule, *Fuzzy Sets and Systems*, N° 117, pp. 157-160, 2001.
- [89] Guerra M.L. and L. Stefanini L., Approximate fuzzy arithmetic operations using monotonic interpolations, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 150, pp. 5-33, 2005.
- [90] Guerra T.M. and Vermeiren L., LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno's form, *Automatica*, Vol. 40, N°5, pp. 823-829, 2004.
- [91] Guo P. and Tanaka H., Dual models for possibilistic regression analysis, *Computational Statistics & Data Analysis* 51 (1), pp. 253-266, 2006.
- [92] Hojati M., Bector C.R. and Smimou K., A simple method for computation of fuzzy linear regression, *European Journal of Operational Research*, Vol. 166, pp. 172-184, 2005.
- [93] Hong D.H., Song J.-K. and Young H., Fuzzy least-squares linear regression analysis using shape preserving operations, *Information Sciences* 138, pp. 185-193, 2001.
- [94] Hong D.H. and Hwang C., Extended fuzzy regression models using regularization method, *Information Sciences* 164, pp. 31-46, 2004.
- [95] Hukuhara M., Intégration des applications mesurables dont la valeur est compact convexe, *Funkcialaj Ekvacioj* 10, pp. 205-223, 1967.

- [96] Hüllermeier E., Learning from imprecise and fuzzy observations : Data disambiguation through generalized loss minimization, *International Journal of Approximate reasoning*, Vol. 55, pp. 1519-1534, 2014.
- [97] Hung W-L. and Yang M-S, An omission approach for detecting outliers in fuzzy regression models, *Fuzzy Sets and Systems* 157 (23), pp. 3109-3122, 2006.
- [98] Hwang C., Hong D.H. and Seok K.H., Support vector interval regression machine for crisp input and output data, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 157, pp. 1114-1125, 2006.
- [99] Isidori A., *Nonlinear Control Systems : an Introduction*, Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [100] Jagannathan S., Adaptive Fuzzy Logic Control of Feedback Linearizable Discrete-Time Dynamical Systems Under Persistence Excitation, *Automatica*, Vol. 34, N° 11, pp. 1295-1310, 1998.
- [101] Jaulin L., *Le calcul ensembliste par analyse par intervalles et ses applications*, HDR, Université d'Angers, 1999.
- [102] Jaulin L., Kieffer M., Didrit O. and Walter E., *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*, Springer-Verlag, 2001.
- [103] Johansen T. A., Fuzzy model based control : Stability robustness and performance issues, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 2, N° 1, pp. 221-233, 1994.
- [104] Kang H.J., Kwon C., Lee H. and Park M., Robust stability analysis and design method for the fuzzy feedback linearization regulator, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 6, N° 4, pp. 464-472, 1998.
- [105] Kao C. and Liu S.T., Fractional programming approach to fuzzy weighted average, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 120, pp. 435-444, 2001.
- [106] Karnik N. N., Mendel J. M. and Liang Q., Type-2 fuzzy logic system, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 7, pp. 643-658, 1999.
- [107] Kaufmann A. and Gupta M.M., *Introduction to fuzzy arithmetic : Theory and Applications*, Van Nostrand Reinhold Company Inc. New York, 1991.
- [108] Kaucher E., Interval Analysis in Extended Interval Space IR, *Computing, Suppl. 2*, pp. 33-49, 1980.
- [109] Kierstead H. A. and Trotter W. T., Interval orders and dimension, *Discrete Math.*, Vol. 213, N° 1-3, pp. 179-188, 2000.
- [110] Klir G. J. and Yuan, B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ. 1995.
- [111] Klir G.J., Fuzzy arithmetic with requisite constraints, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 91, N° 2, pp. 165-175, 1997.
- [112] Krstic M., Kanellakopoulos I. and Kokotovic P., *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley and Sons Inc., 1995.
- [113] Kueon Y. and Bedi J. S., Input-output fuzzy systems and the inverse problem, in *Proc. SPIE, Applications Fuzzy Logic Technology II*, vol. 2493, B. Bosacchi and J.C. Bezdek, Eds., pp. 340-346, 1995.
- [114] Kulpa K., Pownuk A., Skalna I., Analysis of linear mechanical structures with uncertainties by means of interval methods, *CAMES 5*, pp. 443-477, 1998.
- [115] Kulpa Z., Radomski A., Gajl O., Kleiber M., Skalna I., Hybrid expert system for qualitative and quantitative analysis of truss structures, *Engrg. Appl. Artif. Intell.* Vol. 12, pp. 229-240, 1999.

- [116] Kulpa Z., Diagrammatic representation for interval arithmetic, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 324, N° 1-3, pp. 55-80, 2001.
- [117] Kulpa Z. and Markov S., On the inclusion properties of interval multiplication: a diagrammatic study, *BIT Numerical Mathematics*, Vol. 43. pp. 791-810, 2003.
- [118] Kulpa Z., A diagrammatic approach to investigate interval relations, *J. Vis. Lang. Comput.*, Vol. 17, N° 5, pp. 466-502, 2006.
- [119] Lea R., Kreinovich V. and Trejo R., Optimal interval enclosures for fractionally-linear functions, and their application to intelligent control, *Reliable Computing*, Vol. 2, N° 3, pp. 265-286, 1996.
- [120] Li H.X. and Tso S.K., Higher order fuzzy control structure for higher order or time-delay systems, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 7, N° 5, pp. 540-552, 1999.
- [121] Li S-G., Fuzzy intervals, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 14, N° 6, pp. 737-740, 2001.
- [122] Liang Q. and M. Mendel J.M., Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design, *IEEE Trans. On Fuzzy Systems*, Vol. 8, N° 5, pp. 535-550, 2000.
- [123] Lieberman I.H., Disc bulge bubble: spine economics 101 – Editorial, *The Spine Journal*, Vol. 4, pp. 609–613, 2004.
- [124] Liou T.S., Wang M.J.J., Fuzzy weighted average: an improved algorithm, *Fuzzy Sets and Systems*, N° 49, pp. 307-315, 1992.
- [125] Liu F. and Mendel J-M., Aggregation Using the Fuzzy Weighted Average as Computed by the Karnik–Mendel Algorithms, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 16, N° 1, pp. 1-12, 2008.
- [126] Liu X., Mendel J-M. and Wu D., Analytical solution methods for the fuzzy weighted average, *Information Sciences*, Vol. 187, pp. 151-170, 2012.
- [127] Lodwick W.A. and Untiedt E.A., *A Comparison of Interval Analysis Using Constraint Interval Arithmetic and Fuzzy Interval Analysis Using Gradual Numbers*, NAFIPS, New York, USA, 2008.
- [128] Lodwick W.A, Dubois D., Interval Linear Systems As a Necessary Step in Fuzzy Linear Systems, *Fuzzy sets and systems*, Vol. 281, pp. 227-251, 2015.
- [129] Mamdani E.H., Application of Fuzzy Algorithms for Control of a simple Dynamic Plant, *Proc. of the IEE Control and Science*, Vol. 121, N° 12, pp. 1585-1588, 1974.
- [130] Mamdani E.H., Advances in the Linguistic of Fuzzy Controllers, *Int. Journal of Man-Machines Studies*, 8, pp. 669-678, 1975.
- [131] Mamdani E.H. and Assilian S., An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, *Int. J. Man-Machine Studies*, vol. 7, pp. 1-13, 1975.
- [132] Mansouri B., Manamanni N., Guelton K., Kruszewski A. and TM. Guerra., Output feedback LMI tracking control conditions with H [infinity] criterion for uncertain and disturbed TS models. *Information Sciences*, Vol. 179, N° 4, pp. 446-457, 2009.
- [133] Marichal J.L., Concepts et méthodes pour l'aide à la décision, Vol. 3, chap. Fonctions d'agrégation pour la décision. IC2 Series, Hermès Science Publications, 2006.
- [134] Markov S., On directed interval arithmetic and its applications, *Journal of Universal Computer Science*, Vol. 1, N° 7, pp. 514-526, 1995.
- [135] Markov S., Alt R. and Lamotte J-L., Stochastic Arithmetic: s-spaces and Some Applications, *Numerical Algorithms*, Vol. 37, N° 1-4, pp. 275-284, 2004.

- [136] Markov S., Computation of Algebraic Solutions to Interval Systems *via* Systems of Coordinates, Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods Eds. W. Kraemer, J. Wolff von Gudenberg, Kluwer, pp. 103-114, 2000.
- [137] Masson M-H., Apports de la théorie des possibilités et des fonctions de croyance à l'analyse de données imprécises, HDR, Université de Technologie de Compiègne, 2005.
- [138] Megri F., Boukezzoula R., MIN and MAX Operators for Trapezoidal Fuzzy Intervals, International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics (IJICC), Vol. 3, N° 1, pp. 55-72, 2010.
- [139] Megri F., Programmation dynamique floue appliquée à la commande des systèmes non linéaires. Thèse de doctorat Algérienne, spécialité Electronique, Université de Constantine, 2008.
- [140] Mendel J.M., Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001.
- [141] Mendel J. M. and R. I. John, Type-2 fuzzy sets made simple, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 10, N° 2, pp. 117-127, 2002.
- [142] Mendel J.M. and John R.I., Type-2 fuzzy sets made simple, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 10, N° 2, pp. 117-127, 2002.
- [143] Mendel J. M., Fuzzy sets for words: a new beginning, in Proc. of IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, St. Louis, pp. 37.42, MO, 2003.
- [144] Mendel J.M., John R.I. and Liu F., Interval type-2 fuzzy logic systems made simple, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 14, N° 6, pp. 808-821, 2006.
- [145] Meyer P. and Roubens M., On the use of the Choquet integral with fuzzy numbers in multiple criteria decision support, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 157, N° 7, pp. 927-938, 2006.
- [146] Moore R. E., Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing, PhD Thesis, Department of Computer Science, Stanford University, 1962.
- [147] Moore R. E., Interval Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.
- [148] Morari M. and Zafiriou E., Robust Process Control, Ed. Prentice Hall, Englewood cliffs, N.J., 1989.
- [149] Mizumoto M. and Tanaka K., Some Properties in Fuzzy Sets of Type-2. Information and Control, 31, pp. 312-340, 1976.
- [150] Mizumoto M. and Tanaka K., Fuzzy Sets of Type-2 under Algebraic Product Algebraic Sum, Fuzzy Sets and Systems, 5, pp. 277-290, 1981.
- [151] Nasri I., Habchi G., Boukezzoula R., Use of (max, +) algebra for scheduling and optimization of HVLV systems subject to preventive maintenance, Simulation Modelling Practice and Theory, Volume 46, pp. Pages 149-163, 2014.
- [152] Nasri I., Développement d'une méthodologie d'ordonnancement/ optimisation adaptée aux systèmes industriels de type HVLV (High-Variety, Low Volume. Thèse de doctorat, spécialité Sciences pour l'ingénieur, Université de Grenoble, 2013.
- [153] Nguyen T.L., Boukezzoula R., Coquin D. and Perrin S., Combination of Sugeno Fuzzy System and Evidence Theory for NAO Robot in Colors Recognition, IEEE Fuzzy Systems Conference (FUZZ-IEEE), CD-ROM, pp. 1-8, Istanbul, Turkey, Aug. 2015.
- [154] Nguyen T.L., Boukezzoula R., Coquin D. and Perrin S., Color Recognition for NAO Robot Using Sugeno Fuzzy System and Evidence Theory, 16th World Congress of the International Fuzzy Systems Association (IFSA-EUSFLAT), pp. 1176-1183, Gijon, Spain, June-July 2015.

- [155] Nguyen T.L., Boukezzoula R., D. Coquin and S. Perrin, Interaction Between Humans and NAO Robot for Colored Objects Recognition using Information Fusion, The 8th IEEE International Conference on Human System Interactions (HSI), pp. 322-328, Warsaw, Poland, June 2015.
- [156] Ouachani I., Rabhi A., El Hajjaji A. and Tidhaf B., Robust  $H_\infty$  Observer-Based Tracking Control for the Photovoltaic Pumping System, Energy and Power Engineering, Vol. 6, pp. 266-277, 2014.
- [157] Oussalah M. and DeSchutter J., Approximated fuzzy LR computation, Information Sciences, Vol. 153, pp. 155-175, 2003.
- [158] Palm R., Robust Control by Fuzzy Sliding Mode, Automatica, Vol. 30, N° 9, pp. 1429-1437, 1994.
- [159] Park S. and Han T., Iterative inversion of fuzzified neural networks, IEEE Transactions Fuzzy Systems, Vol. 8, pp. 266-280, 2000.
- [160] Park C. W. and Cho Y. W., T-S model based indirect adaptive fuzzy control using online parameter estimation, IEEE Trans. Syst. Man and Cybernetics, Part B, Vol. 34, N° 6, pp. 2293-2302, 2004.
- [161] Piegat A., Cardinality Approach to Fuzzy Number Arithmetic, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 13, N° 2, pp. 204-215, 2005.
- [162] Popova E., Multiplication Distributivity of Proper and Improper Intervals”, Reliable Computing, N° 7, pp. 129-140, 2001.
- [163] Rao S.S., Berke L., Analysis of uncertain structural systems using interval analysis, AIAA J. Vol. 35, pp. 727-735, 1997.
- [164] Rivals I., Personnaz L., Nonlinear Internal Model Control Using Neural Networks: Application to Processes with Delay and Design Issues, IEEE Trans. Neural Networks, Vol. 11, N° 1, pp. 80-90, 2000.
- [165] Rissanen J., Modeling by shortest data description. Automatica, Vol. 14, N° 5, pp. 465-471, 1978.
- [166] Rovatti R., Fuzzy piecewise multilinear and piecewise linear systems as universal approximators in Sobolev norms, IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol. 6, N° 2, pp. 235-249, 1998.
- [167] Rzezuchowski T. and Wąsowski J., Solution of fuzzy equations based on Kaucher arithmetic and AE-solutions sets, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 159, pp. 2116-2129, 2008.
- [168] Sakawa M. and Yano H., Multiobjective fuzzy linear regression analysis for fuzzy input-output data, Fuzzy Sets and Systems Vol. 47, pp. 173-181, 1992.
- [169] Sengupta A. and Kumar P. T., On comparing interval numbers, European Journal of Operational. Research, Vol. 127, N° 1, pp. 28-43, 2000.
- [170] Shafer G., A mathematical theory of evidence, Princeton University Press, 1976.
- [171] Slotine J.J. and Li W. Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall. Inc., 1991.
- [172] Smets Ph., Belief functions versus probability functions. In Proceedings of the 2nd international Conference on information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems on Uncertainty and intelligent Systems (Urbino, Italy). G. Goos and J. Hartmanis, Eds. Springer-Verlag New York, New York, NY, 17-24, 1988.
- [173] Smets Ph., Constructing the Pignistic Probability Function in a Context of Uncertainty, UAI., Vol. 89, pp. 29-40, 1989.

- [174] Smets Ph., The Combination of Evidence in the Transferable Belief Model, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 12, N° 5, pp. 447-458, 1990.
- [175] Smets Ph. et Kennes R., The Transferable Belief Model, Artificial Intelligence, Vol. 66, pp. 191-234, 1994.
- [176] Smets Ph., Imperfect information: Imprecision - Uncertainty, In A. Motro et Ph. Smets, Eds. Uncertainty Management in Information Systems, pp. 225-254. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [177] Spooner J.T. and Passino K.M., Stable Adaptive Control Using Fuzzy Systems and Neural Networks, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 4, N° 3, pp. 339-359, August 1996.
- [178] Stefanini L. and Bede B., Generalization of Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, Nonlinear Analysis, Vol.71, pp.1311-1328, 2009.
- [179] Stefanini L., A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 161, pp. 1564-1584, 2010.
- [180] Sugeno M. and Tang G.T., Fuzzy Modelling and Control of Multilayer Incinerator, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 18, pp. 329-345, 1986.
- [181] Sugeno M., On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents, IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol. 7, pp. 201-224, 1999.
- [182] Sunaga T., Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis, RAAG Memoirs, Vol. 2, pp. 29-46, 1958.
- [183] Takagi T. and Sugeno M., Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modeling and Control, IEEE Trans. on Syst. Man and Cybernetics, Vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [184] Tamani K., Boukezzoula R., Habchi G., Application of a continuous supervisory fuzzy control on a discrete scheduling of manufacturing systems, Engineering Applications of Artificial Intelligence (EAAI), Vol. 24, N° 7, pp. 1162-1173, 2011.
- [185] Tamani K., Boukezzoula R., Habchi G., Multi-objective supervisory flow control based on fuzzy interval arithmetic: Application for scheduling of manufacturing systems, Simulation Modelling Practice and Theory, Vol. 15, N° 5, pp. 1371-1383, 2011.
- [186] Tamani K., Boukezzoula R., Habchi G., Supervisory based capacity allocation control for manufacturing systems simulation, International Journal of Manufacturing Technology and Management (IJMTM), Vol. 20, N° 1-4, pp. 259-285, 2010.
- [187] Tamani K., Boukezzoula R., Habchi G., Intelligent distributed and supervised flow control methodology for production systems, Engineering Applications of Artificial Intelligence (EAAI), Vol. 22, N° 7, pp. 1104-1116, 2009.
- [188] Tamani K., Développement d'une méthodologie de pilotage intelligent par régulation de flux adaptée aux systèmes de production. Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2008.
- [189] Tanaka H., Uejima S. and Asai K., Linear regression analysis with fuzzy model, IEEE, Systems, Trans. Systems Man Cybernetics. SMC-2, pp. 903-907, 1982.
- [190] Tanaka H., Hayashi I. and Watada J., Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data, European Journal of Operational Research 40, pp. 389-396, 1989.
- [191] Tanaka H. and Ishibushi H., Identification of possibilistic linear systems by quadratic membership functions of fuzzy parameters, Fuzzy Sets and Systems 41, pp. 145-160, 1991.

- [192] Tsang D.L., Chang H.Y. and Lee C.J., "The Adaptive Control of Nonlinear Systems Using the Sugeno-Type of Fuzzy Logic", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 7, N° 2, pp. 225-229, 1999.
- [193] Vannoorenberghe P., "Un état de l'art sur les fonctions de croyance appliquées au traitement de l'information, *Information interaction intelligence*, Vol. 3, N°2, pp. 9-4, 2003.
- [194] Varkonyi-Koczy A. R., Almos A., and Kovacs-hazy T., "Genetic algorithms in fuzzy model inversion, *Fuzzy Systems Conference (FUZZ'IEEE99)*, Seoul, Korea, pp. 1421-1426, 1999.
- [195] Vidyasagar M., *Nonlinear Systems Analysis, Second Edition*, Prentice-Hall Inc., 1993.
- [196] Wang L. X., "Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 1, pp. 146–155, 1993.
- [197] Wang L.X., *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1994.
- [198] Wang H.O., Tanaka K., and Griffin M.F., "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 4, N° 1, pp. 14-23, 1996.
- [199] Wu H.-C., "Fuzzy estimates of regression parameters in linear regression models for imprecise input and output data, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 42 (1-2), pp. 203-217, 2003.
- [200] Wu D. and Mendel J.M., "Enhanced karnik–mendel algorithms, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 17, N° 4, pp. 923-934, 2009.
- [201] Yager R.R., "An introduction to applications of possibility theory, *Human Systems Management*, Vol. 3, pp. 246-269, 1983.
- [202] Yager R.R., "On the Dempster-Shafer framework and new combination rules, *Information sciences*, Vol. 41, N° 2, pp. 93-137, 1987.
- [203] Yao J-S. and Wu K., "Consumer surplus and producer surplus for fuzzy demand and fuzzy supply, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 103, pp. 421-426, 1999.
- [204] Yang M.S. and Liu H.H., "Fuzzy least-squares algorithms for interactive fuzzy linear regression Models, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 135, N° 2, pp. 305-316, 2003.
- [205] Ying H., Chen G., "Necessary conditions for some typical fuzzy systems as universal approximators, *Automatica*, Vol. 33, N° 7, pp. 1333-1338, 1997.
- [206] Ying H., "Analytical analysis and feedback linearization tracking control of the general Takagi-Sugeno fuzzy dynamic system, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet-Part C: Appl. Rev.* 29 (1), pp. 290-298, 1999.
- [207] Young R.C, "The algebra of many-valued quantities. *Math. Annalen*, Vol. 104, pp. 260-290, 1932.
- [208] Zadeh L. A., "Fuzzy sets, *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [209] Zadeh L. A., "Fuzzy algorithms, *Information and Control*, Vol. 12, pp 94-102, 1968.
- [210] Zadeh L.A., "Quantitative fuzzy semantics, *Information Science*, Vol. 3, N° 2, pp. 159-176, 1971.
- [211] Zadeh L.A., "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, *IEEE Transactions On Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 3, N°1, pp. 28-44, 1973.

- [212] Zadeh, L.A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Parts 1, 2, 3, Information Sciences, 8, pp. 199-249, pp. 301-357 and pp. 43-80, 1975.
- [213] Zadeh L.A., Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, pp. 3-28, 1978.
- [214] Zeng X.J., Singh M.G., Decomposition property of fuzzy systems and its applications, IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol. 4, N° 2, pp. 149-165, 1996.
- [215] Zeng X.J. and Singh M.G., Knowledge Bounded Least Squares Method for the Identification of Fuzzy Systems, IEEE Trans. On Syst. Man, and Cyber. Part C, Vol. 33, N° 1, pp. 24-32, 2003.
- [216] Zhang J.M., Li R.H. and P.A., Zhang. Stability analysis and systematic design of fuzzy control systems. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 120, N° 1, pp. 65-72, 2001.