FONCTION DÉPENDANTE ET BOÎTE

R. Orellana Ch.

Université Centrale du Vénézuéla, Vénézuéla.

Resume: Dans ce travail on se propose de représenter une fonction dépendante par l'intermédiaire d'une boîte, laquelle permet de visualiser les degrés d'appartenance d'un élément de l'ensemble universel, par rapport à l'extension de l' ensemble.

Mots clés: Non compatible, fonction dépendante, extension d' ensemble, boîte.

PROBLÈME NON COMPATIBLE

Cai Wen [1] introduit la notion d'**extension d' ensemble**. Il exposait que souvent se sont présentés ou se présentent des problèmes qui ont une repercussion sur les conditions initiales de situations qui sont contradictoires (situations qu' il est impossible de satisfaire en même temps). Par exemple, il est impossible pour n' importe qui d' utiliser une romaine pour peser un éléphant. Néanmoins l' histoire de "Chao Chong", nous montre qu' il existe une façon pour résoudre la pesée d' un éléphant.

Un problème d' une telle nature est connu en mathématiques sous le nom de **problème non compatible**.

Nous appelerons conditions compatibles, les conditions que l' on peut satisfaire en même temps.

La façon de faire que nous montre l' histoire de Chao Chong pour la pesée d' un éléphant a l'aide d' une romaine, nous indique qu'un problème non compatible peut devenir compatible grâce à certaines méthodes de transformations.

Cai Wen a tenu compte de trois aspects essentiels pour résoudre un problème non compatible:

1. Le changement de la matière (de l' objet, de la question dont il sagit) et de ses caractéristiques.
2. L' introduction de quelques méthodes non mathématiques.
3. L' usage de quelque logique qui permette certaines conditions caractéristiques qui sont contradictoires.

Dans la théorie de Cantor, une chose vraie est vraie, et une chose fausse est fausse. Cette situation s' explique grâce à une logique de deux valeurs représentées par "0" et par "1". Un élément (un objet) appartient à un sous-ensemble ou non, suivant que l' on lui associe 1 ou 0.

Dans la théorie d' ensemble flous, on considère une logique qui peut prendre plus de deux valeurs et on utilise l' intervalle fermé [0,1]. Cet intervalle s' interprête comme étant l'ensemble de "degrés d' appartenance" d' un élément d' un ensemble par rapport à un sous-ensemble du même ensemble. Avec cette notion s' est établie le concept d' ensemble flous.

Pour résoudre un problème non compatible on doit **admettre qu' une chose qui est vraie et une chose qui est fausse peuvent s'interchanger**. Par exemple, l' éléphant qui pèse 5.000 kg, ne peut appartenir à l' ensemble des objets qui se pèsent avec une romaine, mais celui-ci peut être transformé dans un élément de l'ensemble des objets qui se pèsent avec une romaine, en utilisant quelque méthode spéciale. On peut déduire de cet exemple, que la logique de deux valeurs est insuffisante et que l' on doit utiliser une logique qui permette de décrire les caractéristiques contradictoires et en faire usage de certaines transformations.

EXTENSION D' ENSEMBLE ET FONCTION DÉPENDANTE

Cai Wen a introduit les concepts d' **éxtension d' ensemble** et de **fonction dépendante**, pour pouvoir discuter à propos de comment un élément qui n' appartient pas à un sous-ensemble classique peut se transformer en un élément du dit sous-ensemble. Celle-ci est l' idée de base pour résoudre un problème non compatible.

Considérons un sous-ensemble A d' un élément universel U, en mathématique classique, un élément u de U qui n' appartient pas à A, appartient a A'. Aux éléments de A' nous pouvons les considérer divisés en deux catégories, où chaque catégorie possède des caractéristiques propres (innées) et fait que chacune d' elles soit bien différenciée.

Par exemple, considérons les pièces produites par un tour; elles peuvent être classifiées en "standard" et "non standard". Les standards son caractérisées par leurs diamètres compris entre 50±0,01. La catégorie des pièces non standards nous pouvons la considérer divisée en deux catégories bien différenciées, une première catégorie constituée par les pièces d' un diamètre d<49,99, cette catégorie constitue les pièces "rejetées"; une deuxième catégorie est constituée par les pièces de diamètre d>50,01, cette catégorie constitue les pièces "réexploitables", grâce à une transformation elles peuvent se transformer en pièces standards. Les pièces non standards sont constituées par les rejetées et les réexploitables, et ces deux catégories se différencient en elles mêmes car elles possèdent des caractéristiques propres.

Pour décrire la situation qui se pose, c' est à dire pour expliquer le lien qui existe entre une pièce quelconque produite par le tour et l'ensemble des pièces standards, on le fait en passant par l' extension d' un ensemble.

Regardons ce que l' on comprend par **fonction dépendante d' un intervalle de l' ensemble des numéros réels.**

Etant donné un intervalle I=[a,b] et un point quelconque $x_0 \in \mathbb{R}$. L' expression

$$d = \left| X_o - \frac{a+b}{2} \right| - \left| \frac{b-a}{2} \right|$$

determine la distance du point x_0 par rapport à [a,b], et nous écrirons $\tau(x_0,I)$; où $\tau(x_0,I)$ vérifie les propriétées suivantes:

1. Un point $x \in I$, si et seulement si $\tau(x,I) \leq 0$
2. Un point $x \notin I$, si et seulement si $\tau(x,I) > 0$.
3. Si I y J son deux intervalles de $\mathbb{R}$, où $I \subset J$, alors pour n' importe quel $x \in \mathbb{R}$, on aura $\tau(x,I) \geq \tau(x,J)$.

THEORÈME

Supposons que nous avons deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$, tels que $I \subset J$ et que ceux-ci n' ont pas d' extremitées finales communes.

Nous définissons la fonction suivante, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$K(y) = \frac{\tau(y,I)}{\tau(y,J) - \tau(y,I)}$$

alors i) $y \in I$, si et seulement si $K(y) \geq 0$.

ii) $y \in J-I$, si et seulement si $-1 \leq K(y) < 0$.

iii) $y \in J$, si et seulement si $K(y) < -1$.

Nous appelerons par $I = \{y \,/\, K(y) \geq 0\}$, $I = \{y \,/\, -1 \leq K(y) < 0\}$, et par $\tilde{I}' = \{y \,/\, K(y) < -1\}$.

La fonction K(y) s' appelle fonction dépendante de l' ensemble

$\tilde{I}(\tilde{I} = J = IU(J\text{-}I))$, à l'**ensemble I on l' appelle extension de l'ensemble** $\tilde{I}$, et à l' **ensemble** $\tilde{I}$**' extension négative de l' ensemble** $\tilde{I}$.

Si I et J ont des extrémitées finales communes, on réexplique la fonction dépendante par:

$$K(y) = \begin{cases} -\tau(y,I) & \text{si } \tau(y,I) < 0 \\ -\tau(y,I) - 1 & \text{si } \tau(y,I) \geq 0 \end{cases}$$

Alors, i) $y \in I$ si et seulemente si $K(y) \geq 0$

ii) $y \notin I$ si et seulemente $K(y) < -1$.

Voyons ce que l' on comprend par extension d'ensemble.

Considérons un ensemble universel U ayant des éléments sous une certaine condition (restriction) tel que l' on l' a déjà signalé, et une fonction $K_{\tilde{A}}: U \longrightarrow \mathbb{R}$, telle qu' à tout $u \in U$, on lui fait correspondre le numéro réel $K_{\tilde{A}}(u)$. **La fonction** $K_{\tilde{A}}$ **s' appelle fonction dépendante de** $\tilde{A}$.

Pour $K_{\tilde{A}}(u) \geq 0$, signifie que $u \in A$ (sous-ensemble commun); et à $A = \{u/ K_{\tilde{A}}(u) \geq 0, u \in U\}$ on l' appelle **le champ classique de** $\tilde{A}$.

Pour $-1 \leq K_{\tilde{A}}(u) < 0$, signifie que $u \notin A$, mais sous la condition, u peut aller appartenir à A; et à $A = \{u/ -1 \leq K_{\tilde{A}}(u) < 0, u \in U\}$ on l'**appelle l'extension du champ** $\tilde{A}$.

Pour $K_{\tilde{A}}(u) < -1$, signifie que $u \in A$ et u ne peut pas aller appartenir à A, sous la condition; et à $\tilde{A}' = \{u/ K_{\tilde{A}}(u) < -1, u \in U\}$ on l' appelle **le champ négatif de** $\tilde{A}$.

On appelle **extension de l' ensemble** $\tilde{A}$ **a l'union de AUA.**

Nous pouvons observer que le concept d'extension d'ensemble s'introduit en définissant la fonction dépendante qui correspond à l'extension d' un ensemble. En plus, pour définir la fonction dépendante il faut considérer en tant que valeurs logiques l'ensemble des numéros réels ($\mathbb{R}$) au lieu de l'ensemble $\{0,1\}$. L'ensemble des numéros réels nous permet d'expliquer le degré d'appartenance d'un élément "u" par rapport à l'extension d'ensemble.

On introduit aussi des opérations sur les extensions d' ensembles; nous tiendrons compte de quelques unes. Etant données les extensions d'ensembles $\tilde{A}$ et B, on définil l' **addition ajoutée** $\tilde{A}$**UB** de $\tilde{A}$ et B, le **produit** $\tilde{A} \cap$**B** de $\tilde{A}$ et B, et le **complément** $\tilde{A}'$ de $\tilde{A}$, par sa fonction dépendante respectivement:

$$K_{\tilde{A}\cup B}(u) = \max(K_{\tilde{A}}(u), K_B(u)),\ K_{\tilde{A}\cap B}(u) = \min(K_{\tilde{A}}(u), K_B(u)),$$
$$K_{\tilde{A}'}(u) = -K_{\tilde{A}}(u).$$

EXTENSION D' ENSEMBLE ET BOÎTE

L' utilisation des techniques d' Analyse Exploratoire de données, à la place des méthodes statistiques usuelles, provient du fait qu' il n' est pas suffisant d' avoir confiance dans les condensés statistiques de repérage et de variabilité étant donné que beaucoup de variables possèdent de valeurs extrêmes qui peuvent perturber sérieusement la distribution de ces variables.

Parmis les techniques d' Analyse Exploratoire on peut mentionner le **dispositif de tiges et de feuilles** et le **graphique de boîte**.

Le **graphique de boîte** est un dispositif qui représente les éléments essenciels d' un dispositif de tiges et de feuilles (voir (Paúl F. Velleman et David C. Hoaglin (1981); Rafael J. Orellana (1987)).

Dans ce tra vail nous en ferons une utilisation différente d' un graphique de boîte. Les éléments principaux d' un graphique de boîte sont:

1. La médiane,
2. Les quartiers.
3. Les enceintes intérieures,
4. Les enceintes extérieures.

La médiane (M_e) et les quartiers (C_1,C_3) sont définis de la façon habituelle. Les quartiers déterminent la longueur de la boîte et ils apparaissent explicitement dans le graphique.

Les enceintes n' apparaissent pas expressement dans le graphique, mais on écrit les valeurs qui les dépassent et on les calcules de la façon suivante:

Enceintes intérieures

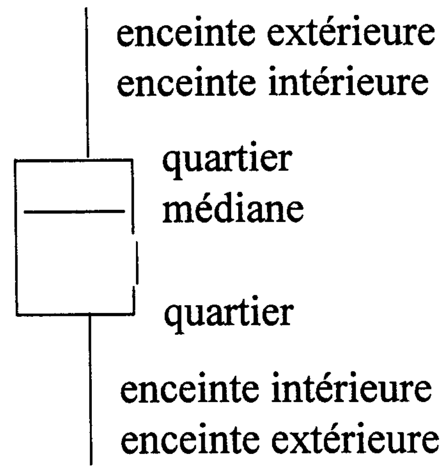
$$\text{inférieure: } CI_i = C_1 - 1{,}5(C_3 - C_1) = C_1 - 1{,}5R$$
$$\text{supérieure: } CI_s = C_3 + 1{,}5(C_3 - C_1) = C_3 + 1{,}5R$$

Enceintes extérieures

$$\text{inférieure: } CE_i = C_1 - 3{,}0(C_3 - C_1) = C_1 - 3R$$
$$\text{supérieure: } CE_s = C_3 + 3{,}0(C_3 - C_1) = C_3 + 3R$$

Toute valeur qui tombe entre les enceintes intérieures et les extérieures est classifiée comme **éloignée** (représentée par le symbole "o") et celles qui tombent en dehors des enceintes extérieures sont classifiées comme **très éloignées** (représentées par le symbole "■").

La largeur de la boîte est déterminée en accord par rapport a la taille des groupes que l'on désire représenter.



Prenons un ensemble universel U dont les éléments remplissent une certaine restriction (condition) déterminée par une caractéristique associée à eux.

Supposons que nous avons un ensemble de n valeurs y_i ayant cette caractéristique; avec cet ensemble de valeurs nous pouvons construire une boîte.

D' autre part, considérons une fonction dépendante K, où nous identifions I comme l'intervalle d' extrême les enceintes intérieures, comme J l' intervalle d' extrême les enceintes extérieures; comme (J-I) l' intervalle d' extrême inférieur une enceinte intérieure et comme extrême supérieur une enceinte supérieure.

De cette façon nous avons représenté une valeur du champ classique comme une valeur normale, une valeur de l' extension comme une valeur éloignée, et une valeur du champ négatif comme une valeur très éloignée.

Si une valeur "y" est une valeur normale, alors $K(y) \geq 0$.

Si une valeur "y" est une valeur éloignée, alors $-1 \leq K(y) < 0$.

Si une valeur "y" est une valeur très éloignée, alors $K(y) < -1$.

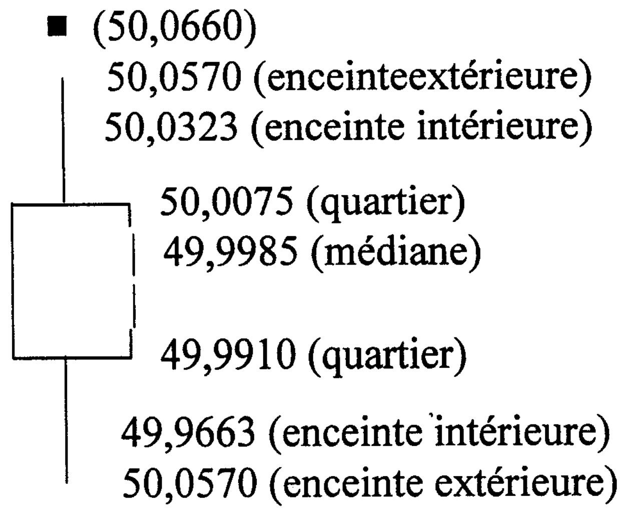
Par exemple, considérons le processus: production de pièces par un tour et observons la caractéristique (variable) le diamètre des pièces produites, où ceux-ci varient.

Diamètres des pièces produites par un tour
(n=16 mesures simmulées, N(50;0,01))

49,996	50,005	49,990	49,996	49,982	49,987
50,066	50,005	49,999	50,015	49,988	
49,998	49,992	50,008	50,009	50,007	

Les éléments de base sont: $M_e = 49{,}9985$; $C_1 = 49{,}9910$; $C_3 = 50{,}0075$; $CI_i = 49{,}9663$; $CI_s = 50{,}0323$; $CE_i = 49{,}9415$; $CE_s = 50{,}1570$.

La boîte aura la configuration suivante:



Si nous calculons les valeurs de la fonction K pour les éléments principaux de la boîte représentée ci dessus, on obtient les valeurs suivantes:

$$K(50{,}066) = -1{,}3589,\ K(CE_s) = -1,\ K(CI_s) = 0$$
$$K(C_3) > 0, \quad K(M_e) > 0, \quad K(C_1) > 0$$
$$K(CI_i) = 0, \quad (CE_i) = -1$$

D' une certaine façon une boîte permet de représenter (d' une manière empirique) une fonction dépendante $K_{\tilde{A}}$.

Considérons un ensemble universal U dont les éléments remplissent une certaine restriction (condition) déterminée par une caractéristique associée à eux qui détermine un problème non compatible.

Supposons que cette caractéristique définit une variable aléatoire réelle Θ. Désignons par Θ_2 la médiane (population), Θ_1 et Θ_3 le premier et le troisième quartier (population) respectivement; et par $r_{0,50} = \Theta_{3/4} - \Theta_{½}$ le parcours du 50% ou parcours interquartier (population). Avec ces paramètres de "population" on peut définir une boîte $\mathbf{C}_{\tilde{A}}$ (population) dont les éléments de base sont les suivants:

1. Médiane: Θ_2.
2. Quartiers: Θ_1 , Θ_3.
3. Enceintes Intérieures:

$$CIi = \Theta_1 - 1{,}5r_{0,50} \; ; \; CI_s = \Theta_3 + 1{,}5r_{0,50}.$$

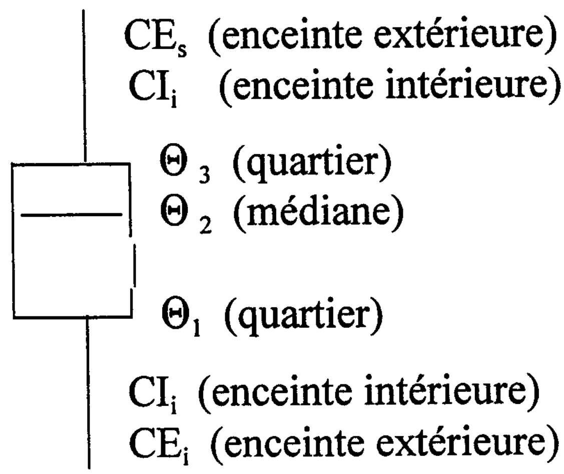
4. Enceintes Extérieures:

$$CEi = \Theta_1 - 3r_{0,50}; \quad CE_s = \Theta_3 + 3r_{0,50}.$$

Prenons $I=[CI_i, CI_s]$ et $J=[CE_i, CE_s]$, par le théorème, on a:

.- Si $y \in I$, on a $K(y) \geq 0$.
.- Si $y \in (J-I)$, on a $-1 \leq K(y) < 0$.
.- Si $y \in J$, on a $K(y) < -1$.

Considérons $A=\Theta^{-1}(I)$, $A=\Theta^{-1}(J-I)$, $\tilde{A}=\Theta^{-1}(J)$ et $\tilde{A}'=\Theta^{-1}(J')$, alors à la fonction dépendante $K_{\tilde{A}}$ lui correspond la boîte théorique



Pour estimer ces paramètres de "population" on utilise M_e (la médiane échantillon), C_1 (premier quartier échantillon), C_3 (troisième quartier échantillon) et $R=C_3-C_1$ (parcours interquartier), respectivement.

Comment pouvons nous représenter une fonction dépendante $K_{\tilde{A}}$ par l'intermédiaire d' une boîte $\mathbf{C}_{\tilde{A}}$, observons que celle-ci permet de visualiser le degré d'appartenance d' un élément u de l' ensemble universel U par rapport à l'extension d'ensemble $\tilde{A}$.

OPERATIONS ÉLÉMENTAIRES AVEC BOÎTES

1. Considérons une extension, ensemble $\tilde{A}$ dans U, avec fonction dépendante $K_{\tilde{A}}$. L'extension ensemble $\tilde{A}'$ est déterminée par la fonction

dépendante $-K_{\tilde{A}}$, alors:

.- Champ classique de $\tilde{A}'$: $A' = \{u/\ K_{\tilde{A}'}(u) \leq 0,\ u \in U\}$.

.- Extension du champ $\tilde{A}'$: $A' = \{u/\ 0 < K_{\tilde{A}'}(u) \leq 1,\ u \in U\}$.

.- Champ négatif de $\tilde{A}'$: $(\tilde{A}')' = \{u/\ K_{\tilde{A}'}(u) \geq 1,\ u \in U\}$.

A la fonction dépendante $K_{\tilde{A}}$ on lui fait correspondre la boîte $C_{\tilde{A}}$ et à la fonction dépendante $K_{\tilde{A}'}$ la même boîte, mais tenant compte que le champ classique pour $K_{\tilde{A}}$ correspond au champ négatif de $K_{\tilde{A}'}([0,+\infty))$; le champ négatif pour $K_{\tilde{A}'}$ correspond $(1,+\infty)$, et l'extension du champ $\tilde{A}'$ correspond $(0,1]$.

De cette manière nous pouvons établir la suivante correspondance:

$$K_{\tilde{A}} \longleftrightarrow C_{\tilde{A}} \quad , \quad K_{\tilde{A}'} \longleftrightarrow C_{\tilde{A}'}$$

2. Considérons deux extensions, ensembles $\tilde{A}$ et B dans U, avec fonctions dépendantes $K_{\tilde{A}}$ et K_B respectivement. A l' extension $\tilde{A}$ lui correspond la v.a Θ_A et à l'extension d' ensemble B la v.a Θ_B. Considérons la v.a. $\max(\Theta_A,\Theta_B)$ et la fonction $\max(K_{\tilde{A}},K_B)$. Pour $u \in U$, on détermine $\max(\Theta_A(u),\Theta_B(u)) = y$; et $\max(K_{\tilde{A}}(y),K_B(y))$.

De cette manière nous pouvons établir la correspondance suivante:

$$K_{\tilde{A} \cup B} = \max(K_{\tilde{A}},K_B) \longleftrightarrow C_{\tilde{A} \cup B}$$

D' une façon analogue s' établit

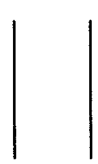
$$K_{\tilde{A} \cap B} = \min(K_{\tilde{A}},K_B) \longleftrightarrow C_{\tilde{A} \cap B}$$

avec la v.a. $\min(\Theta_A,\Theta_B)$ et la fonction $\min(K_{\tilde{A}},K_B)$.

3. Considérons les boîtes $C_{\tilde{A}}$ et C_B associées aux extensions d'ensembles $\tilde{A}$ et B dans U. Supposons que $I_A \subset I_B$, donc $FI_A \leq FI_B$, alors $F_{\tilde{A}} \leq F_B$. Nous pouvons écrire:

$$\tilde{A} \subset B \longleftrightarrow F_{\tilde{A}} \leq F_B \longleftrightarrow C_{\tilde{A}} \subset C_B$$

4. Si tout élément u dans U est compatible avec la condition, on considère à U comme le champ classique et la fonction dépendante $K_{\tilde{U}}(u) = +\infty$, pour tout $u \in U$, et on lui associe la boîte $C_{\tilde{U}}$ au graphique



Si tout élément u dans U est non compatible avec la condition, on considère comme champ classique à $\emptyset$ et la fonction dépendante $K_{\phi}(u) = -\infty$, pour tout $u \in U$, et on lui associe la boîte C_{ϕ} au graphique

. .

. .

. .

5. Désignons par **C** à l' ensemble des boîtes en U, alors $(\mathbf{C},\subset,C_\Phi,C_{\tilde{U}})$ est un réticulé avec des éléments universels. La relation est réflexive, non-symétrique et transitive; et pour tout $C_{\tilde{A}}$ et C_B de **C** il existe un "sup" et un "inf", donnés respectivemente par $C_{\tilde{A}\cup B}$ et par $C_{\tilde{A}\cap B}$; et les éléments universels sont les boîtes C_Φ, $C_{\tilde{U}}$.

CONCLUSION

Avec la notion de boîte on peut déterminer graphiquement le degré d' appartenance d' un élément u d' un ensemble universel U avec une certaine condition qui détermine un problème non compatible, à la place de la fonction dépendante. Situation qui n' est pas décrite par la logique de deux valeurs {0,1}. Ansi donc la description qualitative de si un élément appartient ou non à un sous-ensemble classique s' exprime non seulement quantitativement mais aussi graphiquement.

D' autre part en faisant reférence à l' ensemble des boîtes associées à un ensemble U dont les éléments remplissent une certaine condition on peut le doter d' une structure d'ordre où pour toute paire de boîtes il exist un "sup" et un "inf"; et deux éléments universels.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Cai Wen, Introduction of Extension Set, BUSEFAL, ETE, 19, 49-57, 1984.

[2] R. Orellana Ch., Análisis Exploratorio- Extensión de Conjunto, Escuela de Computación, Facultad de Ciencias,Universidad Central de Venezuela, 1987.

[3] P. F.Velleman, D. C. Hoaglin, Exploratory Data Analysis, Duxbuyr Press, Boston, 1981.