CALCUL DES PREDICATS MULTIVALENTS

Daniel PACHOLCZYK (*) (**)
(*) Laforia - Paris VI & (**) Leri - Reims

1. INTRODUCTION

Dans cet article, nous allons présenter une *logique des prédicats multivalents* préservant les propriétés fondamentales de *fiabilité* et de *complétude* de la logique classique. Il s'agit d'une extension au calcul des prédicats multivalents de la logique des propositions multivalentes que nous avons proposée dans [6, 7]. Elle a été conçue dans le même cadre algébrique, à savoir une chaîne finie de De Morgan, une algèbre de Lukasiewicz M-valente involutive et une algèbre implicative [6]. L'interprétation du langage est faite dans les *multi-ensembles* [1] : aux degrés de satisfaction des formules correspondent des degrés d'appartenance aux multi-ensembles.

Dans la première partie (§ 2 à 5), *les résultats ont été obtenus dans une algèbre implicative quelconque* (les F-implications étudiées dans [6]). Les *théorèmes classiques d'équivalence et de fiabilité* sont reformulés dans le cas multivalent. Au § 4, le concept de *conséquence* τ_α*-valide* d'un ensemble de formules a permis d'étendre au calcul des prédicats les *généralisations des règles de déduction* déjà obtenues en logique propositionnelle [6, 7]. Au § 5 nous donnons les résultats importants établissant la *fiabilité du calcul des prédicats multivalents.*

Dans la deuxième partie (§ 6-8), *l'algèbre implicative utilise uniquement l'implication de Lukasiewicz.* On peut alors obtenir (comme l'ont déjà fait Rosser & Turquette [11, 12] et plus récemment Novak [4, 5]) *une généralisation du théorème de la déduction* (§ 6.3).

Après avoir défini, dans le cas multivalent, le concept *d'ensemble consistant de formules* (§ 7.1), nous avons obtenu des propriétés caractérisant les ensembles consistants ou contradictoires (§ 7.2). A l'aide du concept d'*ensemble satisfiable de formules* (§ 8.1), nous avons établi un *théorème de* v_α*-complétude* (§ 8.2), et nous avons construit une *extension complète* du calcul des prédicats multivalents (§ 8.3).

2. AXIOMATISATION DU CALCUL DES PREDICATS MULTIVALENTS.

2. 1. *Le système formel du calcul des prédicats multivalents.*

Etant donné un entier $M \geq 2$, rappelons que $\mathcal{L}_M = \{\tau_1, ..., \tau_M\}$ désigne un ensemble fini d'éléments ayant permis de construire une **chaîne de Morgan** $\{\mathcal{L}_M, \vee, \wedge, \sim\}$, une **algèbre de Lukasiewicz M-valente involutive** $(\mathcal{L}_M, \mathcal{M}, (w_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{M}^*}, \sim, n)$ et une **algèbre implicative** $\{\mathcal{L}_M, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim\}$ [6].

L'alphabet $\mathcal{E}$ *du langage comprend :*

- *un ensemble infini dénombrable de* ***variables individuelles*** *notées* $z_1, z_2, ..., z_m, ...$.
- *un ensemble, éventuellement vide, de* ***constantes individuelles*** *notées* $c_1, ..., c_m, ...$.
- *un ensemble infini dénombrable de* ***prédicats*** *notés* $P_1, P_2, ..., P_n, ...$. *A chaque prédicat* P_n *est associé un entier, noté* $\eta(n)$, *appelé l'****arité*** *de* P_n.
- *un ensemble* $\mathcal{T}$ *comportant* M ***symboles particuliers****, noté* $\mathcal{T} = \{t_\alpha : \alpha \in \mathcal{M}\}$.

- *les* ***symboles logiques*** *du calcul propositionnel, à savoir :*

$$\mathcal{F}_1 = \{\neg\} \cup \{v_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \text{ et } \mathcal{F}_2 = \{\cup, \cap, \supset\}.$$

- *les symboles de quantification* ***universelle*** $(\forall)$ *et* ***existentielle*** $(\exists)$.
- *et des* ***symboles de ponctuation :*** "(" , ")" *et* ",".

Une variable ou un individu est appelé un ***terme***. Les ***variables propositionnelles*** sont considérées comme des prédicats d'arité 0 : on les notera $A, B, \ldots, L, \ldots$

- L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules.

Une ***formule atomique*** *est un assemblage composé d'un prédicat P_n d'arité $\eta(n)$ suivi de $\eta(n)$ termes.Toute formule de $\mathcal{F}$ s'obtient à partir des règles suivantes :*

- i - *Une formule atomique est une formule.*
- ii - $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$.
- iii - *Si ϕ est une formule alors $\neg(\phi)$ et $v_\beta(\phi)$ sont des formules*
- iv - *Si ϕ et Φ sont des formules alors $(\phi \cup \Phi)$, $(\phi \cap \Phi)$ et $(\phi \supset \Phi)$* sont des formules.
- v - *Si ϕ est une formule et si z_i est une variable individuelle alors $\forall z_i(\phi)$ et $\exists z_i(\phi)$ sont des formules.*
- vi - *Les seuls assemblages qui soient des* ***formules*** *sont ceux obtenus à partir des règles précédentes.*

Si u est un terme et ϕ une formule, on désigne par $(u|x)\phi$ la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x dans ϕ par u.

- Système $\mathcal{A}$ d'axiomes.

On appelle ***axiome*** *du calcul des prédicats toute formule construite suivant l'un des schémas ci-dessous où ϕ, ψ et Φ sont des formules quelconques de $\mathcal{F}$:*

(S1) : $\phi \supset (\psi \supset \phi)$

(S2) : $(\phi \supset (\psi \supset \Phi)) \supset (\psi \supset (\phi \supset \Phi))$

(S3) : $(\phi \supset \psi) \supset ((\psi \supset \Phi) \supset (\phi \supset \Phi))$

(S4) : $(v_\gamma \phi \supset (v_\gamma \phi \supset \psi)) \supset (v_\gamma \phi \supset \psi)$ $\gamma = 1, \ldots, M$.

(S5) : $\Gamma_{\gamma=1,M}(v_\gamma \phi \supset \psi)\psi$

(S6) : $v_M \phi \supset \phi$

(S7) : **a** - $v_\gamma \phi \supset v_{n(\gamma)} \neg \phi$

b - $v_\gamma \phi \supset v_\chi(v_\delta \phi)$ avec χ tel que : $\tau_\chi = v_\delta \tau_\gamma$.

c - $v_\delta \psi \supset (v_\gamma \phi \supset v_\chi(\phi \supset \psi))$ avec χ tel que : $\tau_\chi = \tau_\gamma \rightarrow \tau_\delta$.

d - $v_\delta \psi \supset (v_\gamma \phi \supset v_\chi(\phi \cup \psi))$ avec χ tel que : $\tau_\chi = \tau_\gamma \vee \tau_\delta$.

e - $v_\delta \psi \supset (v_\gamma \phi \supset v_\chi(\phi \cap \psi))$ avec χ tel que : $\tau_\chi = \tau_\gamma \wedge \tau_\delta$.

et ceci pour $\delta = 1, \ldots, M$ et $\gamma = 1, \ldots, M$

(S8) : $\forall x \phi \supset (y|x)\phi$, où *la variable individuelle x* ***est libre pour tout*** *y dans ϕ*

(S9) : $\forall x(\phi \supset \psi) \supset (\phi \supset \forall x\, \psi)$

où x est *une variable individuelle qui ne figure pas comme occurrence libre dans ϕ.*

-- ***L'ensemble $\mathcal{R}$ des règles de dérivation.***

[MP] : *La règle dite de* ***Modus Ponens*** *(ou de* ***détachement****) permet de passer des formules ϕ et $\phi \supset \Phi$ à la formule Φ, appelée* ***conséquence immédiate*** *de ϕ et $\phi \supset \Phi$.*

[GU] : *La règle de* ***Généralisation Universelle*** *permet de passer de la formule ϕ à la formule $\forall x \phi$, appelée* ***conséquence immédiate*** *de ϕ.*

2.2. *Déduction.*

- *déduction formelle à partir de $\mathcal{H}$*

Etant donné $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, on appelle ***déduction formelle à partir de $\mathcal{H}$*** *une suite finie de formules $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_i, \ldots, \phi_n$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:*

[D1] : *ϕ_i est un axiome* ou

[D2] : *$\phi_i \in \mathcal{H}$* ou

[D3] : *Il existe j et k strictement inférieurs à i tels que ϕ_i soit par* ***Modus Ponens*** *conséquence immédiate de ϕ_j et ϕ_k,* ou

[D4] : *Il existe j strictement inférieur à i tel que ϕ_i soit par* ***Généralisation Universelle*** *conséquence immédiate de ϕ_j.*

Une ***déduction de ϕ à partir de $\mathcal{H}$****, notée $\mathcal{H} \vdash \phi$,est une déduction formelle dont la dernière formule est ϕ. Une* ***déduction formelle*** *est une déduction à partir de $\mathcal{H} = \emptyset$.*

- *Démonstration de ϕ notée $\vdash \phi$*

Une ***démonstration*** *de ϕ est une déduction formelle dont la dernière formule est ϕ.*

- *t_α-démonstration de ϕ* notée $\vdash_\alpha \phi$.

Etant donnés $t_\alpha \in \mathcal{F}$ et $\phi \in \mathcal{F}$, on dit que ϕ est ***t_α-démontrable*** *si la formule $t_\alpha \supset \phi$ est démontrable.*

- *t_α-déduction de ϕ à partir de $\mathcal{H}$ notée $\mathcal{H} \vdash_\alpha \phi$.*

C'est une déduction de $t_\alpha \supset \phi$ à partir de $\mathcal{H}$. On dira que ϕ est ***t_α-déductible*** *de $\mathcal{H}$ ou* ***t_α-conséquence*** de $\mathcal{H}$.

Formule tautologique.

Une ***formule*** *ϕ de $\mathcal{F}$ est dite* ***tautologique*** *s'il existe une proposition tautologique T telle qu'en remplaçant toutes les occurrences des variables propositionnelles A_{i_j} qui y figure par une formule Φ_j on obtienne la formule ϕ.*

Une ***formule*** *ϕ de $\mathcal{F}$ est* ***τ_α-tautologique*** *si la formule $t_\alpha \supset \phi$ est tautologique.*

2.3. *Propriétés.*

Donnons les principaux résultats obtenus :

- Proposition 2.1

$\forall (\phi, \psi) \in \mathcal{F}^2$, $\vdash_\alpha \phi \supset \psi \Rightarrow \phi \vdash_\alpha \psi$. *Plus généralement :*

$\forall \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ *et* $\forall (\phi, \psi) \in \mathcal{F}^2$, $\mathcal{H} \vdash_\alpha \phi \supset \psi \Rightarrow \mathcal{H} \cup \{\phi\} \vdash_\alpha \psi$.

- Proposition 2.2 : *Théorème de finitude.*

$\forall \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{H} \vdash_\alpha \phi$, alors $\exists \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ fini tel que $\mathcal{H}' \vdash_\alpha \phi$.

- Proposition 2.3 : ***Règle d'inférence dérivée.***

Toute substitution instancielle d'une tautologie du calcul propositionnel est un théorème du calcul des prédicats.

- Proposition 2.4

- i - ***Toute formule τ_α-tautologique est une formule t_α-démontrable dans le calcul des prédicats.***

- ii - ***Toute substitution instancielle d'une τ_α-tautologie est une formule t_α-démontrable du calcul des prédicats.***

Si $\phi \equiv \psi =_{Df} (\phi \supset \psi) \cap (\psi \supset \phi)$, on obtient le métathéorème d'échange qui suit :

- Proposition 2.5.

Φ étant une formule construite à partir de ψ et d'un ensemble de formules $\phi_1, \ldots, \phi_i, \ldots, \phi_n$, si la formule Φ' résulte du remplacement de plusieurs (éventuellement aucune) occurrences de ψ par la formule ψ', alors : $\psi \equiv \psi' \vdash \Phi \equiv \Phi'$

3. STRUCTURE D'INTERPRETATION DU LANGAGE $\mathcal{L}$.

On appelle ***structure d'interprétation du langage*** $\mathcal{L}$, ou encore ***interprétation du langage*** $\mathcal{L}$, la paire $\mathcal{A} = \langle \mathcal{D}, \{\mathcal{R}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle$ où :

- $\mathcal{D}$, appelé *le domaine de* $\mathcal{A}$, est un ensemble non vide,

- $\mathcal{R}_n$ est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un ***sous-multi-ensemble*** de $\mathcal{D}^{\lambda(n)}$ tel que $\lambda(n)$ coïncide avec $\eta(n)$ l'arité du symbole de prédicat noté P_n. *On suppose que les degrés d'appartenance multi-ensemblistes appartiennent à une algèbre implicative* $\mathcal{A}\mathcal{J}_M$.

Une séquence d'éléments de $\mathcal{D}$, notée $x = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$, est appelée ***une valuation des variables de*** $\mathcal{L}$: toute occurrence libre de la variable z_n se réfère à l'élément spécifié x_n de $\mathcal{D}$. Lorsque x est une valuation et a un élément de $\mathcal{D}$, $x(n/a)$ est la valuation qui assigne les mêmes valeurs à toutes les variables, sauf à la variable z_n qui reçoit la valeur a.

Etant données une interprétation $\mathcal{A}$ du langage $\mathcal{L}$, x une valuation et Φ une formule de $\mathcal{F}$, la relation ***x satisfait Φ à un degré v_α dans*** $\mathcal{A}$, notée $\mathcal{A} \models^x_\alpha \Phi$, *est définie récursivement à partir des règles suivantes :*

(i)	$\mathcal{A} \models^x_\alpha P_n(z_{i_1}, \ldots, z_{i_{\eta(n)}})$	$\Leftrightarrow$	$\langle z_{i_1}, \ldots, z_{i_{\eta(n)}} \rangle \in_\alpha \mathcal{R}_n$
(ii)	$\mathcal{A} \models^x_\alpha \neg \phi$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models^x_\beta \phi$ et $\tau_\beta = \sim \tau_\alpha$
(iii)	$\mathcal{A} \models^x V_\alpha \phi$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models^x_\alpha \phi$
(iv)	$\mathcal{A} \models^x_\alpha \phi \cup \psi$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models^x_\beta \phi$ et $\mathcal{A} \models^x_\gamma \psi$ et $\tau_\beta \vee \tau_\gamma = \tau_\alpha$
(v)	$\mathcal{A} \models^x_\alpha \phi \cap \psi$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models^x_\beta \phi$ et $\mathcal{A} \models^x_\gamma \psi$ et $\tau_\beta \wedge \tau_\gamma = \tau_\alpha$
(vi)	$\mathcal{A} \models^x_\alpha \phi \supset \psi$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models^x_\beta \phi$ et $\mathcal{A} \models^x_\gamma \psi$ et $\tau_\beta \rightarrow \tau_\gamma = \tau_\alpha$
(vii)	$\mathcal{A} \models^x_\alpha \exists z_n \phi$	$\Leftrightarrow$	$\tau_\alpha = \mathrm{Max}\{\tau_\gamma \mid \mathcal{A} \models^{x(n/a)}_\gamma \phi, a \in \mathcal{D}\}$
(viii)	$\mathcal{A} \models^x_\alpha \forall z_n \phi$	$\Leftrightarrow$	$\tau_\alpha = \mathrm{Min}\{\tau_\gamma \mid \mathcal{A} \models^{x(n/a)}_\gamma \phi, a \in \mathcal{D}\}$

On dira que la valuation x v_α-satisfait *la fonction propositionnelle Φ* dans-$\mathcal{A}$.

$$x \ v_\alpha\text{-satisfait } \Phi \text{ dans-}\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models^x_\alpha \Phi$$

En convenant de noter : satisfait $= v_M$ -satisfait, on obtient alors l'équivalence :

$$x \ v_\alpha\text{-satisfait} \ \Phi \ \text{dans-}\mathcal{A} \Leftrightarrow x \ \text{satisfait} \ V_\alpha \phi \ \text{dans-}\mathcal{A}$$

Définissons la notion de ***validité partielle d'un énoncé*** dans une interprétation $\mathcal{A}$ donnée de la manière suivante : *un énoncé* ϕ *est* v_α-valide-dans-$\mathcal{A}$ *s'il existe* $\tau_\beta \geq \tau_\alpha$ *et une valuation* x tels que x v_β-satisfait ϕ dans-$\mathcal{A}$. Lorsque ϕ est v_α-valide-dans-$\mathcal{A}$, on dira que $\mathcal{A}$ est un v_α-modèle de ϕ. Pour un ***ensemble*** Σ ***d'énoncés***, $\mathcal{A}$ est un v_α-modèle de Σ si et seulement si $\mathcal{A}$ est un v_α-modèle de tout énoncé ϕ de Σ. On convient de noter :

$\{\phi$ est v_α-valide-dans-$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha\phi\}$ et $\{\mathcal{A}$ est un v_α-modèle de $\Sigma \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha\Sigma\}$.

Un énoncé ϕ est dit universellement v_α-valide s'il est v_α-valide-dans-$\mathcal{A}$ quelle que soit l'interprétation $\mathcal{A}$. On notera dans ce cas :

$\{\phi$ universellement v_α-valide $\Leftrightarrow \models \alpha\phi\}$ et $\{\phi$ universellement valide $\Leftrightarrow \models \phi\}$

4. CONSEQUENCE τ_α-VALIDE DE $\mathcal{H}$.

4.1. *Définitions.*

On dira que Φ *est une* ***conséquence*** τ_α***-valide*** *de* ϕ*, et l'on notera* $\phi \models_\alpha \Phi$*, si et seulement si :* $\forall \mathcal{A}$, $\{\forall x, \mathcal{A} \models {}^x_\beta\phi \Rightarrow \mathcal{A} \models {}^x_\gamma\Phi$ avec $\tau_\gamma \geq T(\tau_\alpha, \tau_\beta)\}$.

Soit $\mathcal{H}=\{\phi_1,\ldots, \phi_i, \ldots, \phi_p\}$ *un ensemble* ***fini non vide*** *de formules de* $\mathcal{F}$*, et la formule* $\overline{\phi}_{\mathcal{H}}=\phi_1 \cap \ldots \cap \phi_i \cap \ldots \cap \phi_p$*. On dira que* Φ *est une* ***conséquence*** τ_α***-valide*** *de* $\mathcal{H}$*, que l'on notera* $\mathcal{H} \models_\alpha \Phi$*, si et seulement si :* $\overline{\phi}_{\mathcal{H}} \models_\alpha \Phi$

Quand $\tau_\alpha=\tau_M$, on parle de ***conséquence valide***, et l'on note $\phi \models \Phi$ et $\mathcal{H} \models \Phi$.

On dira que deux formules ϕ *et* Φ *sont* ***sémantiquement équivalentes****, et l'on notera* $\phi \models\mid \Phi$*, si et seulement si :* $\phi \models\mid \Phi \Leftrightarrow \{\phi \models \Phi$ et $\Phi \models \phi\}$.

Une formule Φ *est une* τ_α ***-tautologie-dans-***$\mathcal{A}$*, et l'on notera* $\mathcal{A} \models_\alpha \Phi$*, si et seulement si :* $\forall x, \mathcal{A} \models {}^x_\beta\Phi$ avec $\tau_\beta \geq \tau_\alpha$.

Φ *est une* τ_α ***-tautologie****, notée* $\models_\alpha \Phi$*, si et seulement si :* $\forall \mathcal{A}, \mathcal{A} \models_\alpha \Phi$.

4.2. *Propriété.*

- Proposition 4.1. Quelles que soient les formules ϕ, Φ et Ψ, on a :

(i) : $\models \Phi \supset \Phi$

(ii) : $\phi \models_\alpha \Phi \Leftrightarrow \models_\alpha \phi \supset \Phi$

(iii) : $\phi \cap \Phi \models_\alpha \Psi \Rightarrow \phi \models_\alpha \Phi \supset \Psi$

4.3. *Généralisation des règles de déduction.*

Nous avons étudié ces règles dans le cadre de la logique propositionnelle dans [6]. On peut montrer que ces résultats s'étendent à la logique des prédicats.

- **Proposition 4.2.** ***Règle de Modus Ponens Généralisé.***

- *a* - ***Quelles que soient les formules ϕ et Φ et quelles soient les valeurs τ_α et τ_β on a :***

$$\{\models_\beta \phi \text{ et } \models_\alpha \phi \supset \Phi\} \Rightarrow \{\models_\gamma \Phi \text{ avec } \tau_\gamma = T(\tau_\alpha, \tau_\beta)\}.$$

- *b* - ***Si $\mathcal{H}$ est un ensemble fini de tautologies alors :***

$$\{\mathcal{H} \models_\beta \phi \text{ et } \mathcal{H} \models_\alpha \phi \supset \Phi\} \Rightarrow \{\mathcal{H} \models_\gamma \Phi \text{ avec } \tau_\gamma = T(\tau_\alpha, \tau_\beta)\}.$$

- **Proposition 4.3.** ***Règle de Modus Tollens Généralisé.***

- *a* - ***Quelles que soient les formules ϕ et Φ et quelles soient les valeurs τ_α et τ_β on a :***

$$\{\models_\beta \neg \Phi \text{ et } \models_\alpha \phi \supset \Phi\} \Rightarrow \{\models_\gamma \neg \phi \text{ avec } \tau_\gamma = \sim(\tau_\alpha \rightarrow \sim\tau_\beta)\}.$$

- *b* - ***Si $\mathcal{H}$ est un ensemble fini de tautologies alors :***

$$\{\mathcal{H} \models_\beta \neg \Phi \text{ et } \mathcal{H} \models_\alpha \phi \supset \Phi\} \Rightarrow \{\mathcal{H} \models_\gamma \neg \phi \text{ avec } \tau_\gamma = \sim(\tau_\alpha \rightarrow \sim\tau_\beta)\}$$

5. LA FIABILITE DU CALCUL DES PREDICATS

Si $z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n$ désignent les variables libres figurant dans ϕ, on appelle ***clôture*** *de ϕ, la formule obtenue en préfixant ϕ de tous les quantificateurs $\forall z_i$ associés aux variables libres de ϕ.*

On peut établir un certain nombre de résultats généralisant à la logique des prédicats multivalents ceux de la logique classique. En particulier, on a :

- **Proposition 5.1.** ***Une formule est t_α-démontrable si et seulement si sa clôture est t_α-démontrable.***
- **Proposition 5.2.** ***Si une formule est t_α-démontrable alors sa clôture est universellement v_α-valide.***
- **Proposition 5.3.** ***Théorème de fiabilité : Un énoncé t_α-démontrable est universellement v_α-valide.***
- **Proposition 5.4. :** ***Théorème de remplacement***

Φ étant une formule construite à partir d'un ensemble de formules $\phi_1, \ldots, \phi_i, \ldots, \phi_n$ et ψ, si la formule Φ' résulte du remplacement de plusieurs (éventuellement aucune) occurrences de ψ par la formule ψ', alors : $\Psi \models\mid \Psi' \Rightarrow \models \Phi \equiv \Phi'$

- **Proposition 5.5. :** ***Théorème de congruence***

Si y n'est pas libre dans ϕ et si y est librement substituable à x dans ϕ alors : $\phi = (y|x, x|y)\ \phi$

- **Proposition 5.6. :** ***Changement de variables liées***

Si y n'est pas libre dans $\forall z_n\ \phi$ et si y est librement substituable à z_n dans ϕ alors :

$$\models \forall z_n\ \phi \equiv \forall y\ (y|z_n)\ \phi$$

- **Proposition 5.7.**

A toute formule Φ on peut associer une formule Φ' telle que, chaque occurrence de quantificateur lie une variable différente, aucune variable n'y apparaît à la fois libre et liée, et Φ' est équivalente à Φ.

6. GENERALISATION DU THEOREME DE LA DEDUCTION

6.1. *Le connecteur* $\odot$.

Par définition $\phi \odot \psi =_{Df} \neg(\phi \supset \neg\psi)$. On convient de noter : $\phi^{k+1} = \phi^k \odot \phi = \phi \odot \phi^k$.

Pour toute interprétation $\mathcal{A}$ et pour une valuation x quelconque, on a :

$$\mathcal{A} \models^x_\gamma \phi \odot \psi \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathcal{A} \models^x_\alpha \phi \text{ et } \mathcal{A} \models^x_\beta \psi \text{ et } \tau_\gamma = T(\tau_\alpha, \tau_\beta)\}$$

- Proposition 6.1.

(i) : $\vdash \phi \supset (\Phi \supset (\phi \odot \Phi))$,

(ii) : $\vdash (\phi \odot \neg \phi) \supset \Phi$,

(iii) : $\vdash (\phi \odot \Phi) \supset \Psi \equiv \phi \supset (\Phi \supset \Psi)$.

- Proposition 6.2.

(i) : $\vdash \phi^k \supset \Phi \equiv \phi \supset (\phi \supset (\phi \supset (\ldots \phi \supset (\phi \supset \Phi)\ldots)))$ (k termes ϕ).

(ii) : $\vdash \phi^k \supset \phi$.

(iii) : $\vdash (\phi^{k1} \supset (\Phi \supset \Psi)) \supset ((\phi^{k2} \supset \Phi) \supset (\phi^{k1+k2} \supset \Psi))$.

(iv) : $\{\mathcal{A} \models^x_\alpha \phi$ et $\mathcal{A} \models^x_\beta \Phi\} \Rightarrow \{\mathcal{A} \models^x_\gamma \phi^{M-1} \supset \Phi$ où ($\gamma = \beta$ si $\alpha = M$) ou ($\gamma = M$ si $\alpha < M$)$\}$.

(v) : $\vdash (\phi^k \supset \Phi) \supset (\phi^{M-1} \supset \Phi)$.

(vi) : $\forall t_\delta \neq t_M, \exists k, \vdash t_\delta^k \equiv t_1$.

6.2. *Le connecteur* neg.

Par définition $\mathrm{neg}\phi =_{DF} V_1\phi \cup \ldots \cup V_i\phi \cup \ldots \cup V_{M-1}\phi$.

- Proposition 6.3

(i) : $\vdash (\phi^{M-1} \supset \Phi) \equiv \mathrm{neg}(\phi) \cup \Phi$ *et* $\vdash (\phi^k \supset \Phi) \supset \mathrm{neg}(\phi) \cup \Phi$.

(ii) : $\vdash (\phi \odot \neg(\mathrm{neg}\,\phi)) \equiv \neg(\mathrm{neg}\,\phi)$.

(iii) : $\vdash (\phi^k \supset (\Phi \odot \neg \Phi)) \supset \mathrm{neg}\phi$ *et* $\vdash ((\mathrm{neg}\phi)^k \supset (\Phi \odot \neg \Phi)) \supset \phi$.

6.3. *Théorème de la déduction.*

On peut alors montrer que :

- Proposition 6.4 : ***Généralisation du théorème de la déduction.***

Moyennant la restriction **(R)** ***qui suit :***

(R) : ***La déduction de Φ à partir de $\mathcal{H}$ et ϕ, ne peut avoir fait appel à une application de la règle*** **[GU]** ***liant une variable qui était libre dans ϕ, on a :***

(a) : $\mathcal{H}, \phi \vdash_\alpha \Phi \Rightarrow \exists k \geq 2, \mathcal{H} \vdash_\alpha \phi^k \supset \Phi$.

(b) : $\mathcal{H}, \phi \vdash_\alpha \Phi \Rightarrow \mathcal{H} \vdash_\alpha \phi^{M-1} \supset \Phi$.

Le théorème de la déduction établit clairement le lien existant entre les travaux de Rosser & Turquette [11, 12] et ceux de Novak [5]. La formulation proposée ici replace l'ensemble des résultats obtenus par ces différents auteurs dans le contexte d'une axiomatique construite à partir du modèle proposé par Rosser & Turquette, le langage recevant une interprétation dans la théorie des multi-ensembles [1].

7. LA CONSISTANCE DU CALCUL DES PREDICATS

7.1. *Définitions.*

Etant donné Σ un ensemble de formules de $\mathcal{F}$, on dira que Σ est contradictoire s'il existe une formule ϕ telle que : $\exists \tau_\alpha, \Sigma \vdash_\alpha \phi$ *et* $\exists \tau_\beta, \Sigma \vdash_\beta \neg \phi$ *et* $T(\tau_\alpha, \tau_\beta) > \tau_1$.

Dans le cas contraire, on dira que Σ est ***consistant.***

7.2. *Propriétés*

- Proposition 7.1.

Un ensemble Σ *de formules de* $\mathcal{F}$ *est contradictoire si et seulement si* Σ *satisfait l'une des propriétés suivantes :*

(i) : $\exists\, t_\delta \neq t_M,\ \Sigma \vdash t_\delta$.

(ii) : $\Sigma \vdash t_1$.

(iii) : $\forall \Phi \in \mathcal{F},\ \Sigma \vdash \Phi$.

(iv) : $\exists\, \Phi, \Sigma \vdash \Phi$ *et* $\Sigma \vdash \mathrm{neg}\,\Phi$.

- Proposition 7.2. *Le calcul des prédicats multivalents constitue une théorie consistante.*

- Proposition 7.3.

(i) : *Si* ϕ *est une formule non démontrable alors* $\{\mathrm{neg}\ \phi\}$ *est consistant.*

(ii) : *Si* $\mathrm{neg}\ \phi$ *est une formule non démontrable alors* $\{\phi\}$ *est consistant.*

- Proposition 7.4. *Si un ensemble* Σ *de formules est consistant alors :* $\Sigma \vdash \mathrm{neg}\phi \Rightarrow \phi \notin \Sigma$.

- Proposition 7.5.

Sachant que Σ *est un ensemble de formules, s'il existe une formule* ϕ *possédant la propriété suivante* $\{\exists(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1 \neq \alpha_2, v_{\alpha_1}\phi \in \Sigma$ *et* $v_{\alpha_2}\phi \in \Sigma\}$, *alors* Σ *est contradictoire.*

8. LA COMPLETUDE DU CALCUL DES PREDICATS

Il s'agit d'étendre à la logique des prédicats le théorème de complétude obtenu dans [6]. Dans le cadre de la logique classique, les premiers résultats ont été établis d'abord par Gödel [2] puis par Henkin [3]. La démonstration de la complétude sémantique qu'a proposée Henkin s'exprime en termes de relation entre la consistance et la satisfiabilité. Celle-ci a été généralisée à la logique des prédicats M-valents par Rosser & Turquette [11, 12] en employant une négation et une implication particulières vérifiant des conditions standards. Novak [4, 5] a proposé une axiomatique lui permettant de généraliser le théorème de complétude de Gödel à une logique des prédicats multivalents (avec un nombre infini de degrés de vérité pris sur [0, 1]) utilisant l'implication de Lukasiewicz. Etant donné que notre objectif reste un *traitement symbolique à l'aide d'un nombre fini degrés de vérité* (ou de satisfaction), *nous avons établi dans notre axiomatique un résultat analogue avec l'implication de Lukasiewicz* (qui ne satisfait pas les conditions standards).

8.1. *Définitions.*

Une formule ϕ *est satisfiable si et seulement s'il existe une interprétation* $\mathcal{A}$ *et une valuation x telle que x* **satisfait** ϕ **dans** $\mathcal{A}$: $\exists \mathcal{A}, \exists x, \mathcal{A} \models^x_M \phi$.

Un ensemble Σ *de formules est satisfiable si et seulement si toutes les formules de sont simultanément satisfiables.*

8.2. *Le théorème de complétude.*

- Proposition 8.1. *Tout ensemble consistant d'énoncés est satisfiable.*

- Proposition 8.2. *Tout énoncé universellement* v_α*-valide est* t_α*-démontrable*

- Proposition 8.3. : *Théorème de* v_α*-complétude*

Un énoncé ϕ *est universellement* v_α*-valide si et seulement si il est* t_α*-démontrable.*

$$\models_\alpha \phi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_\alpha \phi.$$

8.3. ***Théorie complète.***

- Une théorie $\mathbb{T}'$ ayant les mêmes symboles qu'une théorie $\mathbb{T}$ est appelée une ***extension*** *de $\mathbb{T}$ si et seulement si toute formule t_α-démontrable dans $\mathbb{T}$ est une formule t_α-démontrable dans $\mathbb{T}'$.*

Lorsque ϕ est t_α-démontrable dans $\mathbb{T}$ on conviendra de noter $\langle\mathbb{T}\rangle \vdash_\alpha \phi$.

- Une théorie $\mathbb{T}$ est dite ***complète*** *si et seulement si :*

Quel que soit l'énoncé ϕ, $\exists\, t_\alpha \neq t_1$, $\{\langle\mathbb{T}\rangle \vdash \phi \equiv t_\alpha$ ou $\langle\mathbb{T}\rangle \vdash \neg\phi \equiv t_\alpha\}$.

On obtient alors le résultat suivant :

- Proposition 8.4.

Le calcul des prédicats possède une extension qui est une théorie complète.

9. CONCLUSION

L'ensemble des résultats obtenus fournit un *cadre formel bien adapté au traitement symbolique des termes imprécis du langage naturel.* En utilisant les résultats présentés dans [8, 9, 10], il est en outre possible de gérer des *connaissances voisines.* Nous montrerons également qu'il est possible *d'enrichir cette logique* afin de prendre en compte des *connaissances incertaines* et de traiter certains problèmes relevant de la *typicalité.*

10. REFERENCES.

[1] **M. De Glas :** Knowledge representation in fuzzy setting.
LAFORIA - Rapport interne n° 89/48.

[2] **K. Gödel :** Die Vollständgkeit Der Axiome des Logischen Funktionenkalküls.
Monatsh. Math. u. Phys. Vol 37, p 349 - 360. 1930.
Traduction anglaise dans van Heijenoort 1957.

[3] **L. Henkin :** The completeness of the first-order functional calculus.
Journal of Symbolic Logic, Vol 14, p 159 - 166. 1949.

[4] **V. Novak :** On the syntactico-semantical completeness of first-order fuzzy logic.
Part I. Syntax and Semantics.
Kybernetica 26, 1 p 47 - 66. 1990.

[5] **V. Novak :** On the syntactico-semantical completeness of first-order fuzzy logic.
Part II. Main results.
Kybernetica 26, 2 p 134 - 154. 1990.

[6] **D. Pacholczyk :** Logiques propositionnelles multivalentes et gestion de l'incertitude.
LAFORIA - Rapport interne n° 89/49.

[7] **D. Pacholczyk :** Incertitude et logique multivalente : Interprétation et complétude.
BUSEFAL-89 n° 40.

[8] **D. Pacholczyk :** A propos du raisonnement approximatif.
Première partie : Multi-relations et S-relations.
LAFORIA - Rapport interne n° 01/91.

[9] **D. Pacholczyk :** A propos du raisonnement approximatif.
Deuxième partie : Multi-ensembles et similarité.
LAFORIA - Rapport interne n° 05/91.

[10] **D. Pacholczyk :** A propos du raisonnement approximatif.
Troisième partie : Le raisonnement approximatif via les voisinages
LAFORIA - Rapport interne n° 06/91.

[11] **J.B. Rosser & A.R. Turquette :** Axioms schemes for m-valued fonctional calculi of first order. Part I : Deductive completeness.
Journal of Symbolic logic 16, n° 1 p 22- 34. 1951.

[12] **J.B. Rosser & A.R. Turquette :** Many-valued logics.
North Holland publishing Company. Amsterdam 1958.