Equations de relations floues avec la composition min-opérateur de maximalisation.

L. BOUR, M. LAMOTTE

C.R.A.N. Université de Nancy I et Institut National Polytechnique.

Unité Associée au CNRS n°821

1 . Introduction.

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ deux ensembles finis, I le segment [0, 1], $F(X) = \{B : X \to I\}$ et $F(Y) = \{A : Y \to I\}$ les familles d'ensembles flous sur X et Y, F(XxY) l'ensemble des relations floues sur XxY.

De nombreux articles ont déjà été consacrés à l'étude d'équations de relations floues de la forme

$$R * A = B \tag{1}$$

où "$*$" désigne une composition de deux opérateurs G et γ, applications de I^2 dans I, G étant un opérateur associatif, et où l'inconnue est soit R, soit A.

Dans un souci de simplification d'écriture $R(x_i, y_j)$, $A(y_j)$ et $B(x_i)$ seront respectivement notés r_{ij}, a_j et b_i ; ${}^tR$ désignera la transposée de R et $L = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, p\}$.

Si on convient de noter, pour la loi associative G,

$$G(a_1) = a_1 \quad \text{et} \quad \underset{j\in J}{G}(a_j) = G\left(\underset{j\in[1;p-1]}{G}(a_j), a_p\right)$$

alors l'équation (1) s'écrit

$$\forall i \in L, \quad \underset{j\in J}{G}\,(\gamma(r_{ij}, a_j)) = b_i \tag{2}$$

L'équation (1) a notamment été étudiée

- dans [5, 6, 12, 14, 15] lorsque $G(a, b) = \max(a, b)$ et $\gamma(a, b) = \min(a, b)$,
- dans [2, 10, 13] lorsque $G(a, b) = \max(a, b)$ et $\gamma(a, b) = T(a, b)$, T désignant une norme triangulaire,
- dans [3] lorsque $G(a, b) = S(a, b)$ et $\gamma(a, b) = T(a, b)$, S désignant une conorme triangulaire,
- dans [7] où $G(a, b) = \min(a, b)$ et où γ est un opérateur monotone,
- dans [10] où $G(a, b)=\min(a, b)$ et où γ est un opérateur noté α_T associé à une norme triangulaire T.

Dans cet article nous voulons revenir sur ce dernier cas, où $G(a, b) = \min(a, b)$ et où $\gamma(a, b) = a \tau b$, τ étant un opérateur de maximalisation [1, 4] ou opérateur de Pedrycz [13] qui coïncide avec α_T, en rappelant certains résultats existants et en donnant des conditions d'existence de solutions pour l'équation (1).

2 . Propriétés de l'opérateur de maximalisation τ.

Rappelons la définition et quelques propriétés de l'opérateur de maximalisation τ, ou opérateur de Pedrycz, associé à une norme triangulaire T.

Définition

On appelle opérateur de maximalisation associé à une norme triangulaire T l'application $\tau : I^2 \to I$ vérifiant, pour tout $(a, b, c) \in I^3$,

(i) $a \tau b \leq c \tau b$ si $a \leq c$ (3)

(ii) $T(a, b) \tau b \geq a$ (4)

(iii) $T(a \tau b, b) \leq a$ (5)

Remarques

1 - Si l'application $x \to T(x, b)$ est continue sur I alors τ existe et est unique.

2 - En permutant les rôles de a et b on retrouve la définition de l'opérateur τ donnée par Pedrycz dans [13] ou l'opérateur α_T de Miyakoshi dans [11].

Cet opérateur τ vérifie notamment les propriétés suivantes :

(P_1) $a \geq b \Leftrightarrow a \tau b = 1$

(P_2) $x \leq a \tau b \Leftrightarrow T(x, b) \leq a$

(P_3) Si la norme triangulaire T admet un générateur additif f alors

$$a \tau b = f^{-1}(f(a) - f(b)) \text{ si } a < b.$$

Pour les conditions d'existence de cet opérateur τ et pour d'autres propriétés voir [14], pour une liste des opérateurs τ associés aux normes triangulaires les plus usuelles voir [1].

3 . Existence des solutions.

Soit T une norme triangulaire admettant un opérateur de maximalisation τ ; on considère l'équation (1) avec $G(a, b) = \min(a, b)$ et $\gamma(a, b) = a \tau b$, équation qui sera notée

$$R \circledcirc A = B \tag{6}$$

et qui est équivalente au système

$$\begin{cases} \min\limits_{j \in J}(r_{ij} \tau a_j) = b_i \\ i \in L \end{cases}$$

On note E l'ensemble des solutions de l'équation (6) où R est l'inconnue.

Proposition 1

> Pour que l'ensemble E soit non vide il faut que
>
> $$\min_{i\in L} b_i \;\geq\; \min_{j\in J}(0\ \tau\ a_j) \qquad (7)$$
>
> La condition (7) est suffisante si, pour tout $b\in I$, l'application $x\rightarrow x\ \tau\ b$ est continue sur I.

Si $E \neq \varnothing$, il existe $R = (r_{ij}) \in E$ tel que $\forall i \in L$, $b_i = \min_{j\in J}(r_{ij}\ \tau\ a_j)$ et, d'après (3),

$r_{ij}\ \tau\ a_j \geq 0\ \tau\ a_j$ pour tout $j \in J$, d'où le résultat.

Réciproquement, si l'application $x\rightarrow x\ \tau\ a_j$ est une application continue de I sur $[0\ \tau\ a_j, 1]$ et si, pour tout $i\in L$, il existe $k\in J$ tel que $b_i \geq 0\ \tau\ a_k$ alors il existe $u\in I$ tel que $u\ \tau\ a_k = b_i$.
La relation $R = (r_{ij})$ définie par $r_{ij} = 1$ si $j \neq k$ et $r_{ik} = u$ est solution de (6).

Remarque : si A=0, $\min_{j\in J}(0\ \tau\ a_j) = 1$ et l'équation (6) n'a de solution que si B=1 et, dans ce cas, toute relation $R \in F(X\mathrm{x}Y)$ est solution de (6). Dans la suite on supposera $A \neq 0$.

On note I* l'intervalle]0,1].

Proposition 2

> Si, pour tout $b \in I$, l'application $x \rightarrow x\ \tau\ b$ est continue
> et si, pour tout $(x,y) \in I\mathrm{x}I^*$, $T(x, y)\ \tau\ y = x$ alors E n'est pas vide.

On suppose $A \neq 0$.
Si pour tout $(x,y) \in I\mathrm{x}I^*$, $T(x, y)\ \tau\ y = x$ alors $\min_{j\in J}(0\ \tau\ a_j) = 0$ et la condition (7) est vérifiée. D'où le résultat par application de la proposition 1.

Corollaire.

> Si la norme triangulaire T associée à l'opérateur τ est stricte alors E n'est pas vide (en supposant $A \neq 0$).

Rappelons qu'une norme triangulaire T est stricte si et seulement si elle admet un générateur additif f tel que $f(0) = +\infty$. Dans ce cas

$T(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$

$T(x, y) < y$ pour $x\neq 1$ et $y \neq 0$,

l'application $x \rightarrow x\ \tau\ b$ est continue sur I et,

pour $x \neq 1$, $y \neq 0$ $\quad T(x, y)\ \tau\ y = f^{-1}(f(T(x, y)) - f(y)) = x$

pour $x = 1$, $y \neq 0$ $\quad T(x, y)\ \tau\ y = 1 = x$

donc d'après la proposition 2, $E \neq \varnothing$.

4 . Résolution de l'équation (6)

a) Elément minimal de E

Posons $(B \circ {}^tA)(x_i, y_j) = T(B(x_i), A(y_j)) = T(b_i, a_j)$ et rappelons le résultat suivant, que l'on trouve par exemple dans [10], sous une forme différente.

Proposition 3

> Si $E \neq \varnothing$ alors $B \circ {}^tA \in E$ et $B \circ {}^tA$ est le plus petit élément de E.

Posons $(B \circ {}^tA)(x_i, y_j) = m_{ij}$

Si $E \neq \varnothing$ il existe $R = (r_{ij}) \in E$ tel que

$$\forall i \in L, \quad b_i = \min_{j \in J}(r_{ij}\ \tau\ a_j)$$

et $m_{ij} = T(b_i, a_j) = T\left(\min\limits_{j \in J}(r_{ij}\ \tau\ a_j),\ a_j\right) \leq T(r_{ij}\ \tau\ a_j, a_j) \leq r_{ij}$

(d'après la propriété de croissance d'une norme triangulaire, et d'après (5)).

Donc $\forall R \in E$, $B \circ {}^tA \leq R$ et aussi, d'après (3), $(B \circ {}^tA) \textcircled{\tau} A \leq R \textcircled{\tau} A$

D'autre part,

$$\forall (i, j) \in L\text{x}J, \quad m_{ij}\ \tau\ a_j = T(b_i, a_j)\ \tau\ a_j \geq b_i$$

implique

$$\forall i \in L, \quad \min_{j \in J}(m_{ij}\ \tau\ a_j) \geq b_i$$

donc $B \leq (B \circ {}^tA) \textcircled{\tau} A \leq R \textcircled{\tau} A = B$

$B \circ {}^tA$ est bien solution de (6), et c'est la plus petite : on notera $B \circ {}^tA = \hat{R}$

b) Solution caractéristique ou remarquable

Définition

> Soit $E \neq \varnothing$ et $R = (r_{ij}) \in E$. L'élément r_{ij} de R est dit actif si $r_{ij}\ \tau\ a_j = b_i$.
> Sinon r_{ij} est dit passif.

Si $\hat{R} = (\hat{r}_{ij})$ est l'élément minimal de E, nécessairement chaque ligne i de $\hat{R}$ contient au moins un élément actif. Et il est immédiat de vérifier que la relation $R^* = (r^*_{ij})$ où

$$r^*_{ij} = \hat{r}_{ij} \quad \text{si } \hat{r}_{ij} \text{ est actif}$$
$$r^*_{ij} = 1 \quad \text{si } \hat{r}_{ij} \text{ est passif}$$

est aussi élément de E.

Cet élément R*, qui permet de construire les éléments maximaux de E, sera appelé élément caractéristique (ou remarquable) de E.

Dans le cas où la norme triangulaire T associée à l'opérateur τ admet un générateur additif f on vérifie, en utilisant la propriété (P3) et la définition de T à l'aide de f, le résultat suivant :

Lemme

> Si T est une norme triangulaire archimédienne et τ son opérateur de maximalisation alors
> $T(x, y)\ \tau\ y = x \iff x \geq 0\ \tau\ y$

Définissons maintenant, pour une norme triangulaire T et son opérateur τ associé, l'application $\perp$ de I^2 dans I par

$$x \perp y = \begin{cases} T(x, y) & \text{si } x \geq 0\ \tau\ y \\ 1 & \text{si } x < 0\ \tau\ y \end{cases}$$

En définissant $B \mathbin{\Phi} {}^t A$ par $(B \mathbin{\Phi} {}^t A)(x_i, y_j) = B(x_i) \perp A(y_j)$, on a :

Proposition 4

> Si $E \neq \emptyset$ et si la norme triangulaire T associée à l'opérateur τ est archimédienne, alors $R^* = B \mathbin{\Phi} {}^t A$ est élément de E.

Si on pose $B \mathbin{\Phi} {}^t A = (r^*_{ij})$ alors, d'après le lemme et ce qui précède,

$r^*_{ij} = T(b_i, a_j) = \hat{r}_{ij}$ si $b_i \geq 0\ \tau\ a_j$ c'est-à-dire si $\hat{r}_{ij}$ est actif

$r^*_{ij} = 1$ si $b_i < 0\ \tau\ a_j$ c'est-à-dire si $\hat{r}_{ij}$ est passif

donc $B \mathbin{\Phi} {}^t A$ définit l'élément caractéristique R^* de E dans le cas où T est archimédienne.

Remarque Si T est archimédienne stricte et si $a_j \neq 0$ pour tout $j \in J$ alors $R^* = \hat{R}$ car, dans ce cas, $b_i \geq 0\ \tau\ a_j = 0$ pour tout i et j.

Exemple 1. Soit ${}^t B = (0.5 \quad 0.7 \quad 0.2)$, ${}^t A = (0.4 \quad 0.5 \quad 0.8)$, $T(x, y) = \max(0, x+y-1)$

Alors $x\ \tau\ y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y \\ 1+x-y & \text{si } x < y \end{cases}$ et,

puisque $\min\limits_{j \in J}(0\ \tau\ a_j) = 0.2 \leq \min\limits_{i \in L} b_i = 0.2$, $E \neq \emptyset$.

On trouve $\hat{R} = B \circ {}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$R^* = B \mathbin{\Phi} {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2. Soit ${}^t B = (0.4 \quad 0.8 \quad 1)$, ${}^t A = (0.2 \quad 0 \quad 0.5)$, $T(x, y) = xy$

Alors $x\ \tau\ y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y \\ \frac{x}{y} & \text{si } x < y \end{cases}$, $\min\limits_{j \in J}(0\ \tau\ a_j) = 0$ donc $E \neq \emptyset$ et

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0.08 & 0 & 0.2 \\ 0.16 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} 0.08 & 1 & 0.2 \\ 0.16 & 1 & 0.4 \\ 0.2 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

c) Solutions maximales.

Chaque ligne de R^* contient au moins un élément actif. En ne conservant, dans chaque ligne de R^* qu'un seul élément actif, et en remplaçant les autres par 1, on obtient des éléments R_m de E qui sont maximaux.

Pour les démonstrations voir par exemple [2], où un procédé analogue est exposé concernant la construction de solutions minimales d'une équation de relation floue.

Dans le cas où la norme triangulaire T est archimédienne, si on pose

$$J(i) = \{j \in J \mid b_i \geq 0 \,\tau\, a_j\}$$

alors card J(i) est le nombre d'éléments actifs de la i-ème ligne de R^*, donc E contient M éléments maximaux, où

$$M = \prod_{i \in L} \text{card } J(i)$$

Ainsi, dans l'exemple 1 précédent, E contient les six éléments maximaux

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0.1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0.2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.3 \\ 0.1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.3 \\ 1 & 0.2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.3 \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5 . Cas particulier de l'opérateur de Sanchez

L'opérateur τ associé à la norme triangulaire T(x, y) = min(x, y) est défini par

$$x \,\tau\, y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y \\ x & \text{si } x < y \end{cases}$$

(on retrouve l'opérateur de Sanchez en permutant les rôles de x et y)
mais l'application $x \rightarrow x \,\tau\, b$ n'est pas continue sur I et donc certains résultats précédents ne sont pas utilisables dans ce cas particulier important.

On introduit les notations suivantes :

$$L_1 = \{i \in L \mid b_i = 1\} \qquad L_2 = \{i \in L \mid b_i \neq 1\}$$

Il est immédiat de constater que si l'ensemble L_2 est vide alors E n'est pas vide car, par exemple, $R = (r_{ij})$ où $r_{ij} = 1$ pour tout $(i, j) \in L \times J$ est solution de (6).

Dans la suite du paragraphe on supposera $L_2 \neq \emptyset$.

Proposition 5

Si $L_2 \neq \emptyset$ alors $E \neq \emptyset \Leftrightarrow \max_{i \in L_2} b_i < \max_{j \in J} a_j$

Si $E \neq \emptyset$ il existe $R = (r_{ij}) \in E$ tel que $\forall i \in L$, $b_i = \min\limits_{j\in J}(r_{ij} \tau a_j)$

donc, puisque $r_{ij} \tau a_j < a_j$ si $r_{ij} \tau a_j < 1$,

$\forall i \in L_2$, $\min\limits_{j\in J}(r_{ij} \tau a_j) < \max\limits_{j\in J} a_j$

Réciproquement, si $\max\limits_{i\in L_2} b_i < \max\limits_{j\in J} a_j$ alors, pour tout $i \in L_2$ il existe $j_0(i) \in J$ tel que $b_i < a_{j_0(i)}$ et la relation $R = (r_{ij})$ définie par

$$r_{ij} = \begin{cases} b_i & \text{si } i \in L_2 \text{ et si } j = j_0(i) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à E.

Exemple 3. Soit ${}^tB = (0.5 \quad 1 \quad 0.2 \quad 0.8 \quad 1)$, ${}^tA = (0.6 \quad 0.2 \quad 0.9 \quad 0.5)$
$\max\limits_{i\in L_2} b_i = 0.8 < \max\limits_{j\in J} a_j$ et on vérifie que

$$B \circ {}^tA = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.2 \\ 1 & 1 & 0.8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est un élément de E.}$$

Par contre pour B inchangé et pour ${}^tA = (0.6 \quad 0.2 \quad 0.8 \quad 0.5)$
on a $\max\limits_{i\in L_2} b_i = \max\limits_{j\in J} a_j$ et on vérifie que $B \circ {}^tA$ n'appartient pas à E.

Elément caractéristique (ou remarquable)

$$\text{On pose } a \perp b = \begin{cases} \min(a, b) & \text{si } a < b \text{ ou si } a = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on vérifie que l'élément R^*, si E n'est pas vide, défini par $R^* = B \textcircled{\scriptsize$\perp$}\, {}^tA$, est un élément de E.

A l'aide de R^*, comme précédemment, on construit les éléments maximaux de E.

Exemple 4.

$$\hat{R} = B \circ {}^tA = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} \circ (0.7 \quad 0 \quad 0.9 \quad 0.5) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0.9 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$R^* = B \textcircled{\scriptsize$\perp$}\, {}^tA = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0.7 & 0 & 0.9 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

On vérifie qu'avec l'opérateur $\perp$ ainsi défini les éléments passifs de $\hat{R}$ ont été remplacés par des "1".

6 . Conclusion

Les résultats précédents peuvent être utilisés, en les adaptant, à la résolution de l'équation (6) dans les cas où A et B sont multi-colonnes et dans le cas où A est l'inconnue.

Références.

[1] L. Bour, M. Lamotte, Détermination d'un opérateur de maximalisation pour la résolution d'équations de relations floues, BUSEFAL 25 (1986) 95-106.

[2] L. Bour, M. Lamotte, Solutions minimales d'équations de relations floues avec la composition max-norme triangulaire, BUSEFAL 31 (1987) 24-31.

[3] L. Bour, M. Lamotte, Equations de relations floues avec la composition conorme-norme triangulaires, BUSEFAL 34 (1988) 86-94.

[4] L. Bour, M. Lamotte, Existence et propriétés d'un opérateur de maximalisation, BUSEFAL 37 (1988) 34-41.

[5] E. Czogala, J. Drewniak, W. Pedrycz, Fuzzy Relation Equations on a finite set, Fuzzy Sets and Systems, 7 (1982) 89-101.

[6] A. Di Nola, S. Sessa, On the set of solutions of composite fuzzy relation equations, Fuzzy Sets and Systems, 9 (1983) 275-285.

[7] J. Drewniak, Fuzzy relation equations and inequalities, Fuzzy Sets and Systems, 14 (1984) 237-247.

[8] S. Gottwald, W. Pedrycz, Solvability of fuzzy relational equations and manipulation of fuzzy data, Fuzzy Sets and Systems, 18 (1986) 45-65.

[9] A. Lettieri, F.Liguori, Somme results on fuzzy relation equations provided with one solution, Fuzzy Sets and Systems, 17 (1985) 199-209.

[10] M. Miyakoshi, M. Shimbo, Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 16 (1985) 53-63.

[11] M. Miyakoshi, M. Shimbo, Lower Solutions of systems of fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems, 19 (1986) 37-45.

[12] C.P. Pappis, M. Sugeno, Fuzzy Relational Equations and the inverse problem, Fuzzy Sets and Systems, 15 (1985) 79-90.

[13] W. Pedrycz, Fuzzy Relational Equations with generalized connectives and their applications, Fuzzy Sets and Systems, 10 (1983) 185-201.

[14] E. Sanchez, Solution of fuzzy equations with extended operations, Fuzzy Sets and Systems, 12 (1984) 237-248.

[15] S. Sessa, Some results in the setting of fuzzy relation equations theory, Fuzzy Sets and Systems, 14 (1984) 281-297.

[16] S. Weber, A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms, Fuzzy Sets and Systems, 11 (1983) 115-134.