# INCERTITUDE ET LOGIQUE MULTIVALENTE
## Première partie : Etude théorique

**H. Akdag(* ) (**) D. Pacholczyk (* ) (**)**

**(*) LAFORIA : Equipe " Logiques de l'incertitude". Université de PARIS VI**
**4, place Jussieu - 75252 Paris Cedex 05**

**(**) LERI : Université de REIMS**
**rue des Crayères - BP 257 - 51059 Reims Cedex**

**RESUME:** Dans de nombreux domaines, la connaissance de l'expert est souvent entachée d'incertitude. L'expression de cette connaissance sous forme qualitative, plutôt que quantitative, permet de mieux prendre en compte cette incertitude. Dans cet article, nous présentons un modèle de gestion de l'incertitude répondant à cet objectif. Une approche linguistique, dans le contexte d'une logique propositionnelle multivalente, est proposée à l'expert pour représenter, puis exploiter, sa connaissance incertaine.

## I - Gestion linguistique d'une base de connaissances:

Une base de connaissances comprend essentiellement des faits et des règles. Dans de nombreux cas, les faits de base qui les composent sont des propositions évaluées de façon qualitative plutôt que quantitative. On trouvera:

- des faits du type " l'étudiant est *jeune* ", ou " l'étudiant est **très** *jeune* ",
- et des règles comme:

**si** " l'étudiant est **au moins moyennement** *bien-noté* "
et " l'étudiant est *jeune* "
**alors** " l'étudiant est **au moins** un **assez** *bon-candidat* ".

Dans ces exemples plusieurs notions apparaissent:

- 1 - Dans une proposition du type " l'étudiant est **au moins assez** *jeune* ", "*jeune* " est représenté par un ensemble flou [11], dont la fonction d'appartenance $\mu_{jeune}$ associe à tout $u \in \mathbb{R}^+$ un **degré d'appartenance** (ou **degré de vérité**) $\mu_{jeune}(u) \in [0,1]$.

<u>- Exemple:</u> La figure I donne une représentation de "*jeune* ". On l'interprète de la manière suivante: pour un individu $x \in E$ dont l ' âge est $t(x) = u$, x est "*jeune* " à un degré $\alpha = \mu_{jeune}(u)$ .

- 2 - Considérons la proposition " l'étudiant est $\alpha$ *jeune* " où $\alpha$ est, par exemple, un adverbe( ex: **assez**). **Zadeh**[12] utilise la notion de **modificateur** pour créer, à partir de l'ensemble flou A, l'ensemble flou $\alpha$ A. Nous avons préféré l'interprétation proposée dans [5] par **M. De Glas,** à savoir: " x est $\alpha$ A " signifie " x ( est $\alpha$ ) A ", c'est-à-dire que $\alpha$ est un **degré de vérité**, le degré auquel " x est A ". En d'autres termes:

" x est $\alpha$ **A** " est **vraie** si et seulement si " x est **A** " est $\alpha$ **- vraie.**

Le recours à une **évaluation linguistique** $\alpha$ traduit souvent, chez l'expert, **une incertitude** sur un degré de vérité.

Il convient alors d'associer à $\alpha$ , non plus un degré de vérité, mais un **intervalle de confiance** sur l'intervalle des degrés de vérité.
- 3 - La proposition " l'étudiant est **au moins** $\alpha$ *jeune* " est interprétée de la manière suivante: " l'étudiant est *jeune* " est **au moins** $\alpha$ **- vraie.**

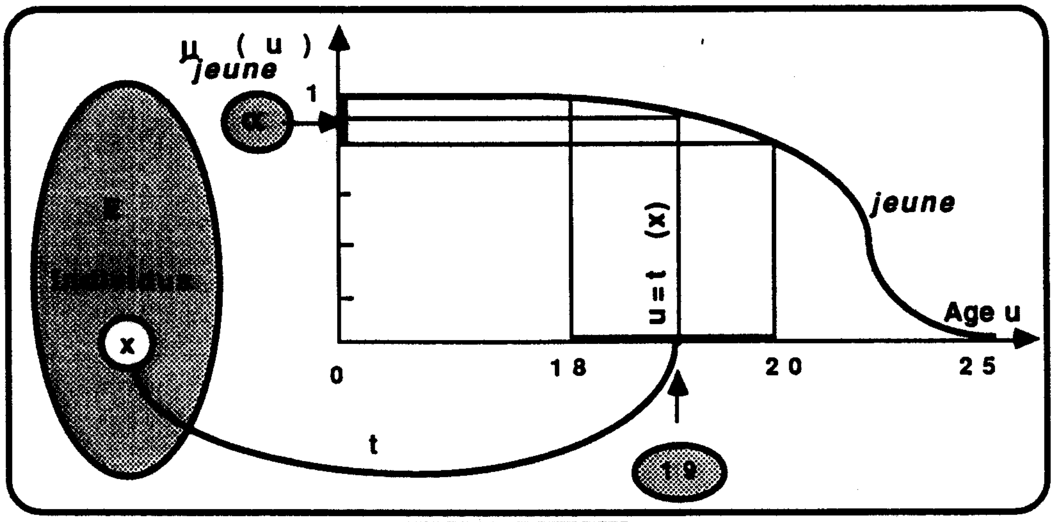


Figure I

## II - LES OUTILS UTILISES :

### II-1-Définition d'un ensemble $L$ de degrés de vérité linguistiques:

Soit un ensemble totalement ordonné, noté [ 0 ,1 ], muni d'une involution décroissante ( $\neg$ ). Définissons dans [ 0 , 1 ] un ensemble $T$ d 'intervalles $[ x_i , x_j ]$ vérifiant les propriétés suivantes:

- a: $\bigcup [ x_i , x_j ] = [ 0 , 1 ]$. - b: $[ 0 , 0 ] \in T$ et $[ 1 , 1 ] \in T$.

- c: $[ a , b ] \in T \Rightarrow [ \neg b , \neg a ] \in T$.

- d: $\{ [ a , b ] \in T$ et $[ c , d ] \in T \} \Rightarrow$

$\{ [ \max ( a , c ) , \max ( b , d ) ] \in T$ et $[ \min( a , c ) , \min ( b , d ) ] \in T \}$.

Définissons dans $T$ une relation d'ordre $\lesssim$ ( en général partiel ) comme suit: $\{ [ a , b ] \lesssim [ c , d ] \} \Leftrightarrow \{ a \leq c$ et $b \leq d \}$.

Dans ces conditions $\{ T , \lesssim \}$ **est un treillis.**

On peut alors introduire des opérateurs $\cup$ et $\cap$ :

$$[ a , b ] \cup [ c , d ] = [ \max ( a , c ) , \max ( b , d ) ]$$
$$\text{et } [ a , b ] \cap [ c , d ] = [ \min( a , c ) , \min ( b , d ) ].$$

et une négation forte, notée $\neg$, telle que : $\neg [ a , b ] = [ \neg b , \neg a ]$ .

Notons enfin, qu'il est possible de choisir $T$ de telle sorte que $\{T , \lesssim , \cup , \cap , \neg \}$ soit un **treillis distributif** vérifiant les **lois de Morgan.** On peut trouver dans [3] la justification de ces résultats. On notera $T_M$ un treillis $T$ de ce type à M éléments.

Dans ce qui suit, on s'intéressera plus particulièrement à des treillis de type $T_{11}$ ( un seul élément invariant pour la négation ) dont la figure II donne une représentation possible. Notons toutefois que les résultats restent vrais dans tout treillis *T* de même nature muni d'une relation d'ordre total.

L'ensemble *T* étant supposé totalement ordonné, on peut associer à chaque intervalle [ a , b ] de *T* un élément noté $m_{a,b} \in [a, b]$ de telle sorte que la correspondance: $[a, b] \rightarrow m_{a,b}$ soit un isomorphisme. L'ensemble $\{ m_{a,b} \mid [a, b] \in T \}$ est alors un sous-ensemble totalement ordonné de [ 0 , 1 ] et T est donc, à un isomorphisme près, un sous-ensemble de [ 0 , 1 ].

Si l'on considère les éléments de [ 0 , 1 ] comme des degrés de vérité, les **éléments de *T***, en qualité de sous-intervalles de [ 0 , 1 ], peuvent être considérés comme des **intervalles de confiance** ( sur l'ensemble des degrés de vérité ) , ce qui nous permet de nous ramener d'un ensemble infini de degrés de vérité à un **ensemble fini** d'intervalles de confiance. Par ailleurs, les **éléments de *T***, vus comme éléments de [ 0 , 1 ], peuvent être considérés comme des **degrés de vérité** auxquels on peut associer bijectivement des **degrés de vérité linguistiques.** Désignons par :

$$L = \{ \tau_\alpha , \alpha = 1 , M \}$$

cet ensemble de degrés de vérité linguistiques. On peut induire dans *L* la même structure que dans le treillis *T* .

Au treillis $T_{11}$ , nous avons associé un treillis $L_{11}$ de degrés de vérité linguistiques( figure III ). On peut montrer que[3] ( $L_{11}, \leq, \vee, \wedge, \sim$ ) est un **treillis distributif** vérifiant **les lois de Morgan.**

- Remarques:

1 - Une double terminologie est proposée. Elle permet de parler de **degrés de vérité** ou de **degrés de fausseté.** L'expert, en général, utilise les **degrés de vérité** lorsqu'une proposition lui semble au moins moyennement vraie, et les **degrés de fausseté** dans le cas contraire.

2 - Pour des raisons terminologiques, il y a coïncidence entre les degrés **tout à fait** et **pas du tout** vrais et les valeurs booléennes **vrai** et **faux** .

3 - Notons que, **moyennement** désigne l'élément invariant pour la négation.

4 - Il est nécessaire de donner une interprétation des **assertions** comme Durand est *jeune* sous la forme d'une évaluation linguistique du prédicat flou " x est *jeune* ". Nous proposons à l'expert deux interprétations sémantiques des affirmations. Ainsi **l'assertion** x est A aura pour signification : " x est **au moins moyennement** A " est vraie ou bien " x est **exactement moyennement** A " est vraie. De cette façon, **toute assertion** x est A est une **proposition vraie** du type " x est $\alpha$ A ".

5 - Il résulte de ce qui précède que, manipuler un **prédicat flou ne nécessite plus** de définir **sa fonction d'appartenance**. A l'aide d'un nombre **fini** de termes ( 5,7,9 ou 11 termes par exemple[3] ), l'expert va définir, puis gérer, sa connaissance. Dans de nombreux domaines ( en médecine en particulier ), cette **approche qualitative** ( plutôt que quantitative ), semble plus naturelle.

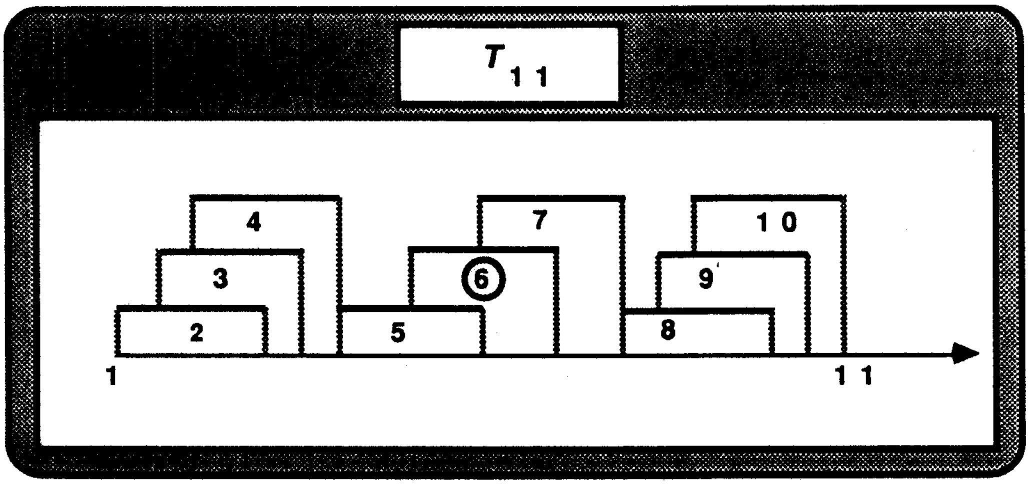


Figure II

$L_{11}$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | pas du tout vrai | tout à fait faux |
| 2 | très peu vrai | franchement très faux |
| 3 | peu vrai | très faux |
| 4 | assez peu vrai | assez faux |
| 5 | plutôt peu vrai | plutôt faux |
| 6 | moyennement vrai | moyennement faux |
| 7 | plutôt vrai | plutôt peu faux |
| 8 | assez vrai | assez peu faux |
| 9 | très vrai | peu faux |
| 10 | franchement très vrai | très peu faux |
| 11 | tout à fait vrai | pas du tout faux |

Figure III

Dans $L_{11} = \{ \tau_\alpha , \alpha = 1 ,11 \}$ posons $\mathbf{n} ( \alpha ) = \mathbf{12} - \alpha$ . On a:

$1 : \tau_\alpha \leq \tau_\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$. $\quad 2 : \sim \tau_\alpha = \tau_{n(\alpha)}$.

$3 : \tau_\alpha \vee \tau_\beta = \tau_{\max(\alpha , \beta)}$. $\quad 4 : \tau_\alpha \wedge \tau_\beta = \tau_{\min( \alpha , \beta )}$.

**II - 2 - Définition d'une implication matérielle :**

Pour exploiter la base de connaissances, nous avons besoin de définir d'abord une implication matérielle et ensuite une implication sémantique.

II - 2 - 1 - ***L'implication matérielle notée*** $\rightarrow_L$ :

Nous avons choisi d'utiliser l'implication matérielle de Lukasiewicz [7], que nous noterons $\rightarrow_L$ , application de $L_{11} \times L_{11} \rightarrow L_{11}$ telle que:

Si $\tau_\alpha \leq \tau_\beta$ alors $\tau_\alpha \rightarrow_L \tau_\beta = \tau_{11}$ sinon $\tau_\alpha \rightarrow_L \tau_\beta = \tau_{11-\alpha+\beta}$.

Elle possède les propriétés suivantes:

a- $\forall\ \tau_\alpha,\ \tau_\alpha \rightarrow_L \tau_1 = \sim \tau_\alpha = \tau_{n(\alpha)} = \tau_{12-\alpha}$. b- $\forall\ \tau_\beta,\ \tau_{11} \rightarrow_L \tau_\beta = \tau_\beta$

c- $\forall\ (\tau_{y1}, \tau_{y2}) \in [\tau_1, \tau_\alpha]^2 : \tau_{y1} \leq \tau_{y2} \Rightarrow \tau_\alpha \rightarrow_L \tau_{y1} \leq \tau_\alpha \rightarrow_L \tau_{y2}$.

d- $\forall\ (\tau_{x1}, \tau_{x2}) \in [\tau_\beta, \tau_{11}]^2 : \tau_{x1} \leq \tau_{x2} \Rightarrow \tau_{x1} \rightarrow_L \tau_\beta \geq \tau_{x2} \rightarrow_L \tau_\beta$.

**II -3 - Définition des opérateurs unaires:**

On peut définir des opérateurs unaires permettant de gérer des propositions comme " Durand est **exactement peu** *jeune* " ou " Durand est **au moins peu** *jeune* ".

**III - 3 - 1 - Les opérateurs de base** $v_\beta$ **:**

Soit $L' = \{ v_\beta, \beta = 1, 11 \} = \{$ **exactement** $\tau_\beta, \beta = 1, 11 \}$ avec:

Si $\beta = \alpha$ alors $v_\beta \tau_\alpha = \tau_{11}$ sinon $v_\beta \tau_\alpha = \tau_1$.

La proposition " x est **exactement** $\tau_\beta$ A " sera **tout à fait** vraie si et seulement si " x est A " est $\tau_\beta$ vraie et **pas du tout** vraie dans les autres cas.

**III - 3 - 2 - Les opérateurs** $w_\beta$ **:**

En utilisant l'opérateur $\vee$ il est possible de définir $L''$.

$L'' = \{ w_\beta, \beta = 1, 11 \} = \{$ **au moins** $\tau_\beta, \beta = 1, 11 \}$

avec $w_\beta \tau_\alpha = v_\beta \tau_\alpha \vee v_{\beta+1} \tau_\alpha \vee \dots \vee v_{11} \tau_\alpha$. On a donc:

Si $\beta \leq \alpha$ alors $w_\beta \tau_\alpha = \tau_{11}$ sinon $w_\beta \tau_\alpha = \tau_1$.

La proposition " x est **au moins** $\tau_\beta$ A " sera **tout à fait** vraie si et seulement si" x est A " à un degré de vérité linguistique **au moins** égal à $\tau_\beta$ et **pas du tout** vraie dans le cas contraire.

**III- 3 -3: Les opérateurs appartient à ( E ) et entre** $\tau_{u1}$ **et** $\tau_{u2}$ **:**

Soit $E = \{ v_{u1}, v_{u2}, \dots, v_{ui}, \dots, v_{uk} \}$. On peut définir **appartient à (E)** comme-suit:

**appartient à ( E )** $\tau_\alpha = v_{u1} \tau_\alpha \vee v_{u2} \tau_\alpha \vee \dots \vee v_{ui} \tau_\alpha \vee \dots \vee v_{uk} \tau_\alpha$.

En d'autres termes:

Si $v_\alpha \in E$ **appartient à ( E )** $\tau_\alpha = \tau_{11}$ sinon **appartient à ( E )** $\tau_\alpha = \tau_1$.

On notera encore: **appartient à ( E )** = $\tau_{u1}$ **ou** $\tau_{u2}$ ... **ou** $\tau_{ui}$ ... **ou** $\tau_{uk}$ .

<u>- Remarque:</u> Pour $E = \{ v_\beta \}$ (resp. $E = [ v_\beta, v_{11} ]$ ), on retrouve $v_\beta$ ( resp. $w_\beta$ ).

<u>- Cas particulier:</u> Quand $E = [ v_{u1}, v_{u2} ]$ alors **appartient à** ( $[ v_{u1}, v_{u2} ]$ ) sera noté **entre** $\tau_{u1}$ **et** $\tau_{u2}$.

## III - L'implication sémantique :

### III - 1 - L'ensemble des formules propositionnelles:

Soit **P** un ensemble non vide de symboles. On se donne en plus les ensembles suivants: $T = \{ t_\alpha, \alpha = 1, M \}$ ; $F1 = \{\neg\} \cup \{ V_\beta, \beta = 1, M \}$ ; $F2 = \{ \rightarrow_L \}$.

On peut définir l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules comme-suit:

- i : $P \subset \mathcal{F}$ et $T \subset \mathcal{F}$,
- ii : $\forall A, \{ A \in \mathcal{F} \Rightarrow \{ \neg A \in \mathcal{F}$ et $V_\alpha A \in \mathcal{F} \} \}$,
- iii : $\forall (A, B), \{ (A, B) \in \mathcal{F}^2 \Rightarrow A \rightarrow_L B \in \mathcal{F} \}$.

Les opérateurs $\vee$, $\wedge$, $W_\beta$ et sont construits à partir des précédents. On peut ajouter **appartient à ( E )** ( et entre $V_{u1}$ et $V_{u2}$ ). Si $E = \{ V_{\beta 1}, \dots, V_{\beta i}, \dots, V_{\beta k} \}$ alors: **appartient à ( E )** $A = V_{\beta 1} A \vee \dots \vee V_{\beta i} A \vee \dots \vee V_{\beta k} A$

### III - 2 - Interprétation sémantique:

Soit une application I de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{L}$ qui associe à toute formule A un degré de vérité linguistique $I(A) = \tau_\alpha$. On dit que I est une **interprétation** de $\mathcal{F}$ si elle possède les propriétés suivantes:

a : $I(t_\alpha) = \tau_\alpha$ ; b : $I(\neg A) = \sim I(A)$ ; c : $I(V_\alpha A) = v_\alpha I(A)$;
d : $I(A \rightarrow_L B) = I(A) \rightarrow_L I(B)$.

Notons que dans ces conditions :
$I(A \vee B) = I(A) \vee I(B)$ ; $I(A \wedge B) = I(A) \wedge I(B)$; $I(W_\beta A) = w_\beta I(A)$.
Si $E = \{ V_{\beta 1}, \dots, V_{\beta i}, \dots, V_{\beta k} \}$ et $E = \{ v_{\beta 1}, \dots, v_{\beta i}, \dots, v_{\beta k} \}$ alors:

I( **appartient à ( E )** A ) = **appartient à ( E )** I ( A ).

### III - 3 - Définition d'une sémantique multivalente:

Nous utiliserons principalement la définition de **conséquence $\tau_\alpha$-valide** proposée par **M. De Glas** dans [5] .

III - 3 - 1: *B conséquence $\tau_\alpha$- valide de A notée* $A \models_\alpha B$.

Etant données deux formules A et B de $\mathcal{F}$ , on dira que B est **conséquence $\tau_\alpha$- valide** de A si et seulement si $I(B) \geq \sim ( I(A) \rightarrow_L \sim \tau_\alpha )$.

Soit: $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \{ A \models_\alpha B \Leftrightarrow I(B) \geq \sim ( I(A) \rightarrow_L \sim \tau_\alpha ) \}$.

III - 3 - 2: *B conséquence valide de A et implication sémantique notée* $A \models B$.

On l'obtient en prenant $\tau_\alpha = \tau_M$. B est **conséquence valide** de A si B est au moins aussi vraie que A. En effet, on a: $A \models B \Leftrightarrow I(B) \geq I(A)$.

$A \models B$ est l'**implication sémantique** associée à $A \rightarrow_L B$.

III - 3 - 3: *L'équivalence sémantique notée* $A \models\mid B$.

$$A \models\mid B \Leftrightarrow \{ A \models B \text{ et } B \models A \}.$$

Les formules A et B sont équivalentes si et seulement si $I(A) = I(B)$.

III - 3 - 4: *Proposition multivalente notée* [ A ].

Cette relation d'équivalence permet de définir l'ensemble des propositions multivalentes comme étant l'ensemble-quotient{ F / |=| } . La classe des formules équivalentes à A , notée [ A ], est appelée une **proposition multivalente**. Cet ensemble comporte M ( ici 11 ) éléments.

III - 3 - 5: $\tau_\alpha$ *-tautologie et tautologie A notées* $|=_\alpha A$ *et* $|= A$ .

Le concept de tautologie de la logique booléenne[6] s'introduit en logique multivalente([9])de la manière suivante: A est une **$\tau_\alpha$- tautologie** si et seulement si $I(A) \geq \tau_\alpha$. Soit: $|=_\alpha A \Leftrightarrow I(A) \geq \tau_\alpha$.

- Remarque: Ceci peut aussi s'écrire : $|=_\alpha A \Leftrightarrow t_\alpha |= A$.

Si $\tau_\alpha = \tau_M$ alors on parlera de **tautologie:** $|= A \Leftrightarrow I(A) = \tau_M$

## III - 4 - Les propriétés de l'implication sémantique:

Nous allons donner quelques propriétés liant les implications matérielle et sémantique. Ces résultats sont démontrés dans [2].

*Proposition III - 1:* $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \{ A |=_\alpha B \Leftrightarrow |=_\alpha A \rightarrow_L B \}$.

*Proposition III - 2 :* $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \{ A |=| B \Leftrightarrow A \leftrightarrow_L B \}$.

*Proposition III - 3 :* $\forall A \in \mathcal{F}, |= A \rightarrow_L A$.

*Proposition III - 4:* $\forall (A,B) \in \mathcal{F}^2, \{ A |= B \Leftrightarrow \{ \forall \alpha = 1,M: W_\alpha A |= W_\alpha B\} \}$.

*Proposition III - 5:* $\forall (A,B) \in \mathcal{F}^2, \{ A |=| B \Leftrightarrow \{\forall \alpha = 1,M : v_\alpha A |=| v_\alpha B \} \}$.

## III - 5 - La complétude :

Une axiomatisation de cette logique propositionnelle est proposée dans [8]. Elle donne, en particulier, le **théorème de complétude** suivant:

*Toute formule $\tau_\alpha$- démontrable est une $\tau_\alpha$- tautologie ( et réciproquement ).*

# IV - EXPLOITATION DES CONNAISSANCES:

Il est également nécessaire de rendre le système apte à exploiter la connaissance. Il est indispensable de généraliser la règle classique dite de "modus-ponens". En logique floue de telles généralisations ( [10] , [13] ) ont été proposées. Dans le contexte de la logique multivalente retenue ici, la règle d'inférence ( si { A et $A \rightarrow_L B$ } alors B), et la notion de conséquence $\tau_\alpha$-valide, conduisent tout naturellement à des généralisations de cette règle.

Soit $E = \{ \tau_{u1}, \dots, \tau_{ui}, \dots, \tau_{up} \}$ un sous-ensemble de $\mathcal{L}_{11}$. Désignons par min(E) l'élément minimal de E. On peut montrer que [4] :

*Proposition IV- 1:*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \{ I(A) \in E \text{ et } |=_\alpha A \rightarrow_L B \} \Rightarrow I(B) \geq \sim (\min(E) \rightarrow_L \sim \tau_\alpha).$$

*Proposition IV - 2:* $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2$ et E tel que $\min(E) \geq \sim \tau_\alpha$ :

$$\{ I(A) \in E \text{ et } I(A \rightarrow_L B) = \tau_\alpha \} \Rightarrow I(B) \geq \sim (\min(E) \rightarrow_L \sim \tau_\alpha).$$

*Proposition IV - 3:*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \{ |=_\beta A \rightarrow_L B \text{ et } |=_\alpha \neg B \} \Rightarrow I(\neg A) \geq \sim (\tau_\beta \rightarrow_L \sim \tau_\alpha).$$

- Cas particuliers:

$\forall (A, B) \in \boldsymbol{F}^2, \{ \models_\beta A$ et $\models_\alpha A \to_L B \} \Rightarrow I(B) \geq \sim (\tau_\beta \to_L \sim \tau_\alpha)$.

$\forall (A, B) \in \boldsymbol{F}^2$ et $\tau_\beta \geq \sim \tau_\alpha$:

$\{ \models_\beta A$ et $I(A \to_L B) = \tau_\alpha \} \Rightarrow I(B) \geq \sim (\tau_\beta \to_L \sim \tau_\alpha)$.

-Remarque: Dans [4] nous nous intéresserons aux systèmes experts manipulant des données incertaines. Un formalisme de représentation des règles de production sera proposé à l'expert. Il disposera ainsi, d'un moteur d'inférences effectuant sur des données incertaines **un raisonnement de nature qualitative.**

## V - CONCLUSION

L'insuffisance des outils probabilistes et possibilistes nous a conduit à proposer, dans ([1],[2]) ce nouvel outil pour gérer l'incertitude, principalement axé sur l'utilisation linguistique d'une logique propositionnelle multivalente. L'un des avantages de cette approche est que l'on peut manipuler des prédicats flous sans avoir à définir leurs fonctions d'appartenance. La représentation de la connaissance de nature incertaine, puis son exploitation, à l'aide de variables linguistiques, est bien plus proche du raisonnement des experts.

## VI - REFERENCES:


[1] **H.Akdag et D.Pacholczyk:** Linguistic management of a knowledge based system using a many-valued logic. *Joint international conference EURO IX - TIMS XXVII - PARIS 1988.*

[2] **H.Akdag et D. Pacholczyk:** Gestion linguistique d'une base de connaissances. *LAFORIA - Rapport interne n° 88/34* .

[3] **H.Akdag et D. Pacholczyk:** Treillis distributifs et degrés de vérité linguistiques. *BUSEFAL-89 n° 37.*

[4] **H.Akdag et D. Pacholczyk:** Incertitude et logique multivalente. Deuxième partie: Application aux systèmes experts. ( *à paraître dans BUSEFAL* ) .

[5] **M. De Glas:** Knowledge representation in a fuzzy setting. (*article soumis à communication* )

[6] **C.Kleene:** Logique mathématique - *Editions J. Gabay 1971.*

[7] **J.Lukasiewicz and A.Tarski:** Untersuchungen über den Aussagen-kalkül.*Comptes-rendus de la société des sciences et lettres de Varsovie Classe III . Vol 23 1930.*

[8] **D.Pacholczyk:**Une logique propositionnelle multivalente et ses théorèmes de complétude.( *en préparation* ).

[9] **J.B. Rosser and A.R. Turquette:**Many-valued logics. *North Holland publishing Company . Amsterdam 1958.*

[10] **E. Trillas and L. Valverde:** On mode and implication in approximate reasoning. *Approximate reasoning in expert systems - Elsevier science publishers. B.V . 1985.*

[11] **L.A. Zadeh:** Fuzzy sets *in : Fuzzy sets and applications: Selected papers by L.A.Zadeh.1987*

[ 12 ] **L.A. Zadeh:** A fuzzy-set-theoretic Interpretation of Linguistic Hedges. *in : Fuzzy sets and applications: Selected papers by L.A.Zadeh.1987*

[ 13 ] **L.A. Zadeh:** The role of fuzzy logic in management of uncertainty in expert systems. *Fuzzy sets and systems 11 - 1983* .