INCERTITUDE ET LOGIQUE MULTIVALENTE
Interprétation et complétude

D. Pacholczyk (*) (**)

(*) LAFORIA : Equipe " Logiques de l'incertitude". Université de PARIS VI
4, place Jussieu - 75252 Paris Cedex 05

(**) LERI : Université de REIMS
rue des Crayères - BP 257 - 51059 Reims Cedex

Résumé: Dans cet article nous nous intéressons plus particulièrement aux aspects théoriques d'interprétation et de complétude du modèle de gestion de l'incertitude présenté dans [1] à [5]. Les résultats ont été généralisés à une famille très large d'implications. La nouvelle définition de conséquence τ_α-valide d'une formule a permis d'établir la complétude de la théorie proposée.

I. INTRODUCTION.

Dans ([1] à [5]) nous avons présenté un modèle de gestion linguistique de l'incertitude utilisant l'implication de Lukasiewicz. M. De Glas, dans [7], a proposé une axiomatisation conduisant à la complétude de la théorie pour une famille d'implications(les FS-implications au § II.2.4). En modifiant la définition de conséquence τ_α-valide(§ III.4), on peut généraliser les résultats à une famille plus large d'implications(les F-implications au § II.2.3). La complétude de la théorie(§ IV) est obtenue en utilisant l'axiomatisation proposée par Rosser et Turquette dans [9].

Les démonstrations des résultats présentés ici se trouvent dans [8].

II. LES STRUCTURES ALGEBRIQUES.

A partir d'un **treillis fini de Morgan de degrés de vérité**(linguistiques), nous avons cette fois défini deux structures algébriques très générales, à savoir, une **algèbre de Lukasiewicz M-valente involutive**(au sens proposé dans [6]) et une **algèbre** dite **implicative**(au sens précisé au § II.2).

II.1. Algèbre multivalente des degrés de vérité [8].

On se donne, pour M fixé ≥ 2, un ensemble **fini totalement ordonné** de **M degrés de vérité** ayant un plus petit élément (**pas du tout vrai**) et un plus grand élément (**tout à fait vrai**) noté : $\mathcal{L}_M = \{ \tau_\alpha, \alpha = 1, M \}$. On a :

$\tau_\alpha \leq \tau_\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$. $\quad \tau_\alpha \vee \tau_\beta = \tau_{\max(\alpha, \beta)}$. $\quad \tau_\alpha \wedge \tau_\beta = \tau_{\min(\alpha, \beta)}$.

On introduit des opérateurs de négation (involutions décroissantes) :

- **n** dans la chaîne $\mathcal{J} = \{1, \dots, M\}$ tel que : $n(\alpha) = M - \alpha + 1$.
- $\sim$ dans le treillis $\{ \mathcal{L}_M, \vee, \wedge, \leq \}$ tel que : $\sim \tau_\alpha = \tau_{n(\alpha)}$.

Il en résulte que $\{ \mathcal{L}_M, \vee, \wedge, \leq, \sim \}$ est un **treillis de Morgan**.

- ***Les opérateurs*** v_β ***et*** w_β : On peut définir des applications $(v_\beta)_{\beta \in \mathcal{J}}$ et $(w_\beta)_{\beta \in \mathcal{J}}$ de $\mathcal{L}_M$ dans $\mathcal{C}\mathcal{L} = \{ \tau_1, \tau_M \}$ de la manière suivante:

Si $\beta = \alpha$ alors $v_\beta \tau_\alpha = \tau_M$ sinon $v_\beta \tau_\alpha = \tau_1$.

Si $\beta \leq \alpha$ alors $w_\beta \tau_\alpha = \tau_M$ sinon $w_\beta \tau_\alpha = \tau_1$.

Dans ces conditions [8] : $(\mathcal{L}_M, \mathcal{I}, (w_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}^*}, \sim, n)$ ***est une algèbre de Lukasiewicz M-valente, encore appelée, algèbre multivalente des degrés de vérité.***

- ***Les opérateurs*** **" appartient à (E) "** ***et*** **" entre τ_{u1} et τ_{u2} " :**

Soit $E=\{ v_{u1}, v_{u2}, \ldots, v_{ui}, \ldots, v_{uk} \}$. On peut définir **appartient à(E)** :

Si $v_\alpha \in E$ **alors appartient à (E)** $\tau_\alpha = \tau_M$ **sinon appartient à (E)** $\tau_\alpha = \tau_1$.

Si $E = [v_{u1}, v_{u2}]$ alors **appartient** à($[v_{u1}, v_{u2}]$) sera noté **entre** τ_{u1} **et** τ_{u2}.

II.2. Algèbre implicative.

II.2.1. Définition.

On dira que $\{\mathcal{L}_M, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim\}$ *est une algèbre implicative si :*

a - $\{\mathcal{L}_M, \vee, \wedge, \sim\}$ *est une chaîne finie dont le plus petit élément est noté* τ_1, *et le plus grand élément est noté* τ_M.

b - *l'implication possède les propriétés suivantes:* $\forall (\tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\gamma) \in \mathcal{L}_M{}^3$,

- i - $\tau_M \rightarrow \tau_\beta = \tau_\beta$. - ii- $\tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta = \tau_M \Leftrightarrow \tau_\alpha \le \tau_\beta$.
- iii - $\tau_\alpha \rightarrow (\tau_\beta \rightarrow \tau_\alpha) = \tau_M$. [s1].
- iv - $(\tau_\alpha \rightarrow (\tau_\beta \rightarrow \tau_\gamma)) \rightarrow (\tau_\beta \rightarrow (\tau_\alpha \rightarrow \tau_\gamma)) = \tau_M$. [s2].
- v - $(\tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta) \rightarrow ((\tau_\beta \rightarrow \tau_\gamma) \rightarrow (\tau_\alpha \rightarrow \tau_\gamma)) = \tau_M$. [s3].

II.2.2. Propriétés [8].

- **1** - ***Si*** $\{\mathcal{L}_M, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim\}$ ***est une algèbre implicative, l'implication possède en outre les propriétés suivantes :***

- a - $\forall \tau_\alpha \in \mathcal{L}_M, \tau_\alpha \rightarrow \tau_\alpha = \tau_M$. **- b -** $\forall (\tau_\alpha, \tau_\beta) \in \mathcal{L}_M{}^2, \tau_\alpha \le (\tau_\beta \rightarrow \tau_\alpha)$.

- c - $\forall (\tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\gamma) \in \mathcal{L}_M{}^3, \tau_\alpha \rightarrow (\tau_\beta \rightarrow \tau_\gamma) = \tau_\beta \rightarrow (\tau_\alpha \rightarrow \tau_\gamma)$.

- d - $\forall (\tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\gamma) \in \mathcal{L}_M{}^3, \tau_\alpha \le (\tau_\beta \rightarrow \tau_\gamma) \Leftrightarrow \tau_\beta \le (\tau_\alpha \rightarrow \tau_\gamma)$.

- e - ***Elle est croissante sur*** $[\tau_1, \tau_\alpha]$ ***par rapport à son second argument:***

$\forall \tau_\alpha \in \mathcal{L}_M, \forall (\tau_{y1}, \tau_{y2}) \in [\tau_1, \tau_\alpha]^2 : \tau_{y1} \le \tau_{y2} \Rightarrow \tau_\alpha \rightarrow \tau_{y1} \le \tau_\alpha \rightarrow \tau_{y2}$.

- f - ***Elle est décroissante sur*** $[\tau_\beta, \tau_M]$ ***par rapport à son premier argument:***

$\forall \tau_\beta \in \mathcal{L}_M, \forall (\tau_{x1}, \tau_{x2}) \in [\tau_\beta, \tau_M]^2 : \tau_{x1} \le \tau_{x2} \Rightarrow \tau_{x1} \rightarrow \tau_\beta \ge \tau_{x2} \rightarrow \tau_\beta$.

- h - $\forall (\tau_\alpha, \tau_\beta) \in \mathcal{L}_M{}^2, (\tau_\alpha \wedge \tau_\beta \rightarrow \tau_\alpha) = \tau_M$.

- i - $\forall (\tau_\alpha, \tau_\beta) \in \mathcal{L}_M{}^2, (\tau_\alpha \rightarrow \tau_\alpha \vee \tau_\beta) = \tau_M$.

- j - $\forall (\tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\gamma) \in \mathcal{L}_M{}^3$:

1 - $(\tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta) \rightarrow ((\tau_\alpha \rightarrow \tau_\gamma) \rightarrow (\tau_\alpha \rightarrow (\tau_\beta \wedge \tau_\gamma))) = \tau_M$.

2 - $(\tau_\alpha \rightarrow \tau_\gamma) \rightarrow ((\tau_\beta \rightarrow \tau_\gamma) \rightarrow ((\tau_\alpha \vee \tau_\beta) \rightarrow \tau_\gamma)) = \tau_M$.

- **2** - ***Si*** $(\mathcal{L}_M, \mathcal{I}, (w_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}^*}, \sim, n)$ ***est une algèbre multivalente, et si de plus,*** $\{\mathcal{L}_M, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim\}$ ***est une algèbre implicative alors :***

- $(v_\gamma \tau_\alpha \rightarrow (v_\gamma \tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta)) \rightarrow (v_\gamma \tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta) = \tau_M$. [s4]
- $(v_M \tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta) \rightarrow ((v_{M-1} \tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta) \rightarrow (\ldots(v_\alpha \tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta)\ldots((v_1 \tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta) \rightarrow \tau_\beta)\ldots)\ldots) = \tau_M$. [s5]
- $v_M \tau_\alpha \rightarrow \tau_\alpha = \tau_M$. [s6]
- $v_\gamma \tau_\alpha \rightarrow v_{n(\gamma)}(\sim \tau_\alpha) = \tau_M$. [s7-a]

- $v_\gamma \tau_\alpha \rightarrow v_\xi (v_\delta \tau_\alpha)$ avec $\tau_\xi = v_\delta \tau_\alpha$. [s7-b]

- $v_\delta \tau_\beta \rightarrow (v_\gamma \tau_\alpha \rightarrow v_\chi (\tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta))$ avec χ tel que : $\tau_\chi = \tau_\gamma \rightarrow \tau_\delta$. [s7-c]

- $v_\delta \tau_\beta \rightarrow (v_\gamma \tau_\alpha \rightarrow v_\chi (\tau_\alpha \vee \tau_\beta)) = \tau_M$ avec χ tel que : $\tau_\chi = \tau_\gamma \vee \tau_\delta$. [s7-d]

- $v_\delta \tau_\beta \rightarrow (v_\gamma \tau_\alpha \rightarrow v_\chi (\tau_\alpha \wedge \tau_\beta)) = \tau_M$ avec χ tel que : $\tau_\chi = \tau_\gamma \wedge \tau_\delta$. [s7-e]

- 3 - ***Pour toute algèbre implicative, l'application*** T ***de*** $\mathcal{L}_M \times \mathcal{L}_M$ ***dans*** $\mathcal{L}_M$ ***définie par :*** $T(\tau_\beta , \tau_\alpha) = \mathrm{Min}\{\tau_\xi \in \mathcal{L}_M \mid \tau_\beta \rightarrow \tau_\xi \geq \tau_\alpha\}$ ***est une*** **T-norme.**

- Remarque: On peut noter le lien avec les R-implications définies dans [10].

II.2.3. Les F-implications.

- **Définition.**

Toute implication ayant les propriétés suivantes : $\forall (\tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\gamma) \in \mathcal{L}_M{}^3$:

- a - $\tau_M \rightarrow \tau_\beta = \tau_\beta$. - b - $\tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta = \tau_M \Leftrightarrow \tau_\alpha \leq \tau_\beta$.

- c - $(\tau_\alpha \rightarrow (\tau_\beta \rightarrow \tau_\gamma)) = (\tau_\beta \rightarrow (\tau_\alpha \rightarrow \tau_\gamma))$.

- d - *Elle est croissante sur* $[\tau_1 , \tau_\alpha]$ *par rapport à son second argument :*

$\forall \tau_\alpha \in \mathcal{L}_M, \forall (\tau_{y1} , \tau_{y2}) \in [\tau_1 , \tau_\alpha]^2 : \tau_{y1} \leq \tau_{y2} \Rightarrow \tau_\alpha \rightarrow \tau_{y1} \leq \tau_\alpha \rightarrow \tau_{y2}$.

- e - *Elle est décroissante sur* $[\tau_\beta , \tau_M]$ *par rapport à son premier argument :*

$\forall \tau_\beta \in \mathcal{L}_M, \forall (\tau_{x1} , \tau_{x2}) \in [\tau_\beta , \tau_M]^2 : \tau_{x1} \leq \tau_{x2} \Rightarrow \tau_{x1} \rightarrow \tau_\beta \geq \tau_{x2} \rightarrow \tau_\beta$.

sera appelée une ***F-implication.***

- **Propriétés [8].**

i- ***Pour toute algèbre implicative*** $\{\mathcal{L}_M, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim\}$, $\rightarrow$ ***est une F-implication.***

ii- ***Pour toute F-implication,*** $\{\mathcal{L}_M, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim\}$ ***est une algèbre implicative.***

II.2.4. Deux familles de F-implications.

II.2.4.1. Les FC-implications.

- **Définition.** *Toute* ***F-implication*** *vérifiant en plus* $\forall \tau_\alpha \in \mathcal{L}_M, \tau_\alpha \rightarrow \tau_1 = \sim \tau_\alpha$. *sera appelée une* ***FC-implication.*** *Si la monotonie dans les propriétés d et e est stricte , on l'appellera une* ***FS-implication.***

Dans ce cas, on a les propriétés classiques de contraposition.

- **Exemples [8].**

a- ***L'implication notée*** $\rightarrow_L$ ***telle que : Si*** $\alpha \leq \beta$ ***alors*** $\tau_\alpha \rightarrow_L \tau_\beta = \tau_M$ ***sinon*** $\tau_\alpha \rightarrow_L \tau_\beta = \tau_{M-\alpha+\beta}$, ***est une FS-implication.***

b- ***L'implication notée*** $\rightarrow_U$ ***telle que : Si*** $\alpha \leq \beta$ ***alors*** $\tau_\alpha \rightarrow_U \tau_\beta = \tau_M$ ***sinon*** $\tau_\alpha \rightarrow_U \tau_\beta = \sim \tau_\alpha \vee \tau_\beta$, ***est une FC-implication.***

- **Propriété [8].** ***Toute FC-implication est telle que:***

$$\forall (\tau_\alpha , \tau_\beta) \in \mathcal{L}_M{}^2 : \tau_\beta \rightarrow \tau_\xi \geq \tau_\alpha \Leftrightarrow \tau_\xi \geq \sim (\tau_\beta \rightarrow \sim\tau_\alpha).$$

II.2.4.2. Les FN-implications.

- **Définition.** *Toute F-implication vérifiant en plus :*

$\exists \alpha \in]1, M[$ *tel que :* $\tau_\alpha \rightarrow \tau_1 \neq \sim \tau_\alpha$ *sera appelée une* ***FN-implication.***

On parlera de ***FD-implication*** *si elle vérifie en plus :*

$\forall (\tau_\alpha,\tau_\beta,\tau_\gamma) \in \mathcal{L}_M{}^3, (\tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta) \rightarrow ((\tau_\alpha \rightarrow (\tau_\beta \rightarrow \tau_\gamma)) \rightarrow (\tau_\alpha \rightarrow \tau_\gamma)) = \tau_M$ [D].

- **Exemple[8].** *L'implication notée* $\rightarrow_V$ *telle que Si* $\alpha \leq \beta$ *alors* $\tau_\alpha \rightarrow_V \tau_\beta = \tau_M$ *sinon* $\tau_\alpha \rightarrow_V \tau_\beta = \tau_\beta$, *est une* ***FD-implication.***

- Remarques : En général, une FN-implication ne vérifie pas la propriété [D].

III. FORMALISATION.

III.1. Définitions. Dans tout ce qui suit, pour M ≥ 2 donné, on dispose de $\mathcal{J} = \{1, \ldots, M\}$ et $\mathcal{L}_M = \{\tau_1, \ldots, \tau_M\}$ un ensemble fini de valeurs muni des opérateurs unaires $\sim$, $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ et d'opérateurs binaires $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$. On va définir un système déductif $\mathcal{S} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$.

- ***L'alphabet*** $\mathcal{E}$. *On se donne :*

a: *un ensemble* $\mathcal{P}$ *(non vide) de* ***symboles ou variables propositionnelles*** *ou encore* ***énoncés élémentaires*** *,*

b: *et un ensemble* $\mathcal{T}$ *de* **M** ***symboles particuliers,*** *noté* $\mathcal{T} = \{ t_\alpha : \alpha \in \mathcal{J} \}$.

c: *et des* ***symboles logiques,*** *à savoir :*

- *un ensemble* $\mathcal{F}_1$ *de* ***connecteurs unaires :*** $\mathcal{F}_1 = \{ \neg \} \cup \{ v_\alpha : \alpha \in \mathcal{J} \}$,
- *et un ensemble* $\mathcal{F}_2$ *de* ***connecteurs binaires :*** $\mathcal{F}_2 = \{ \cup , \cap , \supset \}$.

d: *et des* ***symboles de ponctuation :*** "(" *et* ")" *et* ",".

L' ***alphabet*** $\mathcal{E}$ *est la réunion de ces ensembles.*

- ***Symboles et assemblages.*** *Un* ***symbole*** *est un élément de* $\mathcal{E}$. *Un* ***assemblage*** *est une suite finie de symboles.*

- ***L' ensemble*** $\mathcal{F}$ ***des formules propositionnelles.***

On définit inductivement l'ensemble $\mathcal{F}$ *de la manière suivante:*

- *i -* $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$.
- *ii -* $\forall A \in \mathcal{F}$, $\neg(A) \in \mathcal{F}$ *et* $v_\beta(A) \in \mathcal{F}$.
- *iii-* $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2$, $(A \cup B) \in \mathcal{F}$, $(A \cap B) \in \mathcal{F}$ *et* $(A \supset B) \in \mathcal{F}$.
- *iv- Les seuls assemblages qui soient des* ***formules propositionnelles*** *sont ceux obtenus à partir des règles précédentes.*

Soit i une interprétation de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{L}_M$ qui à toute variable propositionnelle A associe une valeur τ_γ. On peut prolonger i en I de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{L}_M$, qui associe à toute formule A de $\mathcal{F}$ une valeur τ_γ de $\mathcal{L}_M$ et qui possède les propriétés suivantes :

a - $I(t_\alpha) = \tau_\alpha$. **b** - $I(\neg A) = \sim I(A)$.

c - $I(v_\alpha A) = v_\alpha I(A)$. **d** - $I(A \cup B) = I(A) \vee I(B)$.

e - $I(A \cap B) = I(A) \wedge I(B)$. **f** - $I(A \supset B) = I(A) \rightarrow I(B)$.

On dit que I est une **interprétation** de $\mathcal{F}$ dans **le système de valeurs** $\mathcal{L}_M$.

- ***Chaîne de symboles, notée*** $\Gamma_{i=a,b} A_i$ **B**. Soient A_i (i= a, b) et B des formules propositionnelles, on définit Γ de façon récursive de la manière suivante:

Si a > b alors $\Gamma_{i=a,b} A_i\, B = B$ sinon $\Gamma_{i=a,b} A_i\, B = A_b \supset \Gamma_{i=a,b-1} A_i\, B$.

-***Systèmes*** $\mathcal{A}$ ***d'axiomes.*** Deux systèmes d'axiomes, notés [SA1] et [SA2], sont utilisés dans ce qui va suivre. On se donne une interprétation I de $\mathcal{F}$

dans le système de valeurs $\{\mathcal{L}_M, \sim, (v_\alpha)_{\alpha\in \mathcal{J}}, \vee, \wedge, \rightarrow\}$.

- 1 - ***Système* [SA1] *d'axiomes.*** *On appelle* ***axiome*** *du calcul propositionnel toute formule construite suivant l'un des schémas ci-dessous où A,B, C sont des formules quelconques de* $\mathcal{F}$:

(**S1**) : $A \supset (B \supset A)$.

(**S2**) : $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$.

(**S3**) : $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$.

(**S4**) : $(v_\gamma A \supset (v_\gamma A \supset B)) \supset (v_\gamma A \supset B)$, $\gamma = 1, M$.

(**S5**) : $\Gamma_{\gamma = 1, M}(v_\gamma A \supset B)\ B$.

(**S6**) : $v_M A \supset A$.

(**S7**) : a - $v_\gamma A \supset v_{n(\gamma)} \neg A$.

b - $v_\gamma A \supset v_\chi (v_\delta A)$ avec tel que : $\tau_\chi = v_\delta \tau_\gamma$.

c - $v_\delta B \supset (v_\gamma A \supset v_\chi (A \supset B))$ avec χ tel que : $\tau_\chi = \tau_\gamma \rightarrow \tau_\delta$.

d - $v_\delta B \supset (v_\gamma A \supset v_\chi (A \cup B))$ avec χ tel que : $\tau_\chi = \tau_\gamma \vee \tau_\delta$.

e - $v_\delta B \supset (v_\gamma A \supset v_\chi (A \cap B))$ avec χ tel que : $\tau_\chi = \tau_\gamma \wedge \tau_\delta$.

et ceci pour $\delta = 1, M$ et $\gamma = 1, M$.

- ***Système* [SA2] *d'axiomes.*** *On remplace les axiomes* (**S2**), (**S3**) *et* (**S4**) *par l'axiome* (**D**) *unique* : $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$.

- ***L'ensemble*** $\mathfrak{R}$ ***des règles de dérivation.***

a: ***Règles de substitution.*** *On peut remplacer simultanément toutes les occurences d'un énoncé élémentaire par une même formule.*

b: ***Règle d'inférence.*** *On définit comme seule* ***règle d'inférence,*** *la règle dite de* ***Modus-ponens*** *qui consiste à passer des formules* A *et* $A \supset B$ *à la formule* B *dite* ***conséquence immédiate*** *de* A *et* $A \supset B$.

III.2. Déduction.

- **Déduction formelle à partir de** $\mathcal{H}$: *Etant donné* $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, *on appelle* ***déduction*** *formelle* ***à partir de*** $\mathcal{H}$ *une suite finie de formules* $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ *telle que* :

$\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$, *l'une des conditions suivantes est réalisée* :

[**D1**] : A_i *est un axiome* ,

[**D2**] : $A_i \in \mathcal{H}$,

[**D3**] : *Il existe deux entiers* j *et* k *strictement inférieurs à* i *tels que* A_i *soit conséquence immédiate de* A_j *et* A_k.

- **Déduction formelle de B à partir de** $\mathcal{H}$ **notée** $\mathcal{H} \vdash B$:*Une* ***déduction de*** **B** ***à partir de*** $\mathcal{H}$ *est une déduction formelle dont la dernière formule est* **B**.

- **Déduction formelle** : *C'est une déduction à partir de* $\mathcal{H} = \emptyset$. On l'appelle aussi une **preuve** ou une **démonstration**.

- **Démonstration de B notée** $\vdash$ **B** :*Une démonstration de* **B** *est une déduction formelle dont la dernière formule est* **B**. On dit que **B** est **démontrable** ou encore que **B** est un **théorème**.

- t_α- **démonstration de B notée** $\vdash_\alpha$ **B** : *Soient* $t_\alpha \in \mathcal{T}$ *et* $\mathbf{B} \in \mathcal{F}$. *On dit que* **B** *est* t_α- ***démontrable*** *si la formule* $t_\alpha \supset \mathbf{B}$ *est démontrable..*

- t_α - **déduction de B à partir de** $\mathcal{H}$ **notée** $\mathcal{H} \vdash_\alpha \mathbf{B}$.

C'est une déduction de $t_\alpha \supset \mathbf{B}$ *à partir de* $\mathcal{H}$. *On dira que* **B** *est* t_α***-déductible*** *de* $\mathcal{H}$ *ou* t_α***-conséquence*** *de* $\mathcal{H}$: $\mathcal{H} \vdash_\alpha \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathcal{H} \vdash (t_\alpha \supset \mathbf{B})$.

III.3. Propriétés [8].

- 1 - $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2$, $\vdash A \supset B \Rightarrow A \vdash B$. ***Plus généralement:***

$\forall \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ et $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{H} \vdash A \supset B \Rightarrow \mathcal{H} \cup \{A\} \vdash B$.

-2 - $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2$, $\vdash_\alpha A \supset B \Rightarrow A \vdash_\alpha B$. ***Plus généralement:***

$\forall \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ et $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{H} \vdash_\alpha A \supset B \Rightarrow \mathcal{H} \cup \{A\} \vdash_\alpha B$.

- 3 - Théorème de finitude.

$\forall \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ **tel que** $\mathcal{H} \vdash_\alpha B$, **alors** $\exists \mathcal{H}'$ **fini** $\subset \mathcal{H}$ **tel que** $\mathcal{H}' \vdash_\alpha B$.

III.4. Interprétation sémantique des formules.

Dans tout ce qui suit, pour M donné, on se donne :

- une **chaîne** (finie de Morgan) $\{\mathcal{L}_M, \vee, \wedge, \sim\}$ de **degrés de vérité**,
- $(\mathcal{L}_M, \mathcal{J}, (w_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}^*}, N, n)$ une **algèbre de Lukasiewicz M-valente**,
- $\{\mathcal{L}_M, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim\}$ une **algèbre implicative**.
- et un système déductif, noté $\mathcal{S} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$.

III.4.1. Définitions.

Soit une interprétation I *de* $\mathcal{F}$ *dans le système* $\mathcal{L}_M$ ***des degrés de vérité***. *Elle possède les propriétés données au* § III.1.

- **B conséquence** τ_α**- valide de A, notée** $A \models_\alpha B$.

Soient A *et* B *deux formules de* $\mathcal{F}$ *et* I *une interprétation quelconque. On dira que* B *est* ***conséquence*** τ_α ***- valide*** *de* A, *si et seulement si*, $I(B) \geq \mathrm{Min}\{\tau_\xi \in \mathcal{L}_M \mid I(A) \rightarrow \tau_\xi \geq \tau_\alpha\}$.

On notera encore $\overline{\tau}(A, \alpha) = \mathrm{Min}\{\tau_\xi \in \mathcal{L}_M \mid I(A) \rightarrow \tau_\xi \geq \tau_\alpha\}$ le seuil à partir duquel B est conséquence τ_α - valide de A. On a ainsi:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2,\ A \models_\alpha B \Leftrightarrow I(B) \geq \overline{\tau}(A, \alpha).$$

<u>- Remarque :</u> On peut noter que, dans le cas des FC-implications :

$$A \models_\alpha B \Leftrightarrow \{ I(B) \geq \sim (I(A) \rightarrow \sim \tau_\alpha) \}.$$

Cette définition a été, introduite dans [7] pour des FS-implications. Elle est ici généralisée et appliquée à la famille des F-implications.

- **B conséquence** τ_α**-valide de** $\mathcal{H}$, **notée** $\mathcal{H} \models_\alpha B$.

Soit $\mathcal{H} = \{A_1, \dots, A_i, \dots, A_p\}$ *un ensemble* ***fini non vide*** *de formules de* $\mathcal{F}$, *et* $\overline{A}_{\mathcal{H}} = A_1 \cap \dots \cap A_i \cap \dots \cap A_p$. *On dira que* B *est* ***conséquence*** τ_α***-valide*** *de* $\mathcal{H}$ *si et seulement si* B *est conséquence* τ_α*- valide de* $\overline{A}_{\mathcal{H}}$.

$$\mathcal{H} \models_\alpha B \Leftrightarrow \overline{A}_{\mathcal{H}} \models_\alpha B.$$

- **B conséquence valide de A, notée** $A \models B$.

On dira que B *est* ***conséquence valide*** *de* A, *si et seulement si,* B *est au moins aussi vraie que* A: $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2$, $A \models B \Leftrightarrow I(B) \geq I(A)$.

- **B conséquence valide de $\mathcal{H}$, notée $\mathcal{H} \models$ B.**

*Soit $\mathcal{H} = \{A_1, ..., A_i, ..., A_p\}$ un ensemble **fini non vide** de formules de $\mathcal{F}$ et $\overline{A}_{\mathcal{H}}$ défini comme précédemment. On dira que* B *est **conséquence valide** de $\mathcal{H}$ si et seulement si* $\mathcal{H} \models B \Leftrightarrow \overline{A}_{\mathcal{H}} \models B$.

- **L'équivalence sémantique, notée A $\models\mid$ B.**

On dira que deux formules A *et* B *sont **sémantiquement équivalentes**, si et seulement si, elles ont la même interprétation.*

$\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2$, $A \models\mid B \Leftrightarrow \{A \models B$ et $B \models A\}$.

- **Les τ_α - tautologies et les tautologies, notées $\models_\alpha$ A *et* $\models$ A.**

*Une formule A est une τ_α- **tautologie**, si et seulement si,* $I(A) \geq \tau_\alpha$ *et une **tautologie**, si et seulement si* $I(A) = \tau_M$.

Ces définitions généralisent, en logique multivalente, les concepts de conséquences valides et de tautologies de la logique booléenne.

*Un **système déductif** $\mathcal{S}$ sera dit **plausible** pour une interprétation* I *si :*

- *i - tous ses axiomes sont des tautologies,*
- *ii -* $\{I(A) = \tau_M$ et $I(A \supset B) = \tau_M\} \Rightarrow I(B) = \tau_M$.

D'après ce qui précède, pour toute F-implication [SA1] est un ensemble de tautologies. Il en est de même pour toute FD-implication associée à [SA2]. Dans les deux cas l'hypothèse - ii - est satisfaite.

III.4.2. Propriétés[8].

- 1 - ***Pour tout système déductif plausible, tout théorème est une tautologie***

$$\forall A \in \mathcal{F}, \vdash A \Rightarrow \models A.$$

- 2 - ***Pour tout système déductif plausible, toute formule t_α-démontrable est une τ_α- tautologie.*** *Soit:* $\forall A \in \mathcal{F}, \vdash_\alpha A \Rightarrow \models_\alpha A$.

- 3 - ***Toute F-implication est telle que :***

  - *a -* $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, A \models_\alpha B \Leftrightarrow \models_\alpha A \supset B$.
  - *b -* $\forall \mathcal{H}$ (fini) $\subset \mathcal{F}, \forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \mathcal{H} \cup \{A\} \models_\alpha B \Rightarrow \mathcal{H} \models_\alpha A \supset B$.

- Remarque:

La réciproque de ce résultat est fausse. Toutefois, on peut montrer que [8] :

- 4 - ***Pour une FC-implication quelconque :***

  - *a :* $\forall \mathcal{H}$ *(fini)* $\subset \mathcal{F}$ *tel que* $I(\overline{A}_{\mathcal{H}}) \rightarrow \sim\tau_\alpha = \sim\tau_\alpha$, *on a :*

  $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \mathcal{H} \cup \{A\} \models_\alpha B \Leftrightarrow \mathcal{H} \models_\alpha A \supset B$.

  - ***b : Si $\mathcal{HB}$ (fini) est un ensemble de tautologies de $\mathcal{F}$, alors on a:***

  $\forall \tau_\alpha \in \mathcal{L}_M, \forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \mathcal{HB} \cup \{A\} \models_\alpha B \Leftrightarrow \mathcal{HB} \models_\alpha A \supset B$.

- 5 - ***Pour une FS-implication quelconque, si $\mathcal{HB}$ (fini) est un ensemble de tautologies de $\mathcal{F}$, alors on a :***

  $\forall \tau_\alpha \in \mathcal{L}_M, \forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \mathcal{HB} \cup \{A\} \models_\alpha B \Leftrightarrow \mathcal{HB} \models_\alpha A \supset B$.

- 6 - ***Toute FD-implication définie dans $\mathcal{L}_M$ est telle que :***

  $\forall \mathcal{H}$ (fini) $\subset \mathcal{F}, \forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \mathcal{H} \cup \{A\} \models_\alpha B \Leftrightarrow \mathcal{H} \models_\alpha A \supset B$.

On peut encore montrer[8] que, l'implication sémantique possède les propriétés suivantes :

- 7 - *Pour toute F-implication, on a :*

- a - $\forall A \in \mathcal{F}, \models A \supset A$.

- b - $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \{ A \mid\!=\!\mid B \Leftrightarrow \models A \supset B$ et $\models B \supset A \}$.

- c - $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \{ A \models B \Leftrightarrow \{ \forall \alpha = 1, M : w_\alpha A \models w_\alpha B\} \}$.

- d - $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \{ A \mid\!=\!\mid B \Leftrightarrow \{ \forall \alpha = 1, M : w_\alpha A \mid\!=\!\mid w_\alpha B\} \}$.

- e - $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \{ A \mid\!=\!\mid B \Leftrightarrow \{ \forall \alpha = 1, M : v_\alpha A \mid\!=\!\mid v_\alpha B \}\}$.

- f - *Si* E *un sous-ensemble de* $\{v_1, \ldots, v_M\}$, *alors* $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2$:

$\{ A \mid\!=\!\mid B \Leftrightarrow \{ \forall E :$ appartient-à (E) A $\mid\!=\!\mid$ appartient-à (E) B$\}\}$.

III.5. Généralisation du Modus-ponens.

Il s'agit d'aborder ici le problème classique de la **généralisation du Modus-ponens**, à savoir : Si l'implication $A \supset B$ est τ_α vraie et que la prémisse A est τ_β vraie, que peut-on en déduire pour la conclusion B?

Dans les modèles flous ([10], [11]), ce problème est abordé via la théorie des possibilités. Dans le modèle proposé ici, on a en particulier [8] :

- 1 - $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{J}^2$:

$\{ \models_\beta A$ et $\models_\alpha A \supset B \} \Rightarrow \{ \models_\gamma B$ avec $\tau_\gamma = \overline{\tau}(t_\beta, \alpha) \}$.

- Remarque : Pour les FC-implications, on sait que $\overline{\tau}(t_\beta, \alpha) = \sim (\tau_\beta \rightarrow \sim \tau_\alpha)$. Le résultat trouvé généralise à la famille des F-implications, le résultat établi dans[7] pour des FS-implications.

Dans le cas plus général, si $\mathcal{H}$ est un ensemble **fini non vide** de formules, on obtient [8] :

- 2 - $\forall \mathcal{H}$ (fini) $\subset \mathcal{F}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{J}^2$:

$\{ \mathcal{H} \models_\beta A$ et $\mathcal{H} \models_\alpha A \supset B \} \Rightarrow \mathcal{H} \models_\delta B$.

(avec $\tau_\gamma = \overline{\tau}(\overline{A}_{\mathcal{H}}, \beta)$ et $\tau_\delta = \overline{\tau}(t_\gamma, \alpha)$).

- Remarque: On voit immédiatement que l'on peut, en **chaînant des inférences**, déterminer les **degrés de vérité des conclusions.**

Un deuxième problème doit être également abordé : la généralisation du **Modus-tollens**: Si l'implication $A \supset B$ est τ_α vraie et que la conclusion $\neg B$ est τ_β vraie, que peut-on en déduire pour la premisse $\neg A$?

On obtient dans ce cas [8] :

- 3 - $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{J}^2$:

$\{ \models_\beta \neg B$ et $\models_\alpha A \supset B \} \Rightarrow \{ \models_\gamma \neg A$ avec $\tau_\gamma = \sim (\tau_\alpha \rightarrow \sim \tau_\beta). \}$.

- 4 - $\forall \mathcal{H}$ (fini) $\subset \mathcal{F}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{J}^2$:

$\{ \mathcal{H} \models_\beta \neg B$ et $\mathcal{H} \models_\alpha A \supset B \} \Rightarrow \mathcal{H} \models_\eta \neg A$.

(avec $\tau_\gamma = \overline{\tau}(\overline{A}_{\mathcal{H}}, \beta)$, $\tau_\delta = \overline{\tau}(\overline{A}_{\mathcal{H}}, \alpha)$ et $\tau_\eta = \sim(\tau_\delta \rightarrow \sim \tau_\gamma)$).

IV. LA COMPLETUDE.

Les résultats établis par Rosser et Turquette [9] donnent en particulier:

- 1 - $\forall A \in \mathcal{F}, \vdash A \supset A$.

-2- Théorème de complétude : Pour tout système déductif plausible associé à [SA1], il y a équivalence entre tautologies et théorèmes.

$$\forall A \in \mathcal{F}, \models A \Leftrightarrow \vdash A.$$

On peut y ajouter [8] :

-3- Théorème de τ_α - complétude. Pour tout système déductif plausible associé à [SA1], il y a équivalence entre les τ_α-tautologies et les formules t_α-démontrables : $\forall A \in \mathcal{F}, \models_\alpha A \Leftrightarrow \vdash_\alpha A.$

-4- Soient un système déductif plausible associé à [SA1] et $\mathcal{H}$ un ensemble fini de formules, on a : $\mathcal{H} \models_\alpha A \Rightarrow \mathcal{H} \vdash_\alpha A.$

<u>- Cas particulier[8] :</u> La réciproque est vraie si $\mathcal{HB}$ un ensemble fini de formules de $\mathcal{F}$ vraies pour une interprétation I.

-5- Soient un système déductif plausible associé à [SA1] et $\mathcal{HB}$ est un ensemble fini de formules vraies de $\mathcal{F}$, alors : $\mathcal{HB} \vdash_\alpha A \Leftrightarrow \mathcal{HB} \models_\alpha A.$

Si on utilise cette fois le système [SA2], on peut montrer que l'axiome (D) fait que l'on a cette fois le théorème de la déduction[9]. On peut alors déduire (S2), (S3) et (S4). Les résultats du paragraphe précédent sont donc toujours valables.

-6- Théorème de la déduction. Pour tout système déductif plausible associé à [SA2], on a : $\{A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m\} \vdash B \Rightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_{m-1}\} \vdash A_m \supset B.$

-7- Tout système déductif plausible par rapport à [SA2], est plausible par rapport à [SA1].

-8- Théorème de t_α- déduction. Pour tout système déductif plausible associé à [SA2] , on a : $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \vdash_\alpha B \Rightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_{m-1}\} \vdash_\alpha A_m \supset B.$

V - CONCLUSION.

Les résultats cités ajoutés à ceux obtenus ici, mettent en évidence le fait que les logiques multivalentes et la théorie des ensembles flous fournissent les outils sémantiques de base, pour l'élaboration d'un modèle de représentation de l'incertitude.

VI - REFERENCES.

[1] **H.Akdag-D.Pacholczyk:** Linguistic management of a knowledge based system using a many-valued logic. *Joint international conference EURO IX - TIMS XXVII - PARIS 1988.*

[2] **H.Akdag-D. Pacholczyk:** Gestion linguistique d'une base de connaissances. *LAFORIA - Rapport interne n° 88/34 .*

[3] **H.Akdag-D. Pacholczyk:** Incertitude et logique multivalente. Première partie: Etude théorique. *BUSEFAL-89 n° 38.*

[4] **H.Akdag-D.Pacholczyk:** Incertitude et logique multivalente. Deuxième partie: Application aux systèmes experts. *BUSEFAL-89 n° 39.*

[5] **H.Akdag-D.Pacholczyk:** Linguistic management of a knowledge based system. (*article soumis à communication*).

[6] **M. De Glas:** Representation of Lukasiewicz many-valued algebras. *Journal of mathematical analysis and applications. Vol 114 n° 2. 1986.*

[7] **M. De Glas:** Knowledge representation in fuzzy setting. *LAFORIA - Rapport interne n° 89/48.*

[8] **D. Pacholczyk:** Logiques propositionnelles multivalentes et gestion de l'incertitude. *LAFORIA - Rapport interne n° 89/49.*

[9] **J.B. Rosser-A.R. Turquette:**Many-valued logics. *North Holland publishing Company . Amsterdam 1958.*

[10] **E.Trillas-Valverde:** On mode and implication in approximate reasoning. *Approximate reasoning in expert systems - Elsevier science publishers.B.V. 1985.*

[11] **L.A.Zadeh:** *Fuzzy sets and applications: Selected papers by L.A.Zadeh.1987.*