Quelques réflexions concernant la représentation d'une algèbre de Post et d'une algèbre de Post involutive dans l'algèbre des parties floues d'une structure floue involutive.

J. COULON et J.L. COULON

Nous utilisons une définition du concept d'algèbre de Post avec une chaîne fermée de constantes qui,dans le cas d'une chaîne continue comme par exemple l'intervalle réel [0,1] ,est celle que donne T.TRACZYK dans [9] .

Alors, le treillis J^X des parties floues d'un ensemble non vide X est naturellement une algèbre de Post si et seulement si la chaîne fermée J est complète.

Nous montrons, reprenant une idée de D. PONASSE exposée dans [5] , que toute algèbre de Post est représentable dans l'algèbre des parties floues d'une structure floue. Nous définissons aussi, par analogie avec la théorie des algèbres de Lukasiewicz,une notion d'algèbre de Post involutive. Reprenant notre travail [2] , nous montrons que toute algèbre de Post involutive est représentable dans l'algèbre des parties floues d'une structure floue involutive.

Enfin, notre travail est à mettre en parallèle avec celui de S.RUDEANU [7] .

---

1. Définition d'une algèbre de Post avec une chaîne fermée de constantes.

Nous adopons une définition du concept d'algèbre de Post avec une chaîne fermée de constantes un peu différente de celle utilisée par S.RIBEYRE [6] et S.RUDEANU [7] mais qui nous semble plus en accord avec la théorie des ensemble flous et qui, dans le cas où la chaîne est l 'intervalle réel [0,1] coïncide avec la notion d'algèbre de Post généralisée avec une chaîne continue de constantes selon T.TRACZYK [9] .

Définition:

Soit J une chaîne fermée (de plus petit élément 0, de plus grand élément 1). On appelle algèbre de Post J-valuée toute $(L, J, (e_i)_{i\in J}, (D_i)_{i\in J})$ où:

* L est un treillis distributif fermé (dont on notera aussi 0 et 1 les éléments extrêmes)
* $(e_i)_{i\in J}$ est une famille d'éléments de L telle que $e_0 = 0$, $e_1 = 1$, $i \leq j \Rightarrow e_i \leq e_j$
* Si B désigne l'anneau booléen des éléments chrysippiens de L, $(D_i)_{i\in J}$ est une famille d'applications de L dans B, avec: $D_0(x) = 1$, $i \leq j \Rightarrow D_i(x) \geq D_j(x)$, et si

$i = \bigvee_k i_k$ existe (dans J) , alors la famille $\{D_{i_k}(x)\}_k$ a une borne inférieure dans B, et : $D_i(x) = \bigwedge_k D_{i_k}(x)$

* $x = \bigvee_{i \in J} \left[e_i \wedge D_i(x) \right]$

* si $(a_i)_{i \in J}$ est une famille d'éléments de B telle que : $a_0 = 1$, $i \leq j \Rightarrow a_i \geq a_j$, et si $i = \bigvee_k i_k$ existe , alors $\bigwedge_k a_{i_k}$ existe et $a_i = \bigwedge_k a_{i_k}$, alors il existe un élément x de L tel que : pour tout i dans J : $a_i = D_i(x)$ et $x = \bigvee_{i \in J} \left[e_i \wedge a_i \right]$

Remarque: on vérifie aisément que toute algèbre de Post est une algèbre de Lukasiewicz (en prenant la définition d'une algèbre de Lukasiewicz donnée par l'école roumaine de MOISIL et rappelée dans [1] et [2] .

2. A quelle condition l'algèbre J^X des parties floues d'un ensemble X est-elle une algèbre de Post?

Théorème 1: soit J une chaîne fermée et X un ensemble non vide.
L'algèbre J^X des parties floues de X est une algèbre de Post si et seulement la chaîne J est complète.

Preuve:

* J^X est naturellement un treillis distributif fermé, dont l'ensemble des éléments chrysippiens est $B = 2^X$ (ensemble des parties nettes de X)
* posons, pour chaque i de J , et pour chaque x de X : $E_i(x) = i$.

On a clairement $E_0 = \emptyset$, $E_1 = X$, $i \leq j \Rightarrow E_i \supset E_j$.

* Si $\mu \in J^X$, posons pour tout i de J : $D_i(\mu) = \{ x \in X \,/\, \mu(x) \geq i \}$.

On voit clairement que:

$$D_i(\mu) \in B$$
$$D_0(\mu) = X$$
$$i \leq j \Rightarrow D_i(\mu) \supset D_j(\mu)$$
$$\text{Si } i = \bigvee_k i_k \text{ , alors } D_i(\mu) = \bigcap_k D_{i_k}(\mu)$$
$$\mu = \bigcup_i \left[E_i \cap D_i(\mu) \right]$$

* <u>Supposons maintenant que la chaîne J est complète :</u>

Soit $(A_i)_{i \in J}$ une famille de parties nettes de X telle que:

$$A_0 = X$$

$$i \le j \Rightarrow A_i \supset A_j$$

$$\text{Si } i = \bigvee_k i_k \text{, alors : } A_i = \bigcap_k A_{i_k}$$

Comme J est complète , on peut poser: $\mu = \bigcup_i \left(E_i \cap A_i \right)$

Reste à montrer que, pour tout i de J : $A_i = D_i(\mu)$:

$$x \in D_i(\mu) \Leftrightarrow \mu(x) \ge i \Leftrightarrow \bigvee_{j \in J} \left[j \wedge A_j(x) \right] \ge i \Leftrightarrow \vee\{j \in J \,/\, x \in A_j\} \ge i$$

Soit $J_x = \vee\{j \in J \,/\, x \in A_j\} \ge i$ et $i_0 = \bigvee J_x$. Comme $A_{i_0} = \bigcap_{j \in J_x} A_j$, J_x est une section initiale de J de plus grand élément i_0 .

Donc $x \in D_i(\mu) \Leftrightarrow i_0 \ge i \Leftrightarrow i \in J_x \Leftrightarrow x \in A_i$.

*<u>Supposons cette fois J non complète:</u>

Soit M une partie de J sans borne supérieure .

Fixons un élément a de X.

Définissons la famille $(A_i)_{i \in J}$ par:

$A_0 = X$

Si $i \neq 0$, et si i est majoré par un élément de M : $A_i = \{a\}$.

Si $i \neq 0$, et si i n' est pas majoré par un élément de M : $A_i = \varnothing$.

Il est facile de voir que $i \le j \Rightarrow A_i \supset A$

Supposons que $i = \bigvee_k i_k$:

S'il existe k_1 tel que $A_{i_{k_1}} = \varnothing$: $\bigcap_k A_{i_k} = \varnothing$. Or, pour tout m de M : $i_{k_1} > m$, donc $i \ge i_{k_1} > m$, et $A_i = \varnothing$

Si pour tout k, $A_{i_k} = \{a\}$: $\bigcap_k A_{i_k} = \{a\}$. Or il existe m_k dans M tel que $i_k \le m_k$ pour tout k . Si $A_i = \varnothing$, pour tout m de M : $i > m$ et i majore M. Soit l un majorant de M : $l \ge m_k \ge i_k$, d'où $l \ge i$ et $i = \vee M$, absurde. Donc $A_i = \{a\}$

Le cas où il existe k_1 tel que $A_{i_{k_1}} = X$ se traite facilement.

Si J^X était une algèbre de Post, il existerait $\mu \in J^X$ telle que : $\mu = \bigcup_{j\in J} (E_j \cap A_j)$

$\forall j \in J : D_j(\mu) = A_j$

Remarquons que $\mu(a) \neq 0$, et que $A_{\mu(a)} = D_{\mu(a)}(\mu) = \{a\}$. Donc il existe m_1 dans M tel que $\mu(a) \leq m_1$. D'autre part, si $m \neq 0$, $A_m = \{a\}$ et $A_m = D_m(\mu)$.
D'où $\mu(a) \geq m$.
De tout cela résulte que $\mu(a) \in M$ et que M admet une borne supérieure, $\mu(a)$, ce qui est absurde.

3. Représentation d'une algèbre de Post :

Théorème 2 : soit $[L, J, (e_i)_{i\in J}, (D_i)_{i\in J}]$ une algèbre de Post. Notons B l'anneau booléen des éléments chrysippiens, et S son espace dual (ensemble des ultrafiltres). Soit $\mathcal{J}$ la chaîne des sections initiales de $J - \{0\}$. Alors, l'application f de L dans $\mathcal{J}^S$ définie par $f(x)(s) = \{ i \in J-\{0\} / D_i(x) \in s \}$ est un monomorphisme d'algèbres de Post.

Preuve: la notion de morphisme d'algèbre de Post va de soi.
* D.PONASSE a déjà utilisé dans [5] cette application f et montré qu'elle est un monomorphisme d'algèbres de Lukasiewicz.
* comme $\mathcal{J}$ est complète, on peut munir $\mathcal{J}^S$ d'une structure naturelle d'algèbre de Post (cf 2.)
* $f(e_i)(s) = \{j \in J-\{0\} / D_j(e_i) \in S\}$
Or (cf [3]), on montre que $D_j(e_i) = 0$ si $i < j$, 1 sinon. D'où résulte que:
$f(e_i)(s) = \{j \in J-\{0\} / j \leq i\} = E_i(s)$.

4. Définition d'une algèbre de Post involutive :

Définition:
Soit J une chaîne fermée, munie d'une involution décroissante n. On appelle algèbre de Post involutive toute $[L, J, n, (e_i)_{i\in J}, (D_i)_{i\in J}, (\Delta_i)_{i\in J}, N]$ où :
* $[L, J, (e_i)_{i\in J}, (D_i)_{i\in J}]$ est une algèbre de Post au sens de 1.
* N est une involution décroissante de L dont la restriction à l'anneau booléen B des éléments chrysippiens est la négation booléenne $\neg$ de B et telle que $e_{ni} = Ne_i$ pour tout i de J.

* $(\Delta_i)_{i\in J}$ est une famille d'applications de L dans B , avec: $\Delta_1(x) = 0$, $D_iN = \neg\Delta_{ni}$ pour tout i de J , $\Delta_i \leq D_i$, et (c) : $D_i = \bigwedge_{j<i} \Delta_j$

Remarque: si J est une chaîne complète munie d'une involution décroissante n , et X un ensemble non vide, alors J^X est naturellement une algèbre de Post involutive:
on munit d'abord J^X de la structure d' algèbre de Post évoquée en 2.
Posons, pour tout i de J : $\Delta_i(\mu) = \{ x\in X / \mu(x) > i \}$,
et : $(N\mu)(x) = n[\mu(x)]$
On vérifie facilement que, ainsi équipée, J^X est une algèbre de Post involutive.

Remarque: toute algèbre de Post involutive est une algèbre de Lukasiewicz involutive (au sens de [2])

5. Représentation d'une algèbre de Post involutive :

Théorème 3: soit $[L , J , n , (e_i)_{i\in J} , (D_i)_{i\in J} , (\Delta_i)_{i\in J} , N]$ une algèbre de Post involutive. Soit $\mathcal{J}$ le complétéde Mac Neille de J. Soit Z l'ensemble des filtres premiers de L. Alors on définit un monomorphisme d'algèbres de Post involutives de la façon suivante:
f(x) (P) = ensemble des minorants des majorants de $\{i\in J-\{0\}/D_i(x)\in P \}$

preuve:
* la notion de morphisme d'algèbres de Post utilisée va de soi.
* nous avons déjà utilisé dans [2] cette application f.

Rappelons que, si S^+ désigne -pour toute partie S de J -l'ensemble des minorants des majorants de S, le complété de Mac Neille de J est l'ensemble des parties S de J telles que $S^+ = S$, muni de l'inclusion.
Rappelons (cf [2]) qu'il existe une unique involution décroissante m de $\mathcal{J}$ qui prolonge n , à savòir :

$$m(S) = \bigcap_{\alpha\in S} [n(\alpha)]^+$$

Dans [2] , nous avons démontré que f est un monomorphisme d'algèbres de Lukasiewicz involutives.
* Il reste à vérifier que $f(e_i) = E_i$
Or $f(e_i)(P) = \{ j\in J-\{0\}/D_j(e_i)\in P\}^+ = \{ j\in J-\{0\}/ j\leq i \}^+ = \{ j\in J / j\leq i \} = E_i(P)$

6. Quelles sont les algèbres de Post et les algèbres de Post involutives isomorphes à une algèbre de Post (involutive) de la forme J^X?

a Remarques préliminaires:

Soit L une algèbre de Post (J-valuée,dont B est l'anneau booléen des éléments chrysippiens) isomorphe à $J_1{}^X$. Alors, nécessairement:

$J_1 = J$

J_1, donc J , est complète

L'isomorphisme de L sur J^X induit par restricion un isomorphisme booléen de B sur 2^X.

b Inversement, soit $[\, L, J, (e_i)_{i\in J}, (D_i)_{i\in J} \,]$ une algèbre de Post. On suppose la chaîne J complète et qu'il existe un isomorphisme booléen λ de l'anneau booléen B des éléments chrysippiens de L sur l'anneau booléen 2^X des parties d'un ensemble X non vide (c'est-à-dire que l'anneau booléen B est complet et atomique).
Alors, on définit une application θ de L dans J^X de la manière suivante:
soit x dans L. On considère la famille $(D_i(x))_{i\in J}$ d'éléments de B.
Par λ, il lui correspond une famille $(A_i)_{i\in J}$ d'éléments de 2^X.

Comme on a clairement $A_i = \bigcap\limits_k A_{i_k}$ si $i = \bigvee\limits_k i_k$, cette famille $(A_i)_{i\in J}$ est la famille des niveaux de flou d'un certain élément de J^X qu'on prend par définition pour $\theta(x)$.
on vérifie aisément que θ est un isomorphisme de Post de L sur J^X.

c soit $[\, L, J, n, (e_i)_{i\in J}, (D_i)_{i\in J}, (\Delta_i)_{i\in J}, N \,]$ une algèbre de Post involutive.On suppose J complète, et qu'il existe un isomorphisme booléen de B sur un 2^X.On construit, comme en **b** , l'isomorphisme de Post θ de L sur J^X.

Grâce aux relations $D_i N = \neg\Delta_{ni}$ et $D_i = \bigwedge\limits_{j<i} \Delta_j$ (d'où résulte que $\Delta_i = \bigvee\limits_{j>i} D_j$) , on vérifie aisément que θ est en fait un isomorphisme d'algèbres de Post involutives de L sur J^X.

En résumé:

Théorème 4: une algèbre de Post (éventuellement involutive) J-valuée et dont B est l'anneau booléen des éléments chrysippiens, est isomorphe à une algèbre J^X si et seulement si J est complète et B est complet et atomique.

7. Quelques commentaires pour finir:

Soit L une algèbre de Post J-valuée dont B est l'anneau booléen des éléments chrysippiens.

a Si J est complète, si tout élément de J a un prédécesseur et si B est fini, le monomorphisme f décrit au paragraphe 3 est un isomorphisme:

Comme J est complète et comme chacun de ses éléments a un prédécesseur, $\mathfrak{J} = J$.
Comme B est fini, B est isomorphe (par l'application de Stone) à l'anneau booléen des parties de l'espace de ses ultrafiltres.

On vérifie alors aisément que l'isomorphisme θ construit en **6.b** coïncide avec l'application f décrite en **3.**

b Même si J est complète et si B est fini, le monomorphisme décrit au paragraphe **5.** peut n'être pas surjectif:

La chaîne J a trois éléments $0<\frac{1}{2}<1$ peut être naturellement munie d'une structure d'algèbre de Post involutive J-valuée.

$B = \{0,1\}$.

L'ensemble Z des filtres premiers propres de L possède deux éléments: $\{\frac{1}{2},1\}$, $\{1\}$.

Par conséquent L , qui a trois éléments, ne saurait être isomorphe à J^Z qui en a neuf.

Références:

[1] J.COULON et J.L.COULON: A propos de la représentation des algèbres de Lukasiewicz et des algèbres booléennes floues. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 34-5 (1989), 403-411.

[2] J.COULON et J.L.COULON: Un nouveau résultat concernant la représentation d'une algèbre de Lukasiewicz involutive dans l'algèbre des parties floues d'une structure floue involutive. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 38-4 (1993), 319-326.

[3] G.EPSTEIN: The lattice theory of Post algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 300-317;

[4] Gr. C.MOISIL: Essais sur les logiques non chrysippiennes. Ed. Academici., Bucarest (1972).

[5] D.PONASSE: Algèbres floues et algèbres de Lukasiewicz. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 23 (1978), 103-111.

[6] S.RIBEYRE: Sructures floues et algèbres de Post. Publ. Dép. Math. Lyon 15 (1978), 1-37.

[7] S.RUDEANU: On Lukasiewicz-Moisil algebras of fuzzy sets. Studia Logica 52 (1993), 95-111.

[8] M.H.STONE: The theory of representation for boolean algebras. Trans.Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37-111.

[9] T.TRACZYK: On Post algebras with uncountable chain of constants. Bull. Acad. Polonaise Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 15 (1967), 673-680.

[10] L.ZADEH: Fuzzy sets. Information and Control 8 (1965), 338-353.

J. COULON, J.-L. COULON
UNIVERSITÉ LYON I Bâtiment 101
43, boulevard du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex
FRANCE