NOTION GENERALE DU TRAVAIL

DE " SCHEMAS FLOUS ET SHEMAS LOGIQUES SYMETRIQUES "

Phan - chí - Vân
Université polytechnique de Hà-nội

mai 1989

Première partie

LES IDEES DU TRAVAIL

On met ce travail dans le domaine logique symbolique avec le pro--blème de la présentation et deduction sur les bases des connaissances usuelles(des connaissances mathématiques ou non mathématique) - en général dans le domaine de l'intélligence artificiel .

I) DEUX PRINCIPES LOGIQUES

1) Les relations binaires fondamenteaux et le principe " de dualité conjuguée "

Tout d'abord on a les définitions :

Soient A , B - les sous ensembles différente de ϕ d'un espace E

- On appelle : A inclus dans B et écrit en $A \subset B$ si : $\overline{A} \cup B = E$ (1).

Le symbole $\subset$ est appelé la relation "d'inclus"

c'est une relation binaire fondamentale .

- On appelle : A vrai-inter avec B et écrit en $A \cap B$ si : $A \cap B \neq \phi$.

Le symbole $\cap$ est appelé la relation "vrai-inter"

c'est une relation binaire fondamentale aussi .

Les relations binaires $\subset$, $\cap$ ont des qualités principaux suivantes :

a) La qualité commutative de la relation "vrai-inter" :

$$A \cap B \Longleftrightarrow B \cap A \quad (1) \quad \text{(fig 1)}$$

b) La qualité transivitive de la relation "d'inclus" :

$$A \subset B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \subset C \quad (3) \quad \text{(fig 2)}$$

c) La qualité coalisée entre ces deux relations binaires :

$$A \subset B \wedge A \cap C \Longrightarrow B \cap C \quad \text{(fig 3)}$$

Dans ce travail on utilise les symboles suivants :

(1) $\overline{A}$ est le complément de A dans E, pour tous sous ensembles A de E .

(2) "$\Longleftrightarrow$" est remplacement pour le terme logique : " équivaloir "

(3) "$\Longrightarrow$" est remplacement pour le terme logique : " entrainer "

qualité a)

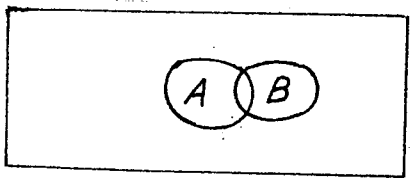

Fig 1

qualité b)

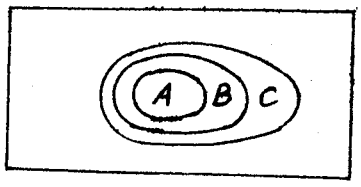

Fig 2

qualité c)

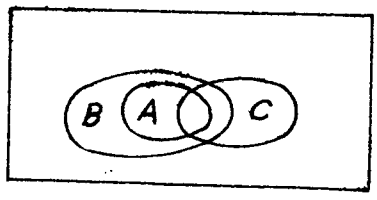

Fig 3

Par le principe logique Demorgan (dans l'algèbre de Boole) on déduit encore[1]:

- $(A \not\subset B) \Longleftrightarrow (\bar{A} \cup B \neq E) \Longleftrightarrow (\overline{\bar{A} \cup B} \neq \phi) \Longleftrightarrow (A \cap \bar{B} \neq \phi) \Longleftrightarrow (A \not\cap \bar{B})$
- $(A \not\cap B) \Longleftrightarrow (A \cap B = \phi) \Longleftrightarrow (\overline{A \cap B} = E) \Longleftrightarrow (\bar{A} \cup \bar{B} = E) \Longleftrightarrow (A \subset \bar{B})$

C'est ainsi on a :

$$(A \not\subset B) \Longleftrightarrow (A \not\cap \bar{B}) \quad (1)$$

$$(A \not\cap B) \Longleftrightarrow (A \subset \bar{B}) \quad (2)$$

On appelle les deux équivalences logiques (1) (2) le principe "de dualité conjuguée" entre les deux relations binaires fonda--mentaux $\subset$ et $\not\cap$.

Avec les qualités a) b) c) et le principe "de dualité conjuguée" on a été récolté les huit règles déductives[2] qui ont eu les rôles fondamentaux pour les notions de schémas flous et schémas logiques symétriques .

2) <u>Les relations binaires caractéristiques et le principe</u>

" <u>des relations necessaires</u> "

On sépare les relations binaires entre les deux ensembles A , B différentes de ϕ en les quatre types distincts $q_k(A,B)$[3] $(k=1,2,3,4)$ qui s'appellent les relations binaires caractéristiques :

---

(1) Dans ce travail on utilise les symboles $\neq$, $\not\subset$, $\not\cap$ sont respectivement négation de $=$, $\subset$, $\cap$.

(2) On expose les huit règles deductives au paragraphe II) page 6 .

(3) On peut déterminer tous les quatre relations $q_k(A,B)$ $(k = 1,2,3,4)$ seuleument par les deux relations fondamentaux $\subset$, $\cap$ et leur négation, par ce que l'on a : $A = B \Longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

$$A \neq B \Longleftrightarrow A \not\subset B \vee B \not\subset A$$

- <u>Relation 1er type</u> : relation d'égalité

  $q_1(A,B)$ est déterminée par

  $A = B$ (fig 4)

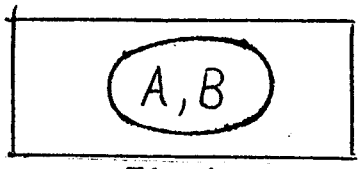

Fig 4

- <u>Relation 2e type</u> : relation d'inclusion

  $q_2(A,B)$ est déterminée par

  $(A \neq B) \wedge (A \subset B \vee B \subset A)$ (fig 5)

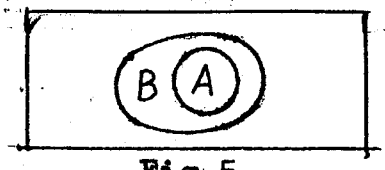

Fig 5

- <u>Relation 3e type</u> :relation d'intersection

  $q_3(A,B)$ est déterminée par

  $(A \not\subset B) \wedge (B \not\subset A) \wedge (A \cap B)$ (fig 6)

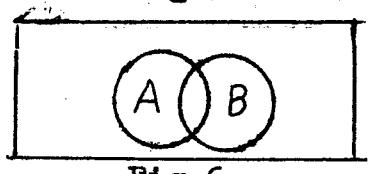

Fig 6

- <u>Relation 4e type</u> : relation de séparation

  $q_4(A,B)$ est déterminée par

  $A \not\cap B$ (fig 7)

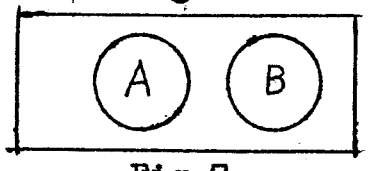

Fig 7

Par les règles logiques de l'algèbre de Boole on a été déduit les deux formules logiques suivantes :

$$\bigvee_{k=1}^{4} q_k(A,B) \Longleftrightarrow 1 \quad (3) \quad \text{et} \quad \bigvee_{r \neq s \ (r,s = 1,2,3,4)} (q_r \wedge q_s) \Longleftrightarrow 0 \quad (4)$$

On appelle les deux formules logiques (3),(4) le principe "des relations nécessaires" .

Ce principe affirme que : "La relation entre les deux ensembles quelconques A, B différentes de ϕ est toujours une et seuleument une des quatre relations binaires $q_k(A,B)$ $(k = 1,2,3,4)$" .

On utilise ce principe pour affirmer l'existence unique (flou ou clair) des schémas logiques symétriques quelconques .

II) SCHEMAS FLOUS ET SCHEMAS LOGIQUES SYMETRIQUES

- On choisit un ensemble quelconque $E \neq \phi$ qui s'appelle l'espace primitif .
- On appelle un prédicate unaire $P_i(a)(a \in E)$ une définition sur E qui détermine une paire des conceptions $P_i(a), \overline{P_i}(a)$

qui sont la négation l'une de l'autre .

- Soient $A_i = \{a \mid P_i(a)\}$ et $\overline{A_i} = \{a \mid \overline{P_i}(a)\}$

naturelement on a : $A_i \cup \overline{A_i} = E$ et $A_i \cap \overline{A_i} = \phi$

Et si $A_i \neq \phi$ et $\overline{A_i} \neq \phi$, on appelle la paire des conceptions $P_i(a), \overline{P_i}(a)$ non triviale pour l'espace E .

- Soient $\Pi_n = \{\ldots\ldots\ldots P_i(a), \overline{P_i}(a) \ldots\ldots\ldots\}$ $(i=1,2\ldots n)(a \in E)$

qui contient des paires $P_i(a), \overline{P_i}(a)$ non triviale pour E

et S_n - ensemble des relations binaires $q_k(A_i, A_j)(k=1,2,3,4)$ pour chaque paire dans 2n sous ensembles $A_i, \overline{A_i}, A_j, \overline{A_j}$ $(i,j = 1,2\ldots\ldots n)$ de l'espace E

<u>Définition I</u> : On appelle le schéma flou logique symétrique (simple--ment écrit en SFLS) des 2n conceptions $P_i(a), \overline{P_i}(a)(i=1,2\ldots n)$ le système $\{\Pi_n, S_n\}$

Ce SFLS est écrit simplement par $S(\Pi_n)$ ou S_n qui s'appelle SFLS d'ordre n

<u>Definition II</u> : On appelle le schéma logique symétrique (simple--ment écrit en SLS) des 2n conceptions $P_i(a), \overline{P_i}(a)(i = 1,2\ldots\ldots n)$ le SFLS de ces conceptions avec toutes les relations binaires dans S_n sont déterminées clairement

Dans ce cas le symboll S_n est remplacé par L_n et ce SLS est écrit simplement par $L(\Pi_n)$ ou L_n qui s'appelle SLS d'ordre n .

Dans les notions SFLS et SLS on sépare les propositions en deux types :

$(i) \longrightarrow (j)$ signifie $(\forall a)\left[\overline{P_i}(a) \vee P_j(a)\right]$ $(a \in E)$ qui s'appelle la proposition 1er type

$(i) \not\longrightarrow (j)$ signifie $(\exists a)\left[P_i(a) \wedge \overline{P_j}(a)\right]$ $(a \in E)$ qui s'appelle la proposition 2e type

Pour favorablement décrire sur les tableaux des relations et sur le graphe d'un SFLS ou SLS on a des remarques suivants :

- La relation $q_1(A_i,A_j)$ contient et équivaut les deux proposition:

$$(i) \longrightarrow (j) \wedge (i) \longleftarrow (j)$$

Dans ce cas on écrit en: $[i,j]$ et sur le graphe en: $(i) \longleftrightarrow (j)$

c'est le chemin (arête) de deux sens qui alie les sommets (i),(j)

- La relation $q_2(A_i,A_j)$ (ordre de (i) ā (j)) contient et équivaut les deux propositions :

$$(i) \longrightarrow (j) \wedge (i) \not\longleftarrow (j)$$

Dans ce cas on écrit en: $(i,j]$ et sur le graphe en: $(i) \longrightarrow (j)$

c'est le chemin (arête) d'un sens qui alie les sommets (i),(j)

- Les relations $q_3(A_i,A_j)$ (1) et $q_4(A_i,A_j)$ (2) contiennent même les deux propositions : $(i) \not\longrightarrow (j) \wedge (i) \not\longleftarrow (j)$

Dans ce cas on écrit respectivement en (i,j) , $]i,j[$

et sur le graphe en: (i) (j)

c'est le chemin (arête) de zéro sens qui alie les sommets (i),(j)

Avec ces remarques, on a des définitions :

<u>Définition 1</u> : On appelle le diagramme d'un SLS $\{\Pi_n, L_n\}$, l'ensemble de toute les relations binaires dans L_n qui se présentent par l'empilage des figures 4, 5, 6, 7 coresspondantes .

<u>Définition 2</u> : On appelle le tableau des relations de SLS $\{\Pi_n, L_n\}$ l'ensemble de toutes les relations binaires dans L_n qui se présentent par les symboles : $[i,j]$, $(i,j]$, (i,j), $]i,j[$ (3) ci-dessus.

<u>Définition 3</u> : On appelle le graphe de SLS $\{\Pi_n, L_n\}$ l'ensemble de toutes les sommets $(1)\ldots\ldots(n), \overline{(1)}\ldots\ldots\overline{(n)}$ qui arrange en deux rangs parallèles symétriques ((i)-dessus, $\overline{(i)}$-dessous) et de tous les chemins(arêtes) de deux sens, un sens, et zéro sens qui alient les deux sommets de chaques paires dans Π_n .

---

(1)Relation $q_3(A_i,A_j)$ équivaut aux trois propositions:

$$(i) \not\longrightarrow (j) \wedge (i) \not\longleftarrow (j) \wedge (i) \not\longrightarrow \overline{(j)}$$

(2)Relation $q_4(A_i,A_j)$ équivaut ā une proposition : $(i) \longrightarrow \overline{(j)}$

(3) Pour les tableaux des relations, que l'on peut décrire par le langage matriciel qui sera plus favorable a l'emploi des ordinateurs.

Pour les SFLS (et non pas un SLS) on y complète necessairement des ligne floues sur leur diagrames , des relations floues sur leur tableau des relations , des flèches floues sur leur graphe .

C'est ainsi, le graphe d'un SFLS $\{\Pi_n, S_n\}$ contient :

2n sommets dans Π_n et n(2n-1) arêtes dans S_n, en ce dedans il y a:

- des arêts d'apparaitres (les relations 1er ou 2e type)
- des arêts cachées (les relations 3e ou 4e type)
- des arêts claires (les relations déterminées)
- des arêts floues (les relations non déterminées)

Par les qualités principaux a) b) c) et le principe "de dualité conjugée" , on a déduit les huit règles logiques suivantes:

- Règle transitive $(i) \rightarrow (k) \wedge (k) \rightarrow (j)$ entrainer $(i) \rightarrow (j)$
- Règle contre-transitive $(i) \rightarrow (k) \wedge (i) \not\rightarrow (j)$ entrainer $(k) \not\rightarrow (j)$
- Règle de contradiction 1er : $(i) \rightarrow (j)$ équivaloir $\overline{(j)} \rightarrow \overline{(i)}$
- Règle de contradiction 2e : $(i) \not\rightarrow (j)$ équivaloir $\overline{(j)} \not\rightarrow \overline{(i)}$
- Règle de dualité 1er : $[i,j]$ équivaloir $[\overline{i},\overline{j}]$
- Règle de dualité 2e : $(i,j]$ équivaloir $[\overline{i},\overline{j})$
- Règle de semi-dualité 1er : $i,j]$ équivaloir $i,\overline{j}[$
- Règle de semi-dualité 2e : $i,j)$ équivaloir $i,\overline{j})$

On appelle ces huit règles logiques, les règles déductives sur un SFLS ou un SLS .

- Soient p , q , r , s^* respectivement les nombres des relations de 1er, 2e, 3e, 4e type dans chaque SFLS $\{\Pi_n , S_n\}$ on a :

$$p + q + r + s^* = n(2n - 1)$$

- Soient m_1 , m_2^* respectivement les nombres des propositions de 1er, 2e type dans chaque SFLS $\{\Pi_n , S_n\}$ on a :

$$m_1 = 2p + q \qquad \text{et} \qquad m_2^* = q + 2r + 2s^*$$

- On appelle un SLS d'ordre deux, un carré logique (simplement écrit en : CL) et évidement il y a trois et seuleument trois types distincts de carré logique : (fig 8 , 9 , 10)

Et chaque SFLS $\{\Pi_n , S_n\}$ est formé toujours par C_n^2 carrés logiques coresspondants.

C L 1er type (CL I)	C L 2e type (CL II)	C L 3e type (CL III)
$(i) \longleftrightarrow (j)$	$(i) \longrightarrow (j)$	$(i) \qquad (j)$
$\overline{(i)} \longleftrightarrow \overline{(j)}$	$\overline{(i)} \longleftarrow \overline{(j)}$	$\overline{(i)} \qquad \overline{(j)}$
Fig 8	Fig 9	Fig 10

- Soient i , j , k respectivement les nombres des CL I , II , III dans chaque SFLS $\{\Pi_n, S_n\}$ on a :

$$p = 2i \quad , \quad q = 2j \quad , \quad r = j + 4k \quad , \quad s^* = 4i + 3j + 2k$$

- Soient s le nombre des relations de 4e type non-triviales①
  et m_2 le nombre des propositions de 2e type non-triviales②
  dans chaque SFLS $\{\Pi_n, S_n\}$
  et on pose $\tilde{n} = C_n^2$
- Avec celà : on appelle
  $\tilde{n}$, p , q , r , s , m_1 , m_2 , i , j , k
  le système des paramètres naturels de chaque SFLS $\{\Pi_n , S_n\}$.
  Et il y a toujour et seuleument sept relations lineaires indépendantes dans ce système des paramètres :

$$\begin{cases} p = 2i \\ q = 2j \\ r = j + 4k \\ s = 2i + j \end{cases} \qquad \begin{cases} p + q + r + s = 4\tilde{n} \\ m_1 = 2p + q \\ m_2 = q + 2r + 2s \end{cases}$$

+ Par suite on encore définit les deux coefficients caractéristiques de chaque SFLS $\{\Pi_n, S_n\}$:

---

(1)(2) On appelle la relation $]i,\bar{i}[$ $(i = 1, 2 \ldots\ldots n)$ la relation triviale - c'est la relation $q_4(A_i,\bar{A}_i)$ qui contient les deux propositions triviales :

$$(i) \not\longrightarrow \overline{(i)} \wedge (i) \not\longleftarrow \overline{(i)}$$

c'est les propositions 2^e type .

- Coefficient flou : $\mu = \frac{m}{2n(n-1)}$

avec m - le nombre des relations floues dans SFLS $\{\Pi_n, S_n\}$

- Coefficient de liaison : $\lambda = \frac{2m_1}{m_1+m_2}$

avec m_1, m_2 - sont respectivement des prpositions non-triviales de 1er et 2e type dans SFLS $\{\Pi_n, S_n\}$

Evidement ces coefficients ne prennent que les valeurs rattionelles dans les l'intervalle fermée [0, 1]

Et si $\mu \neq 0$, la valeur de λ n'est pas déterminée .

On encore introduit une définition importante :

<u>Definition III</u> On appelle le noyau d'un SFLS $\{\Pi_n, S_n\}$ le plus petit ensemble des propositions dans S_n (1), tel que de celui on peut déterminer toutes les propositions restes dans S_n par les huit règles déductives .

Finalement il y a une remarque :

Pour perfectionner la notion de SLS on nécessairement introduit encore les notions importantes : les modèles logiques symétriques (simplement écrit en MLS) et les quasi--modèles logiques symétriques (simplement écrit en QMLS) (2).

---

(1) Comme on a remaque ci-desuss chaque relation binaire dans S_n qui contient toujours les deux propositions distinctes .

(2) Vue les références : (5),(6) et on remarque :

les relations k aires $\bigcap_{i=1}^{k}$ (k = 2, 3 .....n)

ont des rôles fondamentaux pour ces notions mathématiques .