Josette COULON , Jean-Louis COULON
Université LYON I - Claude Bernard , bâtiment 101
43 boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne - cedex ; FRANCE

Sur la définition d'une topologie floue

Abstract: *A.P.SOSTAK gave in [1] a completely new definition of a fuzzy topology: for him, a fuzzy topology on a set X is defined as a fuzzy subset of the family* I^X *satisfying some axioms . In this paper, we use the same definition of a fuzzy topology , but the degrees of membership are elements of a complete Heyting lattice instead of the real unit interval. On the other hand, we introduce differently a concept of interior and a concept of neighborhood .*

0 Introduction :

Une notion de topologie floue a été introduite par C.L.CHANG en 1968 ([1]). En 1976, R.LOWEN a modifié cette définition ([2]) , exigeant en outre que soient ouvertes toutes les parties floues constantes .

Avec chacune de ces définitions, une partie floue est ouverte ou ne l'est pas. A.P.SOSTAK a proposé une approche toute différente, en 1985 ([3]) : il associe à toute partie floue son degré d'ouverture.

Nous allons ici reprendre la définition de A.P.SOSTAK, dans un cadre un peu plus général (les valeurs d'appartenance ne sont pas nécessairement des éléments de l'intervalle réel [0 , 1]) ,et aborder autrement les notions d'intérieur et de voisinage,introduisant des outils qui nous semblent plus maniables, parce qu'agissant "niveau par niveau" .

1: Cadre d'étude . Définition d'une topologie floue:

* Les valeurs d'appartenance sont des éléments d'un treillis de Heyting complet J (dont 0 désigne le plus petit élément et 1 le plus grand) . Une partie floue de X (référentiel : ensemble non vide donné) est une application de X dans J.

* Une topologie floue sur X , selon A.P.SOSTAK, est une application $\mathcal{T}$ de J^X dans J telle que :

(T1) pour tout $\alpha \in J$: $\mathcal{T}(\alpha) = 1$ (α désigne la partie floue valant constamment α) .

(T2) pour tout $\mu \in J^X$, $\nu \in J^X$: $\mathcal{T}(\mu \cap \nu) \geq \mathcal{T}(\mu) \wedge \mathcal{T}(\nu)$

(T3) pour toute famille $(\mu_i)_{i\in I}$ d'éléments de J^X:

$$\mathcal{T}(\cup \mu_i) \geq \wedge \mathcal{T}(\mu_i)$$

$\mathcal{T}(\mu)$ est interprétable comme le degré d'ouverture de μ.

Commentaires:

* Si $\alpha \in J$, $\mathcal{T}_\alpha = \{ \mu \in J^X \ / \ \mathcal{T}(\mu) \geq \alpha \}$ est une topologie floue au sens de R. LOWEN ,mais pas $\mathcal{T}'_\alpha = \{ \mu \in J^X \ / \ \mathcal{T}(\mu) > \alpha \}$.
* Inversement, soit $(\mathcal{L}_\alpha)_\alpha$ une famille de topologies floues au sens de R. LOWEN

telle que pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I}$: $\mathcal{L}_{\vee\alpha_i} = \cap \mathcal{L}_{\alpha_i}$. On définit alors une topologie floue sur X en posant:

$$\mathcal{T}(\mu) = \bigvee \{ \beta \in J \ / \ \mu \in \mathcal{L}_\beta \} \quad .$$

* Dualement, on peut définir une cotopologie floue sur X comme une application $\mathcal{C}$ de J^X dans J telle que :

(T1) pour tout $\alpha \in J$: $\mathcal{C}(\alpha) = 1$.

(COT2) pour $\mu, \nu \in J^X$: $\mathcal{C}(\mu \cup \nu) \geq \mathcal{C}(\mu) \wedge \mathcal{C}(\nu)$

(COT3) pour toute famille $(\mu_i)_{i\in I}$ d'éléments de J^X:

$$\mathcal{C}\left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right) \geq \bigwedge_{i\in I} \mathcal{C}(\mu_i)$$

* Dans le cas où J est muni d'un complément (c'est à dire d'une application $\alpha \rightarrow \alpha'$ involutive et décroissante), on définit une cotopologie floue (respectivement une topologie floue) à partir d'une topologie floue (respectivement une cotopologie floue) par : $\mathcal{T}'(\mu) = \mathcal{T}(\mu')$

2 : en guise d'intérieur :

2/1 .

* Définition et notations :

Soit $\mu \in J^X$. Pour chaque $\alpha \in J$, on pose: $I_\alpha(\mu) = \bigcup\limits_{\substack{\nu \subset \mu \\ \mathcal{T}(\nu) \geq \alpha}} \nu$

$I_\alpha(\mu)$ est la plus grande partie floue contenue dans μ et au moins α-ouverte.

On appelle <u>intérieur de μ</u> la famille $(I_\alpha(\mu))_{\alpha\in J}$.

* <u>Propriétés :</u>

1) $I_\alpha(\mu) \subset \mu$; $I_\alpha(\mu) = \mu \Leftrightarrow \mathcal{T}(\mu) \geq \alpha$; $I_\alpha(I_\alpha(\mu)) = I_\alpha(\mu)$; $I_\alpha(\beta) = \beta$
2) $\alpha \leq \beta \Rightarrow I_\beta(\mu) \subset I_\alpha(\mu)$
3) $\mu \leq \nu \Rightarrow I_\alpha(\mu) \subset I_\alpha(\nu)$; $I_\alpha(\mu \cap \nu) = I_\alpha(\mu) \cap I_\alpha(\nu)$
4) $\{\beta \in J \,/\, I_\beta(\mu) = \mu\}$ a un maximum , qui est $\mathcal{T}(\mu)$.

Remarque : la preuve de 3) utilise que J est un treillis de Heyting complet .

* <u>Les axiomes d'un intérieur :</u>

<u>Proposition :</u> soit $(J_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille d'applications de J^X dans lui-même , vérifiant les axiomes :

(I1) $J_\alpha(\mu) \subset \mu$ pour tout $\alpha \in J$ et tout $\mu \in J^X$

(I1') $J_\alpha(\beta) = \beta$ pour tous $\alpha , \beta \in J$

(I1") $J_\alpha(J_\alpha(\mu)) = J_\alpha(\mu)$ pour tout $\alpha \in J$ et tout $\mu \in J^X$

(I2) $\alpha \leq \beta \Rightarrow J_\beta(\mu) \subset J_\alpha(\mu)$ pour tous $\alpha , \beta \in J$ et tout $\mu \in J^X$

(I3) $J_\alpha(\mu \cap \nu) = J_\alpha(\mu) \cap J_\alpha(\nu)$ pour tout $\alpha \in J$ et tout $\mu , \nu \in J^X$

(I4) $\{\beta \in J \,/\, J_\beta(\mu) = \mu\}$ a un maximum , pour tout $\mu \in J^X$

Alors , en posant $\Theta(\mu) = \max\{\beta \in J \,/\, J_\beta(\mu) = \mu\}$, on définit une topologie floue sur X pour laquelle $(J_\alpha(\mu))_{\alpha\in J}$ est l'intérieur de μ .

<u>preuve :</u>

(T1) : $\Theta(\alpha) = \max\{\beta \in J \,/\, J_\beta(\alpha) = \alpha\} = 1$

(T2) : $\Theta(\mu \cap \nu) = \bigvee\{\beta \in J \,/\, J_\beta(\mu \cap \nu) = \mu \cap \nu\}$

$= \bigvee\{\beta \in J \,/\, J_\beta(\mu) \cap J_\beta(\nu) = \mu \cap \nu\}$ d'après (I3)

Si $J_\gamma(\mu) = \mu$ et $J_\delta(\nu) = \nu$, $J_{\gamma\wedge\delta}(\mu \cap \nu) = J_{\gamma\wedge\delta}(\mu) \cap J_{\gamma\wedge\delta}(\nu) \supset J_\gamma(\mu) \cap J_\delta(\nu) =$ ... $\mu \cap \nu$, d'après (I3) et (I2) donc : $J_{\gamma\wedge\delta}(\mu \cap \nu) = \mu \cap \nu$, d'après (I1)

Alors: $\Theta(\mu \cap \nu) \geq \bigvee \{\gamma\wedge\delta \,/\, J_\gamma(\mu) = \mu , J_\delta(\nu) = \nu\} =$ ....

$= \bigvee \{\gamma \,/\, J_\gamma(\mu) = \mu\} \wedge \bigvee \{\delta \,/\, J_\delta(\nu) = \nu\}$, ce du fait que J est un treillis de Heyting complet ; d'où : $\Theta(\mu \cap \nu) \geq \Theta(\mu) \wedge \Theta(\nu)$

(T3) : $\Theta(\cup \mu_i) = \bigvee \{\beta \in J \,/\, J_\beta(\cup\mu_i) = \cup\mu_i\}$

Posons $\xi_i = \bigvee \{\gamma \in J \,/\, J_\gamma(\mu_i) = \mu_i\}$. C'est en fait un maximum , d'après (I4) .

$J_{\wedge\xi_i}(\cup\mu_i) \supset J_{\xi_i}(\cup\mu_i) \supset J_{\xi_i}(\mu_i) = \mu_i$, d'après (I2) , (I3) et (I1).

Donc : $J_{\wedge\xi_i}(\cup\mu_i) \supset \cup\mu_i$. En fait, $J_{\wedge\xi_i}(\cup\mu_i) = \cup\mu_i$, d'après (I1) .

D'où : $\Theta(\cup\mu_i) \geq \wedge\,\xi_i = \wedge\,\Theta(\mu_i)$.

Enfin , soit $(I_\alpha(\mu))_{\alpha\in J}$ l'intérieur de μ au sens de Θ .

Remarquons d'abord que : $J_\beta(\mu) = \mu$ et $\gamma \leq \beta \Rightarrow J_\gamma(\mu) = \mu$, de sorte que :

$\Theta(\nu) \geq \alpha \Leftrightarrow J_\alpha(\nu) = \nu$.

Alors: si $\nu \subset \mu$ et si $\Theta(\nu) \geq \alpha$: $\nu = J_\alpha(\nu) \subset J_\alpha(\mu)$. D'où :

$$I_\alpha(\mu) = \bigcup_{\substack{\nu\subset\mu \\ \Theta(\nu)\geq\alpha}} \nu \subset J_\alpha(\mu).$$

D'autre part, puisque:

$J_\alpha(\mu) \subset \mu$, d'après (I1) , et que $\Theta(J_\alpha(\mu)) \geq \alpha$. d'après (I1") , $J_\alpha(\mu) \subset I_\alpha(\mu)$

*<u>équivalence des deux approches précédentes d'une topologie floue:</u>

On a vu qu'à toute famille $(J_\alpha)_{\alpha\in J}$ d'applications de J^X dans lui-même vérifiant les axiomes d'un intérieur,on pouvait associer une topologie floue sur X ayant exactement $(J_\alpha)_{\alpha\in J}$ pour intérieur. Inversement, à toute topologie floue sur X , on peut associer un intérieur $(I_\alpha)_{\alpha\in J}$ qui engendre à son tour la topologie floue de départ.

2/2 . Point de vue dual:

* Soit $\mathcal{C}$ une cotopologie floue sur X. On définit une <u>adhérence</u> par:

Pour chaque $\alpha \in J$, pour chaque $\mu \in J^X$: $F_\alpha(\mu) = \bigcap_{\substack{\nu\supset\mu \\ \mathcal{C}(\nu)\geq\alpha}} \nu$

* On a les propriétés suivantes:

1) $F_\alpha(\mu) \supset \mu$; $F_\alpha(\mu) = \mu \Leftrightarrow \mathcal{C}(\mu) \geq \alpha$; $F_\alpha(F_\alpha(\mu)) = F_\alpha(\mu)$; $F_\alpha(\beta) = \beta$

2) $\alpha \leq \beta \Rightarrow F_\alpha(\mu) \subset F_\beta(\mu)$

3) $\mu \subset \nu \Rightarrow F_\alpha(\mu) \subset F_\alpha(\nu)$; $F_\alpha(\mu \cup \nu) = F_\alpha(\mu) \cup F_\alpha(\nu)$

4) $\{\beta\in J \,/\, F_\beta(\mu) = \mu\}$ a un maximum,qui est $\mathcal{C}(\mu)$.

* On voit ,comme précédemment,que se donner une cotopologie floue revient à se donner une famille $(F_\alpha)_{\alpha\in J}$ d'applications de J^X dans lui-même vérifiant les axiomes:

(F1) $F_\alpha(\mu) \supset \mu$

(F1') $F_\alpha(\beta) = \beta$

(F1") $F_\alpha(F_\alpha(\mu)) = F_\alpha(\mu)$

(F2) $\alpha \leq \beta \Rightarrow F_\alpha(\mu) \subset F_\beta(\mu)$

(F3) $F_\alpha(\mu \cup \nu) = F_\alpha(\mu) \cup F_\alpha(\nu)$

(F4) $\{\beta \in J \,/\, F_\beta(\mu) = \mu\}$ a un maximum,pour tout $\mu \in J^X$

2/3 .Cas où J est muni d'un complément :

Soit $\mathcal{T}$ une topologie floue sur X . Il lui correspond la cotopologie floue $\mathcal{T}'(\mu) = \mathcal{T}(\mu')$. On a donc à la fois un intérieur $(I_\alpha)_{\alpha\in J}$ et une adhérence $(F_\alpha)_{\alpha\in J}$, qui sont liés par les formules : $F_\alpha(\mu) = [I_\alpha(\mu')]'$ et $I_\alpha(\mu) = [F_\alpha(\mu')]'$

3 : En guise de voisinages :

* Préliminaires:

Parmi les diverses définitions données d'un point flou et de son appartenance à une partie floue X , nous adoptons celles-ci :

un point flou de X est un (x,λ) $(x \in X,\ \lambda \in J)$

si $\mu \in J^X$: $(x,\lambda) \in \mu \Leftrightarrow \mu(x) \geq \lambda$

Toutes les définitions choisies jusqu'à maintenant présentent des inconvénients . Le seul défaut de celle retenue est que l'appartenance à une réunion n'implique en rien l'appartenance à l'une des parties .

* Voisinages d'un point flou :

Soit $\mathcal{T}$ une topologie floue sur X , d'intérieur $(I_\alpha)_{\alpha\in J}$.

Si (x,λ) est un point flou de X , et $\mu \in J^X$, il y a équivalence entre :

(i) $(x,\lambda) \in I_\alpha(\mu)$

(ii) il existe $\nu \in J^X$ telle que : $\nu \subset \mu$, $\mathcal{T}(\nu) \geq \alpha$, $(x,\lambda) \in \nu$

définition : μ est appelée un α-voisinage de (x,λ) ssi $(x,\lambda) \in I_\alpha(\mu)$

On note $\vartheta_\alpha(x,\lambda)$ l'ensemble des α-voisinages de (x,λ) .

Ainsi , à toute topologie floue sur X , on associe la famille $(\vartheta_\alpha)_{\alpha\in J}$ dite "famille des voisinages associée à $\mathcal{T}$ " .

* Propriétés des voisinages :

Proposition : supposons que $(\vartheta_\alpha)_{\alpha\in J}$ soit la famille des voisinages associée à la topologie floue $\mathcal{T}$. On a les propriétés suivantes :

1) $\mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$, $\rho \supset \mu \Rightarrow \rho \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$

2) $\mu, \nu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda) \Rightarrow \mu\cap\nu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$

3) $\mu \Rightarrow (x,\lambda) \in \mu$

4) $\lambda \in \vartheta_1(x,\lambda)$

5) Si $\mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$, il existe $\rho \in J^X$ telle que: $\left|\begin{array}{l}\rho \in \vartheta_\alpha(x,\lambda), \text{ et} \\ (y,t) \in \rho \Rightarrow \mu \in \vartheta_\alpha(y,t)\end{array}\right.$

6) $\alpha \leq \beta$, $\mu \in \vartheta_\beta(x,\lambda) \Rightarrow \mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$

7) Pour toute $\mu \in J^X$, $A_\mu = \{\alpha \in J \,/\, (x,\lambda) \in \mu \Rightarrow \mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)\}$ a un plus

grand élément.

8) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow \vartheta_\alpha(x,\lambda_2) \subset \vartheta_\alpha(x,\lambda_1)$

9) Si, pour tout $i \in I$: $\mu_i \in \vartheta_{\alpha_i}(x,\lambda_i)$,alors $\bigcup_{i\in I} \mu_i \in \vartheta_{\bigwedge_{i\in I} \alpha_i}(x, \bigvee_{i\in I} \lambda_i)$

preuve :

1) est évident

2) résulte de ce que $I_\alpha(\mu \cap \nu) = I_\alpha(\mu) \cap I_\alpha(\nu)$

3) résulte de ce que $I_\alpha(\mu) \subset \mu$

4) résulte de ce que $I_1(\lambda) = \lambda$

5) Si $\mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$: il existe $\nu \in J^X$ telle que $\nu \subset \mu$, $\mathcal{T}(\nu) \geq \alpha$ et $(x,\lambda) \in \nu$ alors $\rho = \nu$ convient.

6) résulte de ce que $\alpha \leq \beta \Rightarrow I_\beta(\mu) \subset I_\alpha(\mu)$

7) Remarquons d'abord que $\mathcal{T}(\mu) \in A_\mu$; de sorte que $\mu \in \vartheta_{\mathcal{T}(\mu)}(x,\lambda)$.

D'autre part, soit $\alpha \in A_\mu$. Il est facile de voir que, pour tout $x \in X$, il existe $\nu_x \in J^X$ telle que : $\nu_x \subset \mu$,$\mathcal{T}(\nu_x) \geq \alpha$, et $(x,\mu(x)) \in \nu_x$.

On a : $\mu = \bigcup_{x\in X} \nu_x$, et $\mathcal{T}(\mu) \geq \bigwedge_{x\in X} \mathcal{T}(\nu_x) \geq \alpha$

8) est évident.

9) Pour tout $i \in I$, soit $\nu_i \in J^X$ telle que $\mu_i \supset \nu_i$,$\mathcal{T}(\nu_i) \geq \alpha_i$, $(x,\lambda_i) \in \nu_i$

Soit $\nu = \bigcup_{i\in I} \nu_i$.

Alors, $\bigcup_{i\in I} \mu_i \supset \nu$, $\mathcal{T}(\nu) \geq \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}(\nu_i) \geq \bigwedge_{i\in I} \alpha_i$, $\bigcup_{i\in I} \nu_i(x) \geq \bigvee_{i\in I} \lambda_i$

* Les axiomes de voisinages :

Proposition :

Soit $(\vartheta_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille donnée, où - pour chaque $\alpha \in J$ - ϑ_α est une application de l'ensemble des points flous de X dans $\mathcal{P}(J^X)$, avec les axiomes: V_1, V_2,..., V_9, où - pour chaque $i \in [1,9]$ - V_i s'écrit comme la propriété i) de la proposition précédente.

En posant $\Theta(\mu) = \max A_\mu$ ($A_\mu = \{\alpha \in J \,/\, (x,\lambda) \in \mu \Rightarrow \mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)\}$) , on définit une topologie floue sur X, dont $(\vartheta_\alpha)_{\alpha\in J}$ est la famille des voisinages.

preuve :

- $\Theta(\mu)$ a un sens d'après V_7.
- $\Theta(\beta) = 1$, du fait que $1 \in A_\beta$ puisque $\beta \in \vartheta_1(x,\beta)$ d'après V_4

D'après V_8, $(x,\lambda) \in \beta \Rightarrow \lambda \leq \beta \Rightarrow \vartheta_1(x,\beta) \subset \vartheta_1(x,\lambda)$, d'où : $\beta \in \vartheta_1(x,\lambda)$

- Posons $\alpha_0 = \max A_\mu$, $\beta_0 = \max A_\nu$ .Montrons que $\alpha_0 \wedge \beta_0 \in A_{\mu \cap \nu}$, d'où résulte que : $\Theta(\mu \cap \nu) \geq \alpha_0 \wedge \beta_0 = \Theta(\mu) \wedge \Theta(\nu)$.
Si $\mu(x) \wedge \nu(x) \geq \lambda$, $\mu \in \vartheta_{\alpha_0}(x,\lambda)$ et $\nu \in \vartheta_{\beta_0}(x,\lambda)$. D'après V_6 , on a donc : $\mu, \nu \in \vartheta_{\alpha_0 \wedge \beta_0}(x,\lambda)$, et d'après V_2 : $\mu \cap \nu \in \vartheta_{\alpha_0 \wedge \beta_0}(x,\lambda)$.

- Posons , pour tout i : $\alpha_i = \max A_{\mu_i}$. Montrons que : $\bigwedge\limits_i \alpha_i \in A_{\bigcup\limits_i \mu_i}$.

Pour tout i, $\mu_i \in \vartheta_{\alpha_i}(x, \mu_i(x))$.

D'après V9 , $\bigcup\limits_i \mu_i \in \vartheta_{\wedge \alpha_i}(x, \vee \mu_i(x))$. A fortiori $\bigcup\limits_i \mu_i \in \vartheta_{\wedge \alpha_i}(x, \lambda)$ par V8

si $\bigvee\limits_i \mu_i(x) \geq \lambda$.

on a donc montré que $\bigwedge\limits_i \alpha_i \in A_{\cup \mu_i}$. Alors: $\Theta\left(\cup \mu_i \right) \geq \bigwedge\limits_i \alpha_i = \bigwedge\limits_i \Theta(\mu_i)$

- Soit $(W_\alpha)_{\alpha \in J}$ la famille des voisinages assoiés à la topologie floue Θ.
On a donc:

$$\mu \in W_\alpha(x,\lambda) \Leftrightarrow \exists \nu \in J^X, \left| \begin{array}{c} \nu \subset \mu \\ \Theta(\nu) \geq \alpha \\ \nu(x) \geq \lambda \end{array} \right| \Longleftrightarrow \exists \nu \in \mathfrak{J}^X, \left| \begin{array}{c} \nu \subset \mu \\ \alpha \in A_\nu \text{ (d'après V6)} \\ \nu(x) \geq \lambda \end{array} \right|$$

En particulier, si $\mu \in W_\alpha(x,\lambda)$, et si ν est la partie floue évoquée plus haut : $\nu \in W_\alpha(x,\lambda)$ et donc $\mu \in W_\alpha(x,\lambda)$ d'après V1.

Inversement, si $\mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$: d'après V5 , il existe $\rho \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$ telle que : $(y,t) \in \rho \Rightarrow \mu \in \vartheta_\alpha(y,t)$. Alors $\rho \subset \mu$ car $\mu \in \vartheta_\alpha(x,\rho(x))$ d'après ce qui précède , $(x,\rho(x)) \in \mu$ d'après V3 et $\rho(x) \leq \mu(x)$.
D'autre part , $\alpha \in A_\rho$ par définition même de ρ . Enfin , puisque $\rho \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$, on a , d'après V3 , $(x,\lambda) \in \rho$ et par conséquent $\rho(x) \geq \lambda$ donc $\mu \in W_\alpha(x,\lambda)$.

<u>4</u> : <u>Lien avec le travail de A.P.SOSTAK :</u>

Dans [4] , A.P.SOSTAK - tout au moins dans le cas où J est le segment réel [0,1] , et en revanche dans le cadre un peu plus général d'une sous-topologie floue (vérifiant uniquement (T1) et (T2)) - introduit l'importante application N de l'ensemble $\mathfrak{X} \times J^X$ ($\mathfrak{X}$ étant l'ensemble des points flous) dans J , définie par :

$$N((x,\lambda),\mu) = \bigvee_{\substack{\nu \subset \mu \\ (x,\lambda) \in \nu}} \mathfrak{T}(\nu)$$

- On a , avec nos voisinages , le lien que voici :

<u>Théorème :</u> $N((x,\lambda), \mu) = \bigvee \left\{ \alpha \in J \,/\, \mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda) \right\}$

preuve :

$*$ si $\mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda)$: il existe ν telle que : $\left| \begin{array}{l} \nu \subset \mu \\ \nu(x) \geq \lambda \; . \\ \mathcal{T}(\nu) \geq \alpha \end{array} \right.$

De sorte que : $N((x,\lambda),\mu) = \bigvee_{\substack{\rho \subset \mu \\ (x,\lambda) \in \rho}} \mathcal{T}(\rho) \geq \mathcal{T}(\nu) \geq \alpha$.

$N((x,\lambda),\mu)$ est donc un majorant de $\{ \alpha \in J \,/\, \mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda) \}$.

$*$ C'en est le plus petit majorant : en effet, soit γ un majorant de cet ensemble. Si $\nu \subset \mu$ et $(x,\lambda) \in \nu$, alors $\mu \in \vartheta_{\mathcal{T}(\nu)}(x,\lambda)$. De sorte que : $\gamma \geq \mathcal{T}(\nu)$. Ainsi :

$$\gamma \geq \bigvee_{\substack{\nu \subset \mu \\ (x,\lambda) \in \nu}} \mathcal{T}(\nu) = N((x,\lambda),\mu) \; .$$

• Soit $(\vartheta_\alpha)_{\alpha \in J}$ la famille des voisinages (selon la partie 3.) associée à une topologie floue $\mathcal{T}$. Posons : $N((x,\lambda),\mu) = \bigvee \{ \alpha \in J \,/\, \mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda) \}$.

Dans [4] , A.P.SOSTAK introduit une sous-topologie floue $\mathcal{T}_1$ définie par :

$$\mathcal{T}_1(\mu) = \bigwedge_{(x,\lambda) \in \mu} N((x,\lambda),\mu)$$

Ce n'est pas nécessairement la topologie de départ, comme le constate l'auteur sur un exemple, alors que nous avons montré comment il était possible d'exprimer $\mathcal{T}$ à partir de $(\vartheta_\alpha)_{\alpha \in J}$:

$$\mathcal{T}(\mu) = \bigvee \{ \alpha \in J \,/\, (x,\lambda) \in \mu \Rightarrow \mu \in \vartheta_\alpha(x,\lambda) \}.$$

Cela est lié au fait que $N((x,\lambda)) \geq \alpha$ ne signifie pas nécessairement qu'il existe ν telle que : $\nu \subset \mu$, $(x,\lambda) \in \nu$ et $\mathcal{T}(\nu) \geq \alpha$, mais seulement que :

$$\bigvee_{\substack{\nu \subset \mu \\ (x,\lambda) \in \nu}} \mathcal{T}(\nu) \geq \alpha \; .$$

Références :

[1] CHANG C.L. : " fuzzy topological spaces "
J.Math.Appl. 24 , 1968 , 182 → 190

[2] LOWEN R. : " fuzzy topological spaces and fuzzy compactness "
J.Math.Appl. 56 , 1976 , 621 → 633

[3] SOSTAK.A.P. : "on a fuzzy topological structure "
Suppl.rend.circ.matem.Palermo , ser.II , n°11 ,1985 , 89 → 103

[4] SOSTAK.A.P. : "on the neighborhood structure of fuzzy topological spaces "
Zbornik radowa Filozofskog fakulteta u Nisu ,serija matematika 4 , 1990 , 7 →[illegible]4