PRINCIPE DE DUALITE CONGUGUEE
ET PRINCIPE DES RELATIONS NECESSAIRES [1]

Phan - chí - Vân
Université polytechnique de Hà-nội
juillet 1989

Dans cet article on expose deux principes logiques qui sont les conséquences des acxioms de l'agẽbre de Boole . Ces deux principes logiques sont le fondement pour que l'on forme le travail : "Schémas flous logiques symétriques et schémas logiques symétriques".

(On écrit simplement en : SFLS et SLS)

I) LES RELATIONS BINAIRES FONDAMENTAUX ET LES RELATIONS BINAIRES CARACTERISTIQUES.

1) Les relations binaires fondamentaux :

Tout d'abord il y a les définitions suivantes :

Soient A_i, A_j - les sous ensembles différente de ϕ d'un espace E.

- On appelle : A_i inclus dans A_j et écrit en $A_i \sqsubset A_j$
  si : $\overline{A_i} \cup A_j = E$ [2] (fig 1)

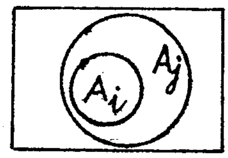


Fig 1

Le symbole $\sqsubset$ est appelé la relation " d'inclus ".

- On appelle : A_i vrai-inter avec A_j et écrit en $A_i \frown A_j$
  si : $A_i \cap A_j \neq \phi$ (fig 2)

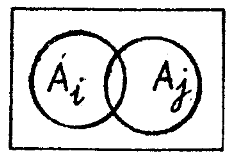


Fig 2

Le symbole $\frown$ est appelé la relation "vrai-inter" .

On appelle les deux relations $\sqsubset$, $\frown$ les relations binaires fondamenteaux .

2) Les relations binaires caractẽristiques :

Il y a encore les définitions suivantes :

---

(1) Cet article appartient le série des articles qui illustrent le travail de "Schémas flous et schémas logiques symétriques"

(2) Dans cet article on écrit en $\overline{A}$ - le complément de A dans E pour tous sous ensembles A de l'espace E .

On sépare les relations binaires entre les deux ensembles A_i, A_j différentes de ϕ en les quatre types distincts $q_k(A_i, A_j)$[1] $(k=1,2,3,4)$:

- Relation 1er type : relation d'égalité

  $q_1(A_i, A_j)$ est déterminée par :

  $$A_i = A_j \qquad \text{(fig 3)}$$

  Dans ce cas on écrit en $[i,j]$

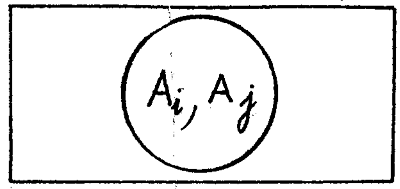


Fig 3

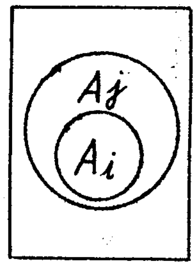
- Relation 2^e type : relation d'inclusion

  $q_2(A_i, A_j)$ est déterminée par :

  $$(A_i \neq A_j) \wedge (A_i \subset A_j \vee A_j \subset A_i) \text{(fig 4,fig 5)}$$

  Dans ce cas on écrit en $(i,j]$ si $A_i \subset A_j$

  ou en $[i,j)$ si $A_j \subset A_i$



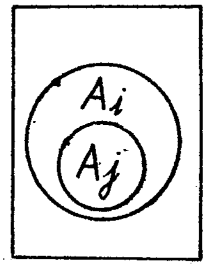


Fig 4 Fig 5

- Relation 3^e type : relation d'intersection

  $q_3(A_i, A_j)$ est déterminée par :

  $$(A_i \not\subset A_j) \wedge (A_j \not\subset A_i) \wedge (A_i \sqcap A_j) \text{ (fig 6)}$$

  Dans ce cas on écrit en (i,j)

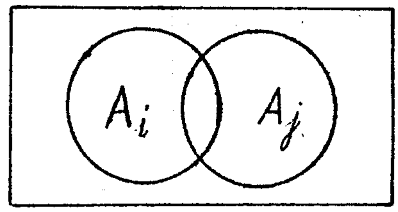


Fig 6

- Relation 4^e type : relation de séparation

  $q_4(A_i, A_j)$ est déterminée par :

  $$A_i \not\sqcap A_j \qquad \text{(fig 7)}$$

  Dans ce cas on écrit en $]i,j[$

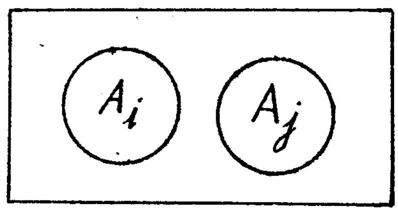


Fig 7

On appelle les quatres relations $q_k(A_i, A_j)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) les relations binaires caractëristiques[2].

---

(1) Dans cet article on utilise les symboles $\neq, \not\subset, \not\sqcap, \not\rightarrow$ qui sont réspestivement la négation de $=, \subset, \sqcap, \longrightarrow$

(2) On peut déterminer tous les quatre relations caractëristiques $q_k(A_i, A_j)(k=1,2,3,4)$ seuleument par les deux relations fonda-mentaux $\subset$, $\sqcap$ et leur négation, par ce que l'on a :

$$A_i = A_j \Longleftrightarrow A_i \subset A_j \wedge A_j \subset A_i$$
$$A_i \neq A_j \Longleftrightarrow A_i \not\subset A_j \vee A_j \not\subset A_i$$

II) LES RELATIONS BINAIRES FONDAMENTAUX ET LE PRINCIPE DE DUALITE CONJUGUEE .

Les relations binaires fondamentaux $\subset$, $\sqcap$ ont des qualités principaux suivantes :

a) La qualité commutative de la relation " vrai-inter " :

$$A_i \sqcap A_j \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} A_j \sqcap A_i \qquad \text{(fig 8)}$$

b) La qualité transivitive de la relation " d'inclus " :

$$A_i \subset A_k \wedge A_k \subset A_j \overset{(2)}{\Longrightarrow} A_i \subset A_j \qquad \text{(fig 9)}$$

c) La qualité coalisée entre ces deux relations binaires fondamentaux :

$$A_i \subset A_k \wedge A_i \sqcap A_j \Longrightarrow A_k \sqcap A_j \qquad \text{(fig 10)}$$

qualité a)

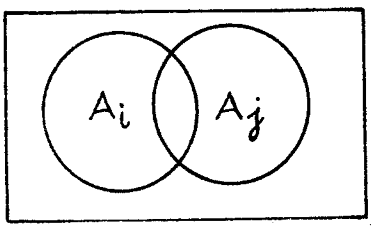


Fig 8

qualité b)

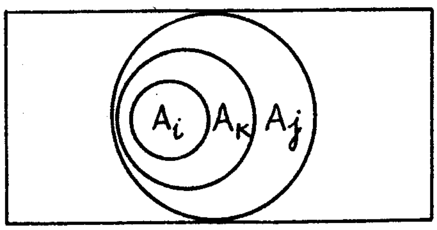


Fig 9

qualité c)

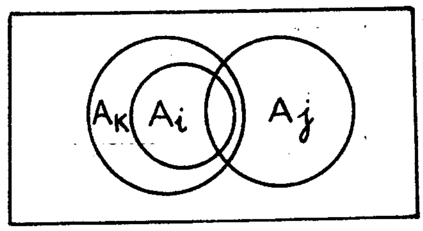


Fig 10

Par le principe logique Demorrgan (dans l'algèbre de Boole) on déduit encore :

$$+ \ (A_i \not\subset A_j) \Longleftrightarrow (\overline{A}_i \cup A_j \neq E) \Longleftrightarrow (\overline{\overline{A}_i \cup A_j} \neq \phi) \Longleftrightarrow (A_i \cap \overline{A}_j \neq \phi) \Longleftrightarrow (A_i \sqcap \overline{A}_j)$$

$$+ \ (A_i \not\sqcap A_j) \Longleftrightarrow (A_i \cap A_j = \phi) \Longleftrightarrow (\overline{A_i \cap A_j} = E) \Longleftrightarrow (\overline{A}_i \cup \overline{A}_j = E) \Longleftrightarrow (A_i \subset \overline{A}_j)$$

C'est ainsi on a :

$$(A_i \not\subset A_j) \Longleftrightarrow (A_i \sqcap \overline{A}_j) \qquad (1)^*$$

$$(A_i \not\sqcap A_j) \Longleftrightarrow (A_i \subset \overline{A}_j) \qquad (2)^*$$

On appelle les deux équivalences logiques $(1)^*$, $(2)^*$, le principe de dualité conjuguée" entre les deux relations binaires fondamen--taux $\subset$ et $\sqcap$.

Dans cet article on utilise les symboles :

(1)" $\Longleftrightarrow$ "est remplacement pour le terme logique: "équivaloir"

(2)" $\Longrightarrow$ "est remplacement pour le terme logique: "entrainer"

III) LES RELATIONS BINAIRES CARACTERISTIQUES ET LE PRINCIPE DES RELATIONS NECESSAIRES .

Par les règles logiques de calcul Booleien, on peut demontrer les deux formules logiques suivantes :

$$\bigvee_{k=1}^{4} q_k(A_i,A_j) \Longleftrightarrow 1 \quad (3)^* \quad \text{et} \quad \bigvee_{\substack{r \neq s \\ (r,s=1,2,3,4)}} (q_r \wedge q_s) \Longleftrightarrow 0 \quad (4)^*$$

Vraiment :

a) Pour demontrer la formule logique $(3)^*$ on utilise les changements logiques suivants :

$$+\ (q_1 \vee q_2) \Longleftrightarrow (A_i = A_j) \vee \left[(A_i \neq A_j) \wedge (A_i \subset A_j \vee A_j \subset A_i)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[(A_i = A_j) \vee (A_i \neq A_j)\right] \wedge \left[(A_i = A_j) \vee (A_i \subset A_j \vee A_j \subset A_i)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\qquad 1 \qquad\right] \wedge \left[(A_i = A_j \vee A_i \subset A_j) \vee (A_j \subset A_i)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\qquad 1 \qquad\right] \wedge \left[\quad (A_i \subset A_j) \quad \vee \quad (A_j \subset A_i)\right]$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \subset A_j) \vee (A_j \subset A_i) \quad .$$

$$+\ (q_3 \vee q_4) \Longleftrightarrow \left[(A_i \not\subset A_j \wedge A_j \not\subset A_i) \wedge (A_i \cap A_j)\right] \vee (A_i \not\cap A_j)$$

$$\Longleftrightarrow \left[(A_i \not\subset A_j \wedge A_j \not\subset A_i) \vee (A_i \not\cap A_j)\right] \wedge \left[(A_i \cap A_j) \vee (A_i \not\cap A_j)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[(A_i \not\subset A_j) \vee (A_i \not\cap A_j)\right] \wedge \left[(A_j \not\subset A_i) \vee (A_i \not\cap A_j)\right] \wedge \left[\quad 1 \quad\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\quad A_i \not\subset A_j \quad\right] \wedge \left[\quad A_j \not\subset A_i \quad\right] \wedge \left[\quad 1 \quad\right]$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \not\subset A_j) \wedge (A_j \not\subset A_i) \quad .$$

$$+\ (q_1 \vee q_2) \vee (q_3 \vee q_4) \Longleftrightarrow \left[(A_i \subset A_j) \vee (A_j \subset A_i)\right] \vee \left[(A_i \not\subset A_j) \wedge (A_j \not\subset A_i)\right] \Longleftrightarrow 1$$

C'est pourquoi on reçoit la formule logique $(3)^*$

b) Pour demontrer la formule logique $(4)^*$ on utilise les changements logiques suivants :

$$+\ (q_1 \wedge q_2) \Longleftrightarrow (A_i = A_j) \wedge \left[(A_i \neq A_j) \wedge (A_i \subset A_j \vee A_j \subset A_i)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[(A_i = A_j) \wedge (A_i \neq A_j)\right] \wedge (A_i \subset A_j \vee A_j \subset A_i)$$

$$\Longleftrightarrow \left[\qquad 0 \qquad\right] \wedge (A_i \subset A_j \vee A_j \subset A_i) \Longleftrightarrow 0$$

$$+\ (q_1 \wedge q_3) \Longleftrightarrow (A_i = A_j) \wedge \left[(A_i \not\sqsubset A_j \wedge A_j \not\sqsubset A_i) \wedge (A_i \cap A_j)\right]$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \sqsubset A_j \wedge A_j \sqsubset A_i) \wedge \left[(A_i \not\sqsubset A_j \wedge A_j \not\sqsubset A_i) \wedge (A_i \cap A_j)\right]$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \sqsubset A_j \wedge A_i \not\sqsubset A_j) \wedge (A_j \sqsubset A_i \wedge A_j \not\sqsubset A_i) \wedge (A_i \cap A_j)$$

$$\Longleftrightarrow \left[\qquad 0 \qquad\right] \wedge \left[\qquad 0 \qquad\right] \wedge (A_i \cap A_j) \Longleftrightarrow 0$$

$+\ (q_1 \wedge q_4) \Longleftrightarrow (A_i = A_j) \wedge (A_i \not\cap A_j) \Longleftrightarrow 0$ par ce que : $A_i \neq \phi \wedge A_j \neq \phi$.

$$+\ (q_2 \wedge q_3) \Longleftrightarrow \left[(A_i \neq A_j) \wedge (A_i \sqsubset A_j \vee A_j \sqsubset A_i)\right] \wedge \left[(A_i \not\sqsubset A_j \wedge A_j \not\sqsubset A_i) \wedge (A_i \cap A_j)\right]$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \neq A_j) \wedge \left[(A_i \sqsubset A_j \vee A_j \sqsubset A_i) \wedge (A_i \not\sqsubset A_j \wedge A_j \not\sqsubset A_i)\right] \wedge (A_i \cap A_j)$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \neq A_j) \wedge \left[\qquad 0 \qquad\right] \wedge (A_i \cap A_j) \Longleftrightarrow 0$$

$$+\ (q_2 \wedge q_4) \Longleftrightarrow \left[(A_i \neq A_j) \wedge (A_i \sqsubset A_j \vee A_j \sqsubset A_i)\right] \wedge (A_i \not\cap A_j)$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \neq A_j) \wedge \left[(A_i \sqsubset A_j \vee A_j \sqsubset A_i) \wedge (A_i \not\cap A_j)\right]$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \neq A_j) \wedge \left[(A_i \sqsubset A_j) \wedge (A_i \not\cap A_j)\right] \vee \left[(A_j \sqsubset A_i) \wedge (A_i \not\cap A_j)\right]$$

$\Longleftrightarrow (A_i \neq A_j) \wedge \left[\ 0\ \right] \vee \left[\ 0\ \right] \Longleftrightarrow 0$ Par ce que : $A_i \neq \phi \wedge A_j \neq \phi$

$$+\ (q_3 \wedge q_4) \Longleftrightarrow \left[(A_i \not\sqsubset A_j \wedge A_j \not\sqsubset A_i) \wedge (A_i \cap A_j)\right] \wedge (A_i \not\cap A_j)$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \not\sqsubset A_j \wedge A_j \not\sqsubset A_i) \wedge \left[(A_i \cap A_j) \wedge (A_i \not\cap A_j)\right]$$

$$\Longleftrightarrow (A_i \not\sqsubset A_j \wedge A_j \not\sqsubset A_i) \wedge \left[\qquad 0 \qquad\right] \Longleftrightarrow 0$$

On se réunit les termes $(q_r \wedge q_s)$ $(r \neq s)$ ci-dessus par les opérations $\vee$, on reçoit la formule logique $(4)^*$.

On appelle les deux formules logiques $(3)^*(4)^*$, le principe "des relations nécessaires" .

Ce principe affirme que : " La relation entre les deux ensembles quelconques A_i, A_j différentes de ϕ est toujours une et seuleument une des quatre relations binaires $q_k(A_i,A_j)$ $(k = 1,2,3,4)$ "

On utilise ce principe pour que l'on affirme l'existence unique (flou ou clair) des SLS quelconques .

IV) LES HUIT REGLES DEDUCTIVES

Dans ce paragraphe, par les qualités principaux a) b) c) des relations binaires fondamentaux $\subset$, $\cap$ et le principe " de dualité conjugée " (le principe " de D C ") on démontre les huit règles déductives .

Soient A_i, A_j, A_k, $\overline{A_i}$, $\overline{A_j}$ - les sous ensembles differentes de ϕ de l'espace E . C'est-à-dire : $E \cap A_i$,A_j, A_k, $\overline{A_i}$, $\overline{A_j} \subset E$.

Avec celà, il y a les huit règles logiques suivantes :

(1) <u>Règle 1er</u> (Règle transivitive)

Avec la qualité b) on a : $(A_i \subset A_k) \wedge (A_k \subset A_j) \Longrightarrow (A_i \subset A_j)$

ou $(i) \rightarrow (k) \wedge (k) \rightarrow (j)$ entrainer $(i) \rightarrow (j)$ [1]

C'est la règle transivitive .

(2) <u>Règle 2^e</u> (Règle contre-transivitive)

Avec la qualité c) et le principe " de DC " on a :

$$(A_i \subset A_k) \wedge (A_i \cap \overline{A_j}) \Longrightarrow (A_k \cap \overline{A_j})$$

ou $(A_i \subset A_k) \wedge (A_i \not\subset A_j) \Longrightarrow (A_k \not\subset A_j)$

ou $(i) \rightarrow (k) \wedge (i) \not\rightarrow (j)$ entrainer $(k) \not\rightarrow (j)$ [2]

C'est la règle contre-transivitive .

(3) <u>Règle 3^e</u> (Règle de contradiction 2^e)

Avec la qualité a) et le principe " de D C " on a :

$$(i) \not\rightarrow (j) \Longleftrightarrow A_i \not\subset A_j \Longleftrightarrow A_i \cap \overline{A_j} \Longleftrightarrow \overline{A_j} \cap A_i \Longleftrightarrow \overline{A_j} \not\subset \overline{A_i} \Longleftrightarrow \overline{(j)} \not\rightarrow \overline{(i)}$$

ou $(i) \not\rightarrow (j) \Longleftrightarrow \overline{(j)} \not\rightarrow \overline{(i)}$

C'est la règle de contradiction 2^e .

(4) <u>Règle 4^e</u> (Règle de contradiction 1er)

On fait la négation les deux propositions sur les deux parts de la règle de contradiction 2^e , on reçoit :

$$(i) \longrightarrow (j) \Longleftrightarrow \overline{(j)} \longrightarrow \overline{(i)}$$

Dans cet article on utilise les symboles :

(1) $(i) \rightarrow (j)$ est remplacement pour $A_i \subset A_j$

(2) $(i) \not\rightarrow (j)$ est remplacement pour $A_i \not\subset A_j$

C'est la règle de contradiction 1er .

(5) <u>Règle 5^e</u> (Règle de dualité 1er)

Avec la règle de contradiction 1er on a :

$$(i)\longrightarrow(j)\wedge(j)\longrightarrow(i)\Longleftrightarrow\overline{(j)}\longrightarrow\overline{(i)}\wedge\overline{(i)}\longrightarrow\overline{(j)}$$

$$\text{ou}\qquad [i,j] \quad\Longleftrightarrow\quad [\bar{i},\bar{j}]$$ [1]

C'est la règle de dualité 1er .

(6) <u>Règle 6^e</u> (Règle de dualité 2^e)

Avec les règles de contradiction 1er et 2^e on a :

$$(i)\longrightarrow(j)\wedge(j)\not\longrightarrow(i)\Longleftrightarrow\overline{(j)}\longrightarrow\overline{(i)}\wedge\overline{(i)}\not\longrightarrow\overline{(j)}$$

$$\text{ou}\qquad (i,j] \quad\Longleftrightarrow\quad [\bar{i},\bar{j})$$ [2]

C'est la règle de dualité 2^e .

(7) <u>Règle 7^e</u> (Règle de semi-dualité 1er)

Avec le principe " de D C " on a :

$$A_i \subset A_j \quad\Longleftrightarrow\quad A_i \pitchfork \overline{A_j}$$

et on écrit en $\qquad i,j]$ [3] $\Longleftrightarrow \quad i,\bar{j}[$ [4]

C'est la règle de semi-dualité 1er .

(8) <u>Règle 8^e</u> (Règle de semi-dualité 2^e)

Avec la qualité commutative de l'operation $\wedge$ et le principe " de D C " on a :

$$(A_i \cap \overline{A_j})\wedge(A_i \cap A_j) \quad\Longleftrightarrow\quad (A_i \cap A_j)\wedge(A_i \cap \overline{A_j})$$

$$(A_i \not\subset A_j)\wedge(A_i \cap A_j) \quad\Longleftrightarrow\quad (A_i \not\subset \overline{A_j})\wedge(A_i \cap \overline{A_j})$$

et on écrit en $\qquad i,j)$ [5] $\Longleftrightarrow \quad i,\bar{j})$ [6]

C'est la règle de semi-dualité 2^e .

On appelle ces huit règles logiques, les règles déductives . Et on utilise ces règles déductives pour que l'on fasse toutes les déductions sur les bases des connaissances de tous les SFLS et SLS.

---

(1)(2) Vue ces symboles au paragraphe I)2) de cet article .
(3)(4)(5)(6) Vue les symboles au paragraphe I)2) de cet article et ces symboles ont les significations suivantes :

$i,j]$ signifie à $[i,j]\vee(i,j]$	$i,j)$ signifie à $[i,j)\vee(i,j)$
$i,\bar{j}[$ signifie à $]i,\bar{j}[$	$i,\bar{j})$ signifie à $[i,\bar{j})\vee(i,\bar{j})$

En résumée : Pour les notions de SFLS et SLS , les questions de l'existence des SFLS ou SLS quelconques et d'établissement de ces SFLS ou SLS sont les questions fondamentaux . On a été utilisé les deux principes logiques : principe "de dualité conjuguée" et principe "des relations nécessaires" pour que l'on résoolve ces questions importantes .

A B S T R A C T

The principle of conjugate duality and the principle of necessary relations .

In this article author state and prove two logical principles: the principle " of conjugate duality " and the principle " of necessary relations " . In addiction he also prove the eight deductive rules which are important questions of the concepts on the fussy schema and the logical symmetric schemas .

R E F E R E N C E S

(1) N . BOURBAKI : Livre I : Théorie des ensembles
Hermann Paris 1970

(2) M . DENIS-PAPIN , A . KAUFMANN , R . FAURE :
Cour de calcul Booleien
Editions abin michel Paris 1973 .

(3) HELENA RASIOWA:Introduction to modern mathematic
The english edition : P W N jointly with
North Holland and American elsevier
publishing company 1973

(4) PHAN CHI VAN : Au point de vue general du travail de
"Schémas flous et schémas logiques symétriques"
Revue d'information de science et technique N°2
1988 . Université de communication de Hà-nội .

(5) PHAN CHI VAN : "Principe de dualité conjugée" et
"Principe des relations nécessaires"
Rapport scientifique au 16^{e} congrès scientifique
de l'université polytechnique de Hà-nội. Mars 1989.