REPRESENTATION DES ALGEBRES DE LUKASIEWICZ θ-VALENTES INVOLUTIVES PAR DES STRUCTURES FLOUES .

PAR:ABDELAZIZ AMROUNE.
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD (LYON I).
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES .

Le but de cet article est de donner une représentation des algèbres de Lukasiewicz θ-valentes involutives par des algèbres de structures floues involutives .

ALGEBRES DE LUKASIEWICZ θ-VALENTES.

Dans tout ce qui suit , on note : $J^{*} = J-\{1\}$, $J_{*} = J-\{0\}$.

* Une algèbre de Lukasiewicz θ-valente est définie par : $(L,J,(\varphi_{\alpha})_{\alpha\in J_{*}})$ avec les axiomes:

-L est un treillis distributif fermé (avec 0 et 1).

-J est une chaine fermée de type d'ordre θ .

-$(\varphi_{\alpha})_{\alpha\in J_{*}}$ est une famille d'endomorphismes de L conservant 0 et 1.

-pour tout α,β dans J_{*} : $\varphi_{\beta}\ \varphi_{\alpha} = \varphi_{\alpha}$.

-Si $\varphi_{\alpha}(x) = \varphi_{\alpha}(y)$ pour tout α dans J_{*} alors $x = y$.

-Pour tout $x\in L$, $\varphi_{\alpha}(x)$ appartient à l'anneau boolléien C(L) des éléments complémentés de L.

Pour deux algébres de Lukasiewicz θ-valentes $(L,J,(\varphi_{\alpha}))$, $(L',J,(\varphi'_{\alpha}))$; on définit un morphisme de L dans L' par : f est un morphisme de treillis conservant 0 et 1 et pour tout $\alpha\in J_{*}$: $f\varphi_{\alpha} = \varphi'_{\alpha}\ f$.

ALGEBRES DE LUKASIEWICZ θ-VALENTES INVOLUTIVES.

Une algèbre de Lukasiewicz θ-valente involutive est définie par : $(L,J,n,(\varphi),(\psi),N)$ avec les axiomes.

-$(L,J,(\varphi_\alpha)_{\alpha\in J_*})$: est une algèbre de Lukasiewicz θ-valente .

-n est une involution décroissante sur J .

-N est une involution décroissante sur L telle que si $x\in C(L)$ N(x) est le complément de x .

-$(\psi_\alpha)_{\alpha\in J^*}$ est une famille d' applications de L dans L vérifiant

$$\begin{cases} \text{Pour tout } \alpha \in J_* \ ; \ \varphi_\alpha N = N\psi_{n\alpha} \ . \\ \text{Pour tout } \alpha \in J_*^* \ ; \ \psi_\alpha \leq \varphi_\alpha \ . \end{cases}$$

(On montre alors que chaque ψ_α est un endomorphisme de L à valeurs dans C(L) , que $\alpha \leq \beta \Longrightarrow \psi_\beta \leq \psi_\alpha$, que $\psi_\alpha\psi_\beta = \psi_\beta$).

Pour deux algèbres de Lukasizwicz θ-valentes involutives $(L,J,n,\varphi_\alpha,\psi_\alpha,N)$, $(L,J,n,\varphi'_\alpha,\psi'_\alpha,N')$ un endomorphisme f est celui d'une algèbre de Lukasiewicz qui vérifie la condition supplémentaire : $f.N=N'.f$.

Remarque [1]:- Une algèbre de Lukasiewicz θ-valente involutive régulière est une algèbre de Lukasiewicz θ-valente involutive telle que J soit une chaine régulière fermée .

Dans ce cas , on pose pour tout $\alpha\in J^*$: $\psi_\alpha = \varphi_{\alpha^+}$ où α^+ est le successeur de α .

THEOREME DE REPRESENTATION .

Soit $(L,J,n,(\varphi_\alpha),(\psi_\alpha),N)$ une algèbre de Lukasiewicz θ-valente involutive , et soient : $\mathcal{J}$: la chaine des idéaux de J_*

C(L) l'ensemble des éléments complementés de L .

X : l'ensemble des ultrafiltres de C(L) sur $\mathcal{J}$; on définit η'

par : pour tout $I\in\mathcal{J}$, $\eta' I=\left\{ \alpha\in J \ / \ n\alpha \notin I \right\}$

$\eta' I\in\mathcal{J}$ car : si $\alpha \in \eta' I$: $\beta\leq\alpha \Longrightarrow n\beta\geq n\alpha\notin I$ (I idéal) $n\beta\notin I$ donc

$\beta\in\eta'I$, η' est également décroissante car : Soit I et J dans $\mathcal{J}$ tels que $I\subset J$, si $\alpha\in\eta'J \Longrightarrow n\alpha\notin J$ donc $n\alpha\notin I$ c-à-d $\alpha\in\eta'I$, donc $\eta'J\subset\eta'I$.

η' est une involution car : $\alpha\in\eta'\eta'I \Longleftrightarrow n\alpha\notin\eta'I \Longleftrightarrow nn\alpha\in I$. $\Longleftrightarrow \alpha\in I$.

On considère la famille d'applications I_x , $x\in L$: $I_x : X \longrightarrow \mathcal{J}$ définit par : $I_x(\mathcal{U}) = \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \varphi_\alpha(x)\in\mathcal{U} \right\}$.

I_x est bien définit car $\alpha\in I_x(\mathcal{U})$: $\beta\leq\alpha$ $\varphi_\beta(x)\geq\varphi_\alpha(x)$ donc $\varphi_\beta(x)\in\mathcal{U}$ soit $\beta\in I_x(\mathcal{U})$.

On pose $J_1=\left\{ I_x(\mathcal{U}) \;/\; x\in L \;,\; \mathcal{U}\in X \right\}$.

$J_1\subset\mathcal{J}$ donc J_1 est une chaine ; de plus on remarque :

$$I_o(\mathcal{U}) = \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \varphi_\alpha(o)\in\mathcal{U} \right\} = \left\{ \alpha\in J_* \;/\; o\in\mathcal{U} \right\} = \phi .$$

$$I_1(\mathcal{U}) = \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \varphi_\alpha(1)\in 1 \right\} = \left\{ \alpha\in J_* \;/\; 1\in\mathcal{U} \right\} = J_*.$$

Donc J_1 est une chaine fermée de plus petit élément ϕ et de plus grand élément J_* .

Sur J_1 , on définit l'application η_1 .

$\eta_1 : J_1 \longrightarrow J_1$; $\eta_1 I_x(\mathcal{U}) = \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \varphi_\alpha N(x)\in\mathcal{U} \right\} = I_{Nx}(\mathcal{U})\in J_1$.

η_1 est une involution car : $\eta_1\eta_1 I_x(\mathcal{U}) = \eta_1 I_{Nx}(\mathcal{U}) = I_{NNx}(\mathcal{U}) = I_x(\mathcal{U})$.

On considère $I'_x(\mathcal{U}) = \left\{ \alpha\in J^* \;/\; \varphi_\alpha(x)\in\mathcal{U} \right\}$ et $J_2 = \left\{ I'_x(\mathcal{U}) \;/\; x\in L, \mathcal{U}\in X \right\}$. J_2 est une chaine fermée de plus petit élément ϕ et de plus grand élément J^* de même η_2 : $\eta_2 I'_x(\mathcal{U}) = I'_{Nx}(\mathcal{U})\in J_2$ est une involution sur J_2 .

Lemme :- Si $I'_x(\mathcal{U}_1) \subseteq I'_y(\mathcal{U}_2)$ alors $I_x(\mathcal{U}_1) \subseteq I_y(\mathcal{U}_2)$.

Preuve :-

Si $I'_x(\mathcal{U}_1) = I'_y(\mathcal{U}_2) \Longrightarrow I'_{NNx}(\mathcal{U}_1) = I'_{NNy}(\mathcal{U}_2)$

$\Longrightarrow \eta_2 I'_{Nx}(\mathcal{U}_1) = \eta_2 I'_{Ny}(\mathcal{U}_2)$

$\Longrightarrow I'_{Nx}(\mathcal{U}_1) = I'_{Ny}(\mathcal{U}_2)$ (car η_2 est une involution donc injective).Soit $\left\{ \alpha\in J^* \ / \ \psi_\alpha Nx \in \mathcal{U}_1 \right\} = \left\{ \alpha\in J^* \ / \ \psi_\alpha Ny \in \mathcal{U}_2 \right\}$

$\Longrightarrow \left\{ \alpha\in J^* \ /N \ \varphi_{n\alpha}x \in \mathcal{U}_1 \right\} = \left\{ \alpha\in J^* \ /N\varphi_{n\alpha}y \in \mathcal{U}_2 \right\}$

$\Longrightarrow \left\{ \alpha\in J^* \ / \ \varphi_{n\alpha}x \notin \mathcal{U}_1 \right\} = \left\{ \alpha\in J^* \ / \ \varphi_{n\alpha}y \notin \mathcal{U}_2 \right\}$

$\Longrightarrow \eta'\left\{ \alpha\in J_* \ / \ \varphi_\alpha x \in \mathcal{U}_1 \right\} = \eta'\left\{ \alpha\in J_* \ / \ \varphi_\alpha y \in \mathcal{U}_2 \right\}$.

(η' est une involution donc en particulier injective) d'où

$\left\{ \alpha\in J_* \ / \ \varphi_\alpha x \in \mathcal{U}_1 \right\} = \left\{ \alpha\in J_* \ / \ \varphi_\alpha y \in \mathcal{U}_2 \right\}$ d'où $I'_x(\mathcal{U}_1) = I'_y(\mathcal{U}_2)$

$\Longrightarrow I_x(\mathcal{U}_1) = I_y(\mathcal{U}_2)$.

IL suffit donc de démontrer que ,

$I'_x(\mathcal{U}_1) \subsetneq I'_y(\mathcal{U}_2) \Longrightarrow I_x(\mathcal{U}_1) \subseteq I_y(\mathcal{U}_2)$.

$I'_x(\mathcal{U}_1) \subsetneq I'_y(\mathcal{U}_2) \Longrightarrow \exists \ \alpha_1\in J^*$ tel que $\psi_{\alpha_1}(y) \in \mathcal{U}_2$ et $\psi_{\alpha_1}(x) \notin \mathcal{U}_1$.

Supposons que $I_x(\mathcal{U}_1) \not\subset I_y(\mathcal{U}_2)$,il exite donc $\alpha_o\in J_*$ tels que $\alpha_o\in I_x(\mathcal{U}_1)$ et $\alpha_o\notin I_y(\mathcal{U}_2)$. Soit encore $\varphi_{\alpha_o}(x) \in \mathcal{U}_1$ et $\varphi_{\alpha_o}(y) \notin \mathcal{U}_2$.

Or $\varphi_{\alpha_o}(y) \notin \mathcal{U}_2 \Longrightarrow \psi_{\alpha_o}(y) \notin \mathcal{U}_2$,comme $\psi_{\alpha_1}(y) \in \mathcal{U}_2$, on aura :

$\psi_{\alpha_1}(y) \nleq \psi_{\alpha_o}(y) \Longrightarrow \alpha_o > \alpha_1$ donc [3] $\psi_{\alpha_1}(x) \geq \varphi_{\alpha_o}(x)$ or $\varphi_{\alpha_o}(x) \in \mathcal{U}_1$

soit $\psi_{\alpha_1}(x) \in \mathcal{U}_1$.

Contradiction ; d'où $I'_x(\mathcal{U}_1) \subseteq I'_y(\mathcal{U}_2) \Longrightarrow I_x(\mathcal{U}_1) \subset I_y(\mathcal{U}_2)$.

Conclusion :- L'involution η_1 est décroissante .

Preuve :-

Soient $I_x(\mathcal{U}_1)$, $I_y(\mathcal{U}_2)$ dans J_1 tels que $I_x(\mathcal{U}_1) \subset I_y(\mathcal{U}_2)$.

$I_x(\mathcal{U}_1) \subset I_y(\mathcal{U}_2) \Longrightarrow \left\{ \alpha\in J_* \ / \ \varphi_\alpha(x) \in \mathcal{U}_1\right\} \subseteq \left\{ \alpha\in J_* \ / \ \varphi_\alpha(y) \in \mathcal{U}_2\right\}$

$$\Longrightarrow \left\{ \alpha\in J_* \;/\; N\psi_{n\alpha}Nx \in \mathcal{U}_1 \right\} \subseteq \left\{ \alpha\in J_* \;/\; N\psi_{n\alpha}Ny \in \mathcal{U}_2 \right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \psi_{n\alpha}Nx \notin \mathcal{U}_1 \right\} \subseteq \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \psi_{n\alpha}Ny \notin \mathcal{U}_2 \right\}$$

(η' est décroissante)

$$\Longrightarrow \eta'\left\{ \alpha\in J_* \;/\; \psi_{n\alpha}Nx \notin \mathcal{U}_1 \right\} \supseteq \eta'\left\{ \alpha\in J_* \;/\; \psi_{n\alpha}Ny \notin \mathcal{U}_2 \right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \alpha\in J^* \;/\; \psi_{\alpha}Nx \in \mathcal{U}_1 \right\} \supseteq \left\{ \alpha\in J^* \;/\; \psi_{\alpha}Ny \in \mathcal{U}_2 \right\} .$$

Soit $I'_{Nx}(\mathcal{U}_1) \supset I'_{Ny}(\mathcal{U}_2) \longrightarrow I_{Nx}(\mathcal{U}_1) \supseteq I_{Ny}(\mathcal{U}_2)$.

D'où $I_x(\mathcal{U}_1) \subset I_y(\mathcal{U}_2) \Longrightarrow \eta_1 I_x(\mathcal{U}_1) \supseteq \eta_1 I_y(\mathcal{U}_2)$.

THEOREME :- Toute algèbre de Lukasiewicz θ-valente involutive est isomorphe à une algèbre de parties floues .

Preuve :-

Soit $(L,J,n,\varphi_\alpha,\psi_\alpha,N)$ une algèbre de Lukasiewicz θ-valente involutive . Considérons la structure floue involutive (X,J_1,η_1) .

Soit $f:L \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}(X) : x \longrightarrow f(x)$ définit par

$$f(x)(\mathcal{U}) = \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \varphi_\alpha(x) \in \mathcal{U} \right\} = I_x(\mathcal{U}) \;;$$

f est morphisme de treillis fermé

$$- \; f(x\vee y)(\mathcal{U}) = \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \varphi_\alpha(x\vee y) \in \mathcal{U} \right\}$$

$$= \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \varphi_\alpha(x)\vee\varphi_\alpha(y) \in \mathcal{U} \right\} \text{ (puisque } \mathcal{U} \in X\text{)}$$

$$= \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \varphi_\alpha(x) \in \mathcal{U} \right\} \cup \left\{ \alpha\in J_* \;/\; \varphi_\alpha(y) \in \mathcal{U} \right\}$$

$$= f(x)(\mathcal{U}) \cup f(y)(\mathcal{U}) .$$

D'où $f(x\vee y) = f(x) \cup f(y)$.

-Même chose : $f(x\wedge y) = f(x) \cap f(y)$.

- $f(o)(\mathcal{U}) = I_o(\mathcal{U}) = \phi \Longrightarrow f(o) = \phi$.

- $f(1)(\mathcal{U}) = I_1(\mathcal{U}) = J_* \Longrightarrow f(1) = X$.

Donc f est un morphisme de treillis fermé.

Montrons que $f(Nx) = \eta_1 f(x)$.

$$\eta_1 f(x)(\mathcal{U}) = \left\{ \alpha \in J_* \ / \ \varphi_\alpha Nx \in \mathcal{U}_1 \right\} = f(Nx)(\mathcal{U})$$

d'où $\eta_1 f(x) = f(Nx)$.

-f est injective : Si $x \in \ker f \Longleftrightarrow f(x)(\mathcal{U}) = \phi \quad \forall\, \mathcal{U} \in X$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \eta_1 f(x)(\mathcal{U}) = J_* \\
&\Longleftrightarrow f(Nx)(\mathcal{U}) = J_* \\
&\Longleftrightarrow \varphi_\alpha(Nx) \in \mathcal{U} \quad \forall \quad \mathcal{U} \in X \ , \ \forall\, \alpha \\
&\Longleftrightarrow \varphi_\alpha(Nx) \in \bigcap_{\mathcal{U} \in X} \mathcal{U} = \{1\} \\
&\Longleftrightarrow \varphi_\alpha(Nx) = 1 = \varphi_\alpha(1) \\
&\Longleftrightarrow Nx = 1 \Longleftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

d'où f est injective .

$$\begin{aligned}
- f(\varphi_\beta(x))(\mathcal{U}) &= \left\{ \alpha \in J_* \ / \ \varphi_\alpha(\varphi_\beta(x)) \in \mathcal{U} \right\} \\
&= \left\{ \alpha \in J_* \ / \ \varphi_\beta(x) \in \mathcal{U} \right\} \\
&= \begin{cases} \phi & \text{si } \varphi_\beta(x) \notin \mathcal{U} \\ J_* & \text{si } \varphi_\beta(x) \in \mathcal{U} \end{cases} \qquad = \sigma(\varphi_\beta(x))
\end{aligned}$$

Où σ est le monomorphisme de **STONE** relatif à X .

$$\begin{aligned}
N_\beta(f(x)) &= \left\{ \mathcal{U} \in X \ / \ f(x)(\mathcal{U}) \geq \beta \right\} \\
&= \left\{ \mathcal{U} \in X \ / \ f(x)(\mathcal{U}) \supseteq \,]o,\beta] \right\} \\
&= \left\{ \mathcal{U} \in X \ / \ \beta \in f(x)(\mathcal{U}) \right\} = \left\{ \mathcal{U} \in X \ / \ \varphi_\beta(x) \in \mathcal{U} \right\} = \sigma(\varphi_\beta(x))
\end{aligned}$$

donc $N_\beta(f(x)) = f\ (\varphi_\beta(x))$.

Ainsi f est un monomorphisme d'algèbre de Lukasiewicz θ-valente involutive .

BIBLIOGRAPHIE :-

[1].D.PONASSE. Algèbres floues et algèbres de Lukasiewicz.
Revue Roumaine de mathématique pure et appl. 23.78.103-110.

[2].J.COULON-J.L.COULON. A propos des algèbres de Lukasiewicz et algèbre boolienne floue .
Revue Roumaine de mathématique pure et appl.1989.5.403-412.

[3].M.deGLASS. Representation of Lukasiewicz many-valued algebra J.M.A.A. 114.315-327(1986).

[4].L.A.ZADEH. Fuzzy sets inform.cont. 8.1965.338-353.