9

UNE INTERPRÉTATION POUR "Q B X SONT A"

Patrick Bosc & Ludovic Lietard

IRISA/ENSSAT
BP 447
Lannion Cédex
FRANCE

Résumé : Ce document propose d'interpréter les propositions quantifiées de type "Q B X sont A" (Q étant un quantificateur relatif) par une valeur de possibilité et une valeur de nécessité. Déterminer si l'expression "Q B X sont A" est vraie c'est déterminer si l'ensemble flou des éléments B vérifie "Q sont A". La valeur de possibilité exprime l'existence d'une λ-coupe (de l'ensemble des éléments B) qui vérifie "Q sont A". Plus cette λ-coupe est de niveau élevé et plus il est possible de "Q B X sont A" soit vraie. La valeur de nécessité exprime que chaque λ-coupe vérifie "Q sont A". Plus toutes les λ-coupes satisfont "Q sont A" et plus il est certain que "Q B X sont A" soit vraie.

1. Introduction

Les quantificateurs linguistiques [ZADE 83] représentent des expressions linguistiques et font référence à des quantités qui, le plus souvent, sont imprécises (*la plupart, environ 3*). Leur but est de tolérer des exceptions dans les agrégations de conditions (*presque toutes* les conditions sont satisfaites).

Notons X un ensemble ordinaire d'éléments, A et B deux prédicats flous et Q un quantificateur linguistique. Il est possible de distinguer les expressions quantifiées floues signifiant "parmi les éléments de X, il y en a Q qui satisfont A" (de type I ou"Q X sont A") de celles signifiant "parmi les éléments de X qui satisfont B, il y en a Q qui satisfont A" (de type II ou "Q B X sont A"). Un exemple de proposition quantifiée de type "Q X sont A" est "*presque tous* les employés de cette entreprise sont *jeunes*" avec Q le quantificateur linguistique *presque tous*, X l'ensemble des employés de l'entreprise et A le prédicat flou *être jeune*. La proposition "*presque tous* les employés *jeunes* de cette entreprise sont *bien payés*" est une proposition quantifiée de type "Q B X sont A" avec Q le quantificateur linguistique *presque tous*, B et A les prédicats flous respectifs *être jeune* et *être bien payé* et X l'ensemble des employés de l'entreprise.

Les approches antérieures [YAGE 91, ZADE 83, YAGE 84] pour interpréter les propositions quantifiées de type II pouvant s'avérer contre-intuitive [BOSC 96], le but de ce document est de proposer une nouvelle interprétation pour les expressions quantifiées de type "Q B X sont A". On remarque que si Q est absolu, une proposition quantifiée de type II est équivalente à une proposition quantifiée de type I ("*au moins 3* employés *jeunes* sont *bien payés*" $\Leftrightarrow$ "*au moins 3* employés sont (*jeunes* et *bien payés*)"). Ce document est donc limité aux propositions quantifiées de type II impliquant un quantificateur relatif. En outre, pour simplifier, l'on considère que l'ensemble flou des éléments qui satisfont B est normalisé ($\exists x \in X, \mu_B(x) = 1$).

La section 2 présente le calcul de la nécessité et de la possibilité de l'expression "Q B X sont A". La section 3 montre que si le quantificateur est universel (tous), l'on retrouve une proposition antérieure pour exprimer "tous les éléments B sont A" par un indice d'inclusion.

2. Interprétation de "Q B X sont A"

La proposition "Q B X sont A" signifie que "parmi les éléments de X qui satisfont B, il y en a Q qui satisfont A". Soit encore :

"Q B X sont A" $\Leftrightarrow$ l'ensemble flou des éléments B vérifie "Q sont A".

L'interprétation proposée décrit l'ensemble flou des éléments B par une distribution de possibilité et délivre la possibilité et la nécessité de l'événement "Q sont A".

Soit $X = \{x_1, x_2, ..., x_c\}$ et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties. Considérons la fonction π définie sur $\mathcal{P}(U)$ par [ZADE 71] :

$$\pi(E) = \{\sup \alpha \in (0, 1] \text{ tel que } E = B_\alpha\} \text{ et } 0 \text{ sinon},$$

en notant $B\alpha = \{x \text{ tel que } \mu_B(x) \geq \alpha\}$. La valeur $\pi(E)$ est interprétée comme la possibilité que l'ensemble E soit une représentation de l'ensemble des éléments B [ZADE 71]. Cette distribution peut être établie en considérant toutes les différentes valeurs α_i de la liste $(\mu_B(x_1), \mu_B(x_2), ..., \mu_B(x_c))$. Chaque valeur α_i est interprétée comme la possibilité ($\pi(B\alpha_i)$) de la λ-coupe de niveau α_i de l'ensemble des éléments B.

Exemple 1. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ tel que :

$\mu_B(x_1)$	$\mu_B(x_2)$	$\mu_B(x_3)$	$\mu_B(x_4)$	$\mu_B(x_5)$
1	0.9	0.6	0.2	0.2

Figure 1 : degrés de satisfaction au prédicat B.

Les λ-coupes sont : $\{x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et nous obtenons la distribution de possibilité :

$$\pi(\{x_1\}) = 1,\ \pi(\{x_1, x_2\}) = 0.9,$$
$$\pi(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0.6,\ \pi(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 0.2.$$

La possibilité que l'ensemble des éléments B soit $\{x_1, x_2, x_3\}$ est de 0.6.

Fin-exemple.

Soit $\mu(E)$ le degré de vérité de l'expression "Q E sont A" pour E tout ensemble ordinaire inclus dans X. La fonction μ décrit un événement flou sur $\mathcal{P}(U)$, celui des ensembles vérifiant "Q éléments sont A". La valeur de $\mu(E)$ est l'interprétation de "Q éléments de E sont A" (proposition de type I) et peut être calculée par un opérateur OWA [YAGE 88] ou selon une approche par décomposition [YAGE 84].

La distribution de possibilité π représente l'ensemble des éléments B, la fonction μ l'événement flou "Q sont A". La possibilité et la nécessité de l'événement flou "Q sont A" sont :

$$\Pi = \max_{E \in \mathcal{P}(X)} \min (\pi(E), \mu(E)) = \max_i \min (\alpha_i, \mu(B\alpha i))$$
$$N = \min_{E \in \mathcal{P}(X)} \max (1 - \pi(E), \mu(E)) = \min_i \max (1 - \alpha_i, \mu(B\alpha i)),$$

avec α_i les différents degrés de satisfaction au prédicat flou B et $B\alpha_i$ la λ-coupe de niveau α_i de l'ensemble des éléments B. La valeur de possibilité exprime l'existence d'une λ-coupe qui vérifie "Q sont A". Plus cette λ-coupe est de niveau élevé et plus il est possible que "Q B X sont A" est vraie. Si la valeur de la nécessité est faible c'est qu'il existe une λ-coupe de niveau élevé (valeur α_i forte) qui vérifie faiblement : "Q éléments sont A" (valeur $\mu(B\alpha_i)$ faible). Plus la nécessité est élevée et plus chaque λ-coupe niveau élevé vérifie fortement "Q éléments sont A" (on peut remarquer que si le noyau de l'ensemble flou des éléments B ne vérifie pas du tout "Q éléments sont A" alors la nécessité est nulle).

Exemple 2. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et le quantificateur *presque tous* de la figure 2.

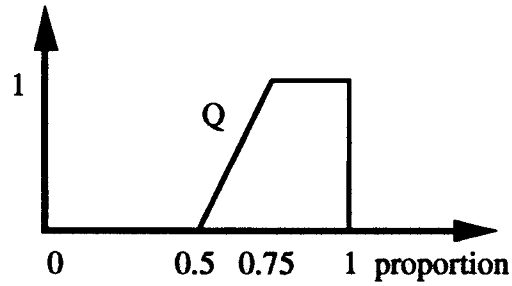

Figure 2: le quantificateur *presque tous.*

Les degrés de satisfaction aux prédicats flous B et A sont donnés par la figure 3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mu_B(x)$	1	0.9	0.6	0.2	0.2
$\mu_A(x)$	1	1	0.3	1	0

Figure 3: degrés de satisfaction à B et A.

La distribution de possibilité décrivant l'ensemble des éléments B est (cf. exemple 1):

$\pi(\{x_1\}) = 1$, $\pi(\{x_1, x_2\}) = 0.9$,
$\pi(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0.6$, $\pi(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 0.2$.

En calculant les valeurs de la fonction μ (par un opérateur OWA, cf. annexe) :

$$\mu(\{x_1\}) = 1 * (Q(1) - Q(0)) = 1,$$
$$\mu(\{x_1, x_2\}) = 1 * (Q(1) - Q(1/2)) + 1 * (Q(1/2) - Q(0)) = 1,$$
$$\mu(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0.3 * (Q(1)-Q(2/3)) + 1 * (Q(2/3)-Q(1/3)) + 1 * (Q(1/3)-Q(0)) = 0.75,$$
$$\mu(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 0.58.$$

D'où:

$$\Pi = \max \min(1, 1), \min(0.9,1), \min(0.6, 0.75), \min(0.2, 0.58) = 1,$$
$$N = \min \max(0, 1), \max(0.1, 1), \max(0.4, 0.75), \max(0.8, 0.58) = 0.75.$$

Il est donc entièrement possible que "*presque tous* les éléments B sont A" soit vrai (car le noyau vérifie "*presque tous* sont A"). La certitude que "*presque tous* les éléments B sont A" est de 0.75.

Fin-exemple.

3. Liens avec les propositions antérieures

Si Q est le quantificateur universel (Q relatif défini par $\forall i \neq 1$, Q(i) = 0 et Q(1) = 1), l'expression "$\forall$ B X sont A" exprime que "tous les éléments B de l'ensemble X sont A". En d'autres termes :

"$\forall$ B X sont A"
$\Leftrightarrow$ l'ensemble des éléments B est inclus dans celui des éléments A.

Le degré de vérité de "$\forall$ B X sont A" peut donc être défini par un indice d'inclusion de l'ensemble des éléments B (EB) dans celui des éléments A (EA). Cet indice peut être exprimé par [BAND 80] :

$$d(EB \subseteq EA) = \min_{x \in X} \mu_B(x) \rightarrow \mu_A(x),$$

avec $\rightarrow$ toute implication floue.

Il est possible de montrer que si Q est le quantificateur universel alors la valeur de nécessité délivré par notre approche est égale à d(EB $\subseteq$ EA) si l'implication choisie est celle de Kleene-Dienes ($a \rightarrow b = \max(1 - a, b)$) :

$$N = d(EB \subseteq EA) = \min_{x \in X} \max(1 - \mu_B(x), \mu_A(x)).$$

Ce résultat donne une signification en termes d'importance [DUBO 94] à la satisfaction au prédicat B (plus x vérifie B et plus il est important que x vérifie A) et établit des liens avec la division relationnelle de relations floues [DUBO 94].

Preuve. Nous avons :

$$N = \min_i \max(1 - \alpha_i, \mu(B\alpha_i)),$$

avec α_i les différents degrés de satisfaction des éléments x à B, $B\alpha_i$ la λ–coupe de S de niveau α_i ($B\alpha_i = \{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha_i\}$) et $\mu(E)$ le degré de vérité de l'expression "*Q* E sont A". Considérons $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_k = 1$.

La démonstration se décompose en deux étapes. La première transforme l'expression de N. La deuxième étape montre que cette nouvelle expression est égale à:

$\min_x \max(1 - \mu_B(x), \mu_A(x)) = d(EB \subseteq EA)$.

<u>Première étape</u> : Soit Q le quantificateur relatif décrivant le quantificateur universel *tous* (∀). Nous avons : Q(1) = 1 et ∀ i <1, Q(1) = 0. En conséquence $\mu(B\alpha_i) = \min_{x \in B\alpha i} \mu_A(x)$ (que l'on choisisse une approche par décomposition ou par un opérateur OWA pour définir μ). L'expression de N se réécrit :

$$N = \min_i \max(1 - \alpha_i, \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x)).$$

Nous allons distinguer 2 catégories (I et II) de valeurs α_i et montrer que le résultat final ne dépend que des valeurs de la catégorie I. Nous pourrons alors modifier les contributions des valeurs de catégorie II pour modifier N.

Distinguons les valeurs α_i de type I telles que (il en existe au moins une qui est $\alpha_k = 1$) :

$$\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x) = \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) = \alpha i} \mu_A(x)$$

des valeurs α_i de type II telles que :

$$\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x) = \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) > \alpha i} \mu_A(x).$$

Montrons que la valeur de N ne peut être donné par une valeur de type II en établissant que pour chaque valeur α_i de type II, il existe une valeur α_j de type I telle que :

$$\max(1 - \alpha_j, \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha j} \mu_A(x)) \leq \max(1 - \alpha_i, \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x)). \quad (1)$$

<u>démonstration de (1)</u> :

Considèrons une valeur α_i de type II (i.e. $\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x) = \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) > \alpha i} \mu_A(x)$) et notons z l'élément de X tel que :

$$\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x) = \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) > \alpha i} \mu_A(x) = \mu_A(z). \quad (2)$$

Soit $\alpha_j = \mu_B(z)$ (j est l'indice de $\mu_B(z)$ dans la suite (α_n)). Montrons que α_j est de type I et qu'il vérifie l'expression (1). Nous avons (d'après le domaine d'application de l'expression (2)) :

$$\alpha_j > \alpha_i \quad (3).$$

Comme $\alpha_j > \alpha_i$ on peut écrire trivialement :

$$\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha j} \mu_A(x) \geq \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x).$$

Comme $\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x) = \mu_A(z)$ (par définition de $\mu_A(z)$, cf. expression (2)) alors l'expression précédente se réécrit :

$$\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha j} \mu_A(x) \geq \mu_A(z).$$

Et comme z vérifie $\mu_B(z) = \alpha_j$ (par définition) alors :

$$\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha j} \mu_A(x) \leq \mu_A(z),$$

et en comparant avec l'expression précédente :

$$\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha j} \mu_A(x) = \mu_A(z) \text{ avec } \mu_B(z) = \alpha_j. \tag{4}$$

D'où α_j est de type I. (5)

De plus, comme $\alpha_j > \alpha_i$ (expression (3)) :

$$\max(1- \alpha_j, \mu_A(z)) \leq \max(1- \alpha_i, \mu_A(z)).$$

On remplace $\mu_A(z)$ dans la précédente expression (en utilisant (4) et (2)) :

$$\max (1 - \alpha_j, \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha j} \mu_A(x)) \leq \max (1 - \alpha_i, \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x)).$$

La valeur α_i est de type II (par définition) et α_j est de type I (expression (5)). L'expression (1) est donc démontrée.

Les valeurs α_i de type II n'interviennent pas dans le calcul de N. On peut donc remplacer dans l'expression de N les expressions :

$$\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha i} \mu_A(x)$$

concernant les valeurs de type II par une quantité plus grande sans affecter le résultat final (N étant une valeur minimale). Cette quantité plus grande est : $\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) = \alpha i} \mu_A(x)$ et donc :

$$N = \min_i \max(1 - \alpha_i, \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) = \alpha_i} \mu_A(x)),$$

(car $\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) \geq \alpha_i} \mu_A(x) = \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) = \alpha_i} \mu_A(x)$ pour une valeur de type I par définition et les expressions concernant les valeurs de type II sont remplacées).

Deuxième étape : Nous avons :

$$N = \min_i \max(1 - \alpha_i, \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) = \alpha_i} \mu_A(x)). \tag{6}$$

On remplace $\max(1 - \alpha_i, \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) = \alpha_i} \mu_A(x))$ par $\min_{x \text{ tq } \mu_B(x) = \alpha_i} \max(1 - \alpha_i, \mu_A(x))$ dans l'expression (6) et l'on obtient :

$$N = \min_i \min_{x \text{ tq } \mu_B(x) = \alpha_i} \max(1 - \alpha_i, \mu_A(x))$$
$$= \min_x \max(1 - \mu_B(x), \mu_A(x)).$$

Exemple 3. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Les degrés de satisfaction aux prédicats flous B et A sont donnés par la figure 4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mu_B(x)$	1	0.9	0.9	0.2	0.2
$\mu_A(x)$	1	1	0.3	1	0

Figure 4: degrés de satisfaction à B et A.

La distribution de possibilité décrivant l'ensemble des éléments B est :

$$\pi(\{x_1\}) = 1, \pi(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0.9, \pi(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 0.2.$$

Les valeurs de la fonction μ sont :

$$\mu(\{x_1\}) = 1, \quad \mu(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0.3, \quad \mu(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = 0.$$

($\mu(E) = \min_{x \in E} \mu_A(x)$ car Q est le quantificateur universel). D'où:

$$\Pi = \max \min(1, 1) \min(0.9, 0.3) \min(0.2, 0) = 1,$$
$$N = \min \max(0, 1) \max(0.1, 0.3), \max(0.8, 0) = 0.3.$$

Le calcul du degré d'inclusion par l'implication de Kleene-Dienes est:

$$d(EB \subseteq EA) = \min_{x \in X} \max(1 - \mu_B(x), \mu_A(x))$$
$$= \min \max(0, 1) \max(0.1, 1) \max(0.1, 0.3) \max(0.8, 1) \max(0.8, 0) = 0.3.$$

On observe $N = d(EB \subseteq EA)$.

Fin-exemple.

5. Conclusion

Ce document a proposé une approche pour exprimer "Q B X sont A" (Q étant relatif) par une valeur de nécessité et une valeur de possibilité. Déterminer si l'expression "Q B X sont A" est vraie c'est déterminer si l'ensemble flou des éléments B vérifie "Q sont A". La valeur de possibilité exprime l'existence d'une λ-coupe (de l'ensemble des éléments B) qui vérifie "Q sont A". Plus cette λ-coupe est de niveau élevé et plus il est possible que "Q B X sont A" est vraie. La valeur de nécessité exprime que toute λ-coupe satisfait l'expression "Q sont A". Plus toutes les λ-coupes de niveau élevé satisfont "Q sont A" plus il est certain que "Q B X sont A" est vraie.

En outre il est facile de montrer que cette approche vérifie les propriétés proposées dans [BOSC 96] pour l'interprétation des propositions de type II. Ces propriétés définissent un comportement de l'interprétation et ne sont pas vérifiées par les approches antérieures pour interpréter "Q B X sont A".

Dans le cas particulier où le quantificateur linguistique est le quantificateur universel (∀) cette approche retrouve la proposition de Dubois et Prade [DUBO 94] pour exprimer "∀ B X sont A". Ce résultat donne une signification en termes d'importance [DUBO 94] à la satisfaction au prédicat B (plus x vérifie B et plus il est important que x vérifie A).

Cependant, cette étude est limitée à un ensemble flou des éléments B normalisé. Son extension à un ensemble non normalisé doit être envisagée dans le futur.

Annexe. L'interprétation d'une proposition quantifiée de type "Q X sont A" par un opérateur OWA est limitée aux quantificateurs monotones (croissant ou décroissant).

croissant	décroissant
- $Q(0) = 0$, - $\exists$ k tel que $Q(k) = 1$, - $\forall$ a,b si $a > b$ alors $Q(a) \geq Q(b)$.	- $Q(0) = 1$, - $\exists$ k tel que $Q(k) = 0$, - $\forall$ a,b si $a > b$ alors $Q(a) \leq Q(b)$.

Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ tel que $\mu_A(x_1) \geq \mu_A(x_2) \geq ... \geq \mu_A(x_n)$. L'interprétation de"Q X sont A", avec Q croissant, est donnée par [YAGE 88] :

$$\mathrm{OWA} = \sum_{i=1}^{n} (w_i \times \mu_A(x_i)), \tag{7}$$

avec $w_i = Q(i) - Q(i-1)$ si Q est absolu ou $w_i = Q(i/n) - Q(i-1/n)$ si Q est relatif. Chaque poids w_i représente l'accroissement du degré de vérité de la quantification si l'on compare une situation comportant exactement (i-1) éléments entièrement A avec une situation comportant i éléments entièrement A (les autres éléments ne vérifiant absolument pas A). L'extension à un quantificateur Q décroissant [YAGE 93, BOSC 93] est basée sur l'équivalence :

$$\text{"Q X sont A"} \Leftrightarrow \text{"Q' X sont } \overline{A}\text{"},$$

avec Q' le quantificateur antonyme de Q (Q étant décroissant, Q' est un quantificateur croissant). L'interprétation de la quantification "Q X sont A" avec un quantificateur décroissant se ramène à celle d'une proposition quantifiée impliquant un quantificateur croissant (l'antonyme de Q) et la négation de A. Il est alors possible d'utiliser l'expression (7) pour interpréter "Q' X sont $\overline{A}$" et le résultat obtenu est le degré de vérité de l'expression "Q X sont A".

Références

[BAND 80] W. Bandler, L.J. Kohout (1980), Fuzzy power sets and fuzzy implication operators, *Fuzzy Sets and Systems,* 4, 13-30.

[BOSC 93] P. Bosc, L. Liétard (1993), On the extension of the OWA operator to evaluate some quantifications, *Proceedings of the first European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies (EUFIT'93),* Aachen (Allemagne), 332-338.

[BOSC 96] P. Bosc, L. Liétard (1996), Complex quantified statements in database flexible querying, *NAFIPS'96* (Juin 96).

[DUBO 94] D. Dubois, H. Prade (1994), Quotient operators in fuzzy relational databases, *2nd European Congress on Fuzzy and Intelligent Techniques (EUFIT'94)*, Aachen (Allemagne), 357-360.

[YAGE 84] R.R. Yager (1984), General multiple-objective decision functions and linguistically quantified statements, *International Journal of Man-Machine Studies*, 21, 389-400.

[YAGE 88] R.R. Yager (1988), On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking, *Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18, 183-190.

[YAGE 91] R.R. Yager (1991), Fuzzy quotient operators for fuzzy relational databases, *Proceedings of International Fuzzy Engineering Symposium (IFES'91)*, Yokohama (Japon), 289-296.

[YAGE 93] R.R. Yager (1993), Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 59, 125-148.

[ZADE 71] L.A. Zadeh (1971), Similarity relations and fuzzy ordering, *Information Sciences*, 3, 177-200.

[ZADE 83] L.A. Zadeh (1983), A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages, *Computer Mathematics with Applications*, 9, 149-183.