EXISTENCE ET PROPRIETES D'UN OPERATEUR DE MAXIMALISATION

L. BOUR, M. LAMOTTE
C.R.A.N. Université de Nancy I et Institut National Polytechnique.
Unité Associée au CNRS n°821

1-Introduction.

L'opérateur de maximalisation τ associé à une norme triangulaire T, ou opérateur de Pedrycz, dont nous allons ici récapituler ou établir quelques propriétés, se rencontre dans de nombreux articles ([3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] par exemple).

Il a notamment été utilisé dans [1] pour déterminer la solution maximale d'équations de relation floue de la forme $R \circ A = B$ où "$\circ$" désignait une composition sup-T, T étant une norme triangulaire quelconque.

Dans ce qui suit I désignera le segment [0,1].

2-Opérateur de maximalisation associé à une norme triangulaire.

Définition.

On appelle opérateur de maximalisation (ou opérateur de Pedrycz) associé à une norme triangulaire T toute application $\tau : I^2 \to I$ telle que, pour tout $(a,b,c) \in I^3$,

$$a \,\tau\, b \leq c \,\tau\, b \quad \text{si } a \leq c \tag{1}$$

$$T(a,b) \,\tau\, b \geq a \tag{2}$$

$$T(a \,\tau\, b, b) \leq a \tag{3}$$

D'après (1) et (2), $a \geq b$ implique $a \,\tau\, b \geq b \,\tau\, b = T(1,b) \,\tau\, b = 1$ et, d'après (3), $a \,\tau\, b = 1$ implique $T(a \,\tau\, b, b) = b \leq a$ d'où la propriété suivante:

Proposition 1

Si τ existe alors $a \,\tau\, b = 1$ si et seulement si $a \geq b$.

Exemple 1. Si $T_1(a,b) = \min(a,b)$ alors l'opérateur τ_1 défini par

$$a \,\tau_1\, b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq b \\ a & \text{si } a < b \end{cases}$$

est un opérateur de maximalisation associé à T_1.

Remarque. En permutant le rôle de a et b, c'est à dire en définissant τ par les trois conditions

$$a \,\tau\, b \leq a \,\tau\, c \quad \text{si } b \leq c \tag{1'}$$

$$T(a,b) \,\tau\, a \geq b \tag{2'}$$

$$T(a \,\tau\, b, a) \leq b \tag{3'}$$

on retrouve la définition de l'opérateur τ donnée dans [6] par Pedrycz et alors τ_1 n'est autre que l'opérateur de Sanchez α défini par

$$a \, \alpha \, b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases}$$

Toutes les propriétés qui suivent s'adaptent aisément à la définition de τ par les relations (1'), (2'),(3').

<u>Exemple 2.</u> Si $T_2(a,b) = ab$ alors l'opérateur τ_2 défini par

$$a \, \tau_2 \, b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq b \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } a < b \end{cases}$$

vérifie les conditions (1), (2) et (3).

Mais un opérateur de maximalisation τ associé à une norme triangulaire T n'existe pas nécessairement. Ainsi la norme triangulaire T définie par

$$T(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a \neq 1 \text{ et } b \neq 1 \end{cases}$$

ne peut admettre un tel opérateur τ car, si celui-ci existait on aurait, pour tout a et b appartenant à $[0,1[$,

$$a \leq T(a,b) \, \tau \, b = 0 \, \tau \, b$$

donc on aurait $0 \, \tau \, b = 1$, ce qui est impossible, d'après la proposition 1.

<u>Proposition 2</u>

Si la norme triangulaire T admet un opérateur de maximalisation τ alors celui-ci est unique.

S'il existe deux opérateurs de maximalisation distincts τ_1 et τ_2 associés à T alors il existe a et b appartenant à I tels que $a \, \tau_1 \, b \neq a \, \tau_2 \, b$.

Supposons par exemple $a \, \tau_1 \, b < a \, \tau_2 \, b$; alors pour $c \in \,] \, a \, \tau_1 \, b, a \, \tau_2 \, b \,]$ il vient, d'après (3)

$$T(c,b) \leq T(a \, \tau_2 \, b, b) \leq a$$

puis, en utilisant (1) et (2),

$$c \leq T(c,b) \, \tau_1 \, b \leq a \, \tau_1 \, b < c$$

ce qui est impossible, donc $a \, \tau_1 \, b = a \, \tau_2 \, b$ pour tout $(a,b) \in I^2$.

3-Condition suffisante d'existence d'un opérateur de maximalisation.

L'opérateur τ associé à une norme triangulaire T permet d'obtenir la plus grande solution d'une inéquation.

Lemme 1

> Si T admet un opérateur de maximalisation τ alors
> $$T(x,b) \le a \Leftrightarrow x \le a\,\tau\, b$$

Si $x \le a\,\tau\, b$ alors, d'après (3), $T(x,b) \le T(a\,\tau\, b,b) \le a$.

Si on suppose qu'il existe x_0 tel que

$$T(x_0,b) \le a \quad \text{et} \quad x_0 > a\,\tau\, b$$

alors on a, d'après (1) et (2),

$$x_0 > a\,\tau\, b \ge T(x_0,b)\,\tau\, b \ge x_0$$

ce qui est impossible. Donc $a\,\tau\, b$ est bien la plus grande solution de l'inéquation $T(x,b) \le a$.

Proposition 3.

> Soit $a \vee b = \sup\{\, x \in I \mid T(x,b) \le a \,\}$.
> Pour que la norme triangulaire T admette un opérateur de maximalisation τ il faut et il suffit que
> $$T(a \vee b,b) \le a \qquad (4)$$

* $a \le c$ implique $a \vee b \le c \vee b$ car

$$\{\, x \mid T(x,b) \le c \,\} \supset \{\, x \mid T(x,b) \le a \,\},$$

* $a \le T(a,b) \vee b$ car $a \in \{\, x \mid T(x,b) \le T(a,b) \,\}$.
* Si de plus, $T(a \vee b,b) \le a$ alors $\vee$ est un opérateur de maximalisation associé à T et, d'après l'unicité d'un tel opérateur, $a\,\tau\, b = a \vee b$.

Réciproquement, si τ existe alors, d'après le lemme 1, $a\,\tau\, b = a \vee b$ et donc on a bien, d'après (3), $T(a \vee b,b) \le a$.

La condition (4) est vérifiée en particulier si, pour tout $b \in I$, l'application $x \to T(x,b)$ est continue sur I. D'où le corollaire suivant:

Corollaire

> Pour qu'une norme triangulaire T admette un opérateur de maximalisation τ il suffit que T vérifie la condition de continuité:
> $$\forall b \in I,\ x \to T(x,b) \text{ est continue sur } I \qquad (5)$$

On retrouve dans ce cas l'opérateur α_T de Miyakoshi, défini dans [5].

Remarque: La norme triangulaire T_3 définie par

$$T_3(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a+b-1 \le 0 \\ \min(a,b) & \text{si } a+b-1 > 0 \end{cases}$$

ne vérifie pas la condition de continuité (5) mais admet un opérateur de maximalisation τ_3 car $T_3(a \vee b,b) \le a$. On obtient ainsi

$$a\,\tau_3\,b = a \vee b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq b \\ a & \text{si } 1\text{-}b \leq a < b \\ 1\text{-}b & \text{si } a < \min(b,1\text{-}b) \end{cases}$$

Proposition 4.

Si la norme triangulaire T admet un opérateur de maximalisation τ alors T(a,b) est la plus petite solution de l'inéquation

$$x\,\tau\,b \geq a$$

où a et b sont donnés dans I.

D'après (2), T(a,b) est solution de l'inéquation. Si cette inéquation admettait une solution x_0 telle que $x_0 < T(a,b)$ on aurait, d'après la propriété de croissance de T et la propriété (3),

$$x_0 < T(a,b) \leq T(x_0\,\tau\,b,b) \leq x_0$$

ce qui est impossible.

Autrement dit,

$$T(a,b) = \inf\{x \in I \mid x\,\tau\,b \geq a\}$$

pour toute norme triangulaire T admettant un opérateur de maximalisation τ.

4-Propriétés de l'opérateur τ.

Proposition 5

$$a\,\tau\,b \geq a \qquad (6)$$

$$a\,\tau\,1 = a \qquad (7)$$

$$1\,\tau\,a = 1 \qquad (8)$$

$$T_1 \leq T_2 \Rightarrow \tau_1 \geq \tau_2 \qquad (9)$$

(6) est vérifié car $a \leq T(a,b)\,\tau\,b \leq a\,\tau\,b$.

De même $a\,\tau\,1 = a$ car $a \leq T(a,1)\,\tau\,1 = a\,\tau\,1 = T(a\,\tau\,1,1) \leq a$

et (8) est un cas particulier de la proposition 1.

Enfin $T_1(a\,\tau_2\,b,b) \leq T_2(a\,\tau_2\,b,b) \leq a$ donc $a\,\tau_2\,b \leq a\,\tau_1\,b$, par application du lemme 1. (τ_1 et τ_2 désignent les opérateurs de maximalisation associés à T_1 et T_2 respectivement, $T_1 \leq T_2$ et $\tau_1 \geq \tau_2$ signifie

$$\forall (a,b) \in I^2,\ T_1(a,b) \leq T_2(a,b),\ a\,\tau_1\,b \geq a\,\tau_2\,b.)$$

Proposition 6

Quel que soit $(a,b,c) \in I^3$

$$(a\,\tau\,b)\,\tau\,c = (a\,\tau\,c)\,\tau\,b = a\,\tau\,T(b,c) \qquad (10)$$

Démonstration: Il suffit de montrer que $(a\,\tau\,b)\,\tau\,c = a\,\tau\,T(b,c)$ puisque $T(b,c) = T(c,b)$.

* $T((a\,\tau\,b)\,\tau\,c,T(b,c)) = T(T((a\,\tau\,b)\,\tau\,c,c),b) \leq T(a\,\tau\,b,b) \leq a$ d'après (3) et les

propriétés de T donc,d'après le lemme 1,

$$(a\,\tau\,b)\,\tau\,c \leq a\,\tau\,T(b,c).$$

* $T(a\,\tau\,T(b,c),T(b,c)) \leq a$ d'après (3) et $T(a\,\tau\,T(b,c),T(b,c)) = T(T(a\,\tau\,T(b,c),c),b)$ d'où, par applications du lemme 1,

$$T(a\,\tau\,T(b,c),c) \leq a\,\tau\,b \quad \text{et} \quad a\,\tau\,T(b,c) \leq (a\,\tau\,b)\,\tau\,c.$$

<u>Proposition 7</u>

$$\left|\begin{array}{ll} T(a\,\tau\,b,b\,\tau\,c) \leq a\,\tau\,c & (11) \\ T(a,b)\,\tau\,T(b,c) \geq a\,\tau\,c & (12) \end{array}\right.$$

Démonstration:

* $T(T(a\,\tau\,b,b\,\tau\,c),c) = T(a\,\tau\,b,T(b\,\tau\,c,c)) \leq T(a\,\tau\,b,b) \leq a$ d'où la propriété (11) par application du lemme 1.
* $T(a,b)\,\tau\,T(b,c) = (T(a,b)\,\tau\,b)\,\tau\,c \geq a\,\tau\,c$ d'après (10),(2) et (1).

<u>Proposition 8</u>

$$\left|\begin{array}{ll} b \leq c \Rightarrow a\,\tau\,b \geq a\,\tau\,c & (13) \\ b \geq c \Rightarrow T(a\,\tau\,b,c\,\tau\,d) \leq a\,\tau\,d & (14) \\ c \leq a\,\tau\,b \Leftrightarrow b \leq a\,\tau\,c \Leftrightarrow a \geq T(b,c) & (15) \\ a\,\tau\,b \leq (a\,\tau\,c)\,\tau\,(b\,\tau\,c) & (16) \\ a\,\tau\,b \leq (c\,\tau\,b)\,\tau\,(c\,\tau\,a) & (16') \\ a \geq \min(b,c) \Rightarrow a\,\tau\,(b\,\tau\,c) \geq c & (17) \\ a\,\tau\,(a\,\tau\,c) \geq c & (18) \\ T(a\,\tau\,b,c) \leq a\,\tau\,(b\,\tau\,c) & (19) \\ a\,\tau\,(a\,\tau\,(a\,\tau\,b)) = a\,\tau\,b & (20) \end{array}\right.$$

Démonstration.

* $b \leq c \Rightarrow T(a\,\tau\,c,b) \leq T(a\,\tau\,c,c) \leq a$ d'où (13) par application du lemme 1.
* $b \geq c \Rightarrow a\,\tau\,b \leq a\,\tau\,c \Rightarrow T(a\,\tau\,b,c\,\tau\,d) \leq T(a\,\tau\,c,c\,\tau\,d) \leq a\,\tau\,d$ par application de (13) et (11).
* Par application de la proposition 1 et de (10),

$c \leq a\,\tau\,b \Leftrightarrow (a\,\tau\,b)\,\tau\,c = 1 = (a\,\tau\,c)\,\tau\,b = a\,\tau\,T(b,c)$ d'où la propriété (15).

* Par application de (11) et du lemme 1,

$T(a\,\tau\,b,b\,\tau\,c) \leq a\,\tau\,c \Rightarrow a\,\tau\,b \leq (a\,\tau\,c)\,\tau\,(b\,\tau\,c)$ et $(b\,\tau\,c) \leq (a\,\tau\,c)\,\tau\,(a\,\tau\,b)$ d'où (16) et (16').

* $T(b\,\tau\,c,c) \leq T(1,c) = c$ et $T(b\,\tau\,c,c) \leq b$ d'après (3) donc $T(b\,\tau\,c,c) \leq \min(b,c) \leq a$ et $c \leq a\,\tau\,(b\,\tau\,c)$ par application du lemme 1.
* (18) est un cas particulier de (17).

* $T(a\,\tau\,b,c) \le T(a\,\tau\,b, b\,\tau\,(b\,\tau\,c)) \le a\,\tau\,(b\,\tau\,c)$ par application de (18) et (11). D'où la propriété (19).
* Enfin, par application de (18) et (13) on obtient $a\,\tau\,b \ge a\,\tau\,(a\,\tau\,(a\,\tau\,b))$
et, par application de (18), $a\,\tau\,b \le a\,\tau\,(a\,\tau\,(a\,\tau\,b))$, d'où la relation (20).

5-Cas où T est continue.

Proposition 9

> Si T vérifie la condition de continuité (5) alors τ existe et
> i) $T(a\,\tau\,b,b) = \min(a,b)$ (21)
> ii) l'application $x \to x\,\tau\,b$ est strictement croissante sur $[0,b]$ (22)

Démonstration:
Si $a \ge b$, $T(a\,\tau\,b,b) = T(1,b) = b = \min(a,b)$
Si $a < b$, $T(a\,\tau\,b,b) \le a$ d'après (3); supposons $T(a\,\tau\,b,b) < a$. Alors, puisque la condition (5) est vérifiée, il existe $x_0 \in [0,1[$ tel que $T(x_0,b) = a$
et $a = T(x_0,b) \le T(T(x_0,b)\,\tau\,b,b) = T(a\,\tau\,b,b) < a$.
C'est impossible donc $T(a\,\tau\,b,b) = a = \min(a,b)$.
La propriété (22) est immédiate en utilisant (21); pour $x_1 < x_2 \le b$ on a $x_1 \tau\, b \le x_2 \tau\, b$ d'après (1), et $x_1\,\tau\,b = x_2\,\tau\,b$ est impossible car sinon
$T(x_1\,\tau\,b,b) = x_1 = T(x_2\,\tau\,b,b) = x_2$.

Proposition 10

> Si la norme triangulaire T admet un générateur additif f alors l'opérateur τ associé à T est défini par
> $$a\,\tau\,b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \ge b \\ f^{-1}(f(a) - f(b)) & \text{si } a < b \end{cases}$$

Rappelons qu'une norme triangulaire admettant un générateur additif f est définie par
$$T(a,b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b))$$
où f est une application continue strictement décroissante de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$ ou de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

Dans le premier cas T est dite stricte et $f^{(-1)} = f^{-1}$, dans le deuxième cas T est dite non stricte et
$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
T admettant un générateur additif f vérifie la condition (5) donc

$$T(a\,\tau\, b,b) = \min(a,b) = f^{(-1)}(f(a\,\tau\, b) + f(b))$$

Pour $0 < a < b$, $f^{(-1)}(f(a\,\tau\, b) + f(b)) = a \neq 0$

donc $f^{(-1)} = f^{-1}$ et $a\,\tau\, b = f^{-1}(f(a) - f(b))$.

Pour $a = 0$, $b > 0$, si T est stricte on a encore, en posant $f(0) = +\infty$ et $f^{-1}(+\infty) = 0$

$$0\,\tau\, b = f^{-1}(f(0) - f(b))$$

Si T n'est pas stricte

$$f^{(-1)}(f(0\,\tau\, b) + f(b)) = 0 \text{ implique } f(0\,\tau\, b) + f(b) \geq 1$$

c'est à dire $0\,\tau\, b \leq f^{-1}(1 - f(b))$.

Si on pose $f^{-1}(1-f(b)) = c$, on a $T(c,b) = 0$ et, en supposant $0\,\tau\, b < c$,

$$0\,\tau\, b < c \leq T(c,b)\,\tau\, b = 0\,\tau\, b$$

ce qui est impossible. Donc nécessairement $0\,\tau\, b = f^{-1}(1 - f(b))$ et la proposition 10 est bien vérifiée pour tout $(a,b) \in I^2$.

6-Norme triangulaire associée à un opérateur θ.

Dans la proposition 3 a été établie une condition permettant d'associer, à toute norme triangulaire T donnée vérifiant (4), un opérateur de maximalisation τ.

Réciproquement il est possible d'associer à un opérateur θ vérifiant certaines propriétés une norme triangulaire.

Soit $\theta : I^2 \to I$ un opérateur vérifiant pour tout a, b, c $\in$ I,

i) $a \leq c \Rightarrow a\,\theta\, b \leq c\,\theta\, b$

ii) $a\,\theta\, b = 1 \Leftrightarrow a \geq b$

iii) $(a\,\theta\, b)\,\theta\, c = (a\,\theta\, c)\,\theta\, b$

et posons $a\,\lambda\, b = \inf\{x \in I \mid x\,\theta\, b \geq a\}$.

<u>Proposition 11.</u>

Si, pour tout a, b, c $\in$ I,

$(a\,\lambda\, b)\,\theta\, b \geq a$ (23)

alors λ est une norme triangulaire.

Démonstration.

L'opérateur λ est une norme triangulaire si, pour tout a, b, c $\in$ I, il vérifie les cinq propriétés suivantes:

(λ - 1) $a\,\lambda\, b = b\,\lambda\, a$

(λ - 2) $0\,\lambda\, b = 0$

(λ - 3) $1\,\lambda\, b = b$

(λ - 4) $a \leq c \Rightarrow a\,\lambda\, b \leq c\,\lambda\, b$

(λ - 5) $(a\,\lambda\, b)\,\lambda\, c = a\,\lambda\, (b\,\lambda\, c)$.

* La propriété de commutativité (λ - 1) est bien vérifiée car

$x \,\theta\, b \geq a \Leftrightarrow (x \,\theta\, b) \,\theta\, a = 1 \Leftrightarrow (x \,\theta\, a) \,\theta\, b = 1 \Leftrightarrow x \,\theta\, a \geq b$.

* D'après la définition de θ on a $0 \,\theta\, b \geq 0$ donc $\inf\{x \in I \mid x \,\theta\, b \geq 0\} = 0$, ce qui démontre ($\lambda$ - 2).

* De même, puisque $\{x \in I \mid x \,\theta\, b = 1\} = \{x \mid x \geq b\}$,

$1 \,\lambda\, b = \inf\{x \in I \mid x \,\theta\, b = 1\} = b$.

* Si $a \leq c$ alors

$\{x \mid x \,\theta\, b \geq a\} \supset \{x \mid x \,\theta\, b \geq c\}$ et $\inf\{x \in I \mid x \,\theta\, b \geq a\} \leq \inf\{x \in I \mid x \,\theta\, b \geq c\}$, ce qui démontre ($\lambda$ - 4).

* Posons $E_1 = \{x \in I \mid x \,\theta\, c \geq a \,\lambda\, b\}$ et $E_2 = \{x \in I \mid x \,\theta\, a \geq b \,\lambda\, c\}$.

Pour établir (λ - 5) il suffit de montrer que $E_1 = E_2$.

$x \in E_1 \Leftrightarrow x \,\theta\, c \geq a \,\lambda\, b \Rightarrow (x \,\theta\, c) \,\theta\, a \geq (a \,\lambda\, b) \,\theta\, a \Leftrightarrow (x \,\theta\, a) \,\theta\, c \geq (b \,\lambda\, a) \,\theta\, a$

et, d'après (23), $(b \,\lambda\, a) \,\theta\, a \geq b$

d'où $(x \,\theta\, a) \,\theta\, c \geq b \Rightarrow x \,\theta\, a \geq b \,\lambda\, c \Leftrightarrow x \in E_2$, donc $E_2 \supset E_1$.

De même on montrerait que $E_1 \supset E_2$.

Remarque: La condition (23) est en particulier réalisée si, pour tout $b \in I$, l'application $x \rightarrow x \,\theta\, b$ est continue sur I.

Références.

[1] L. Bour, M. Lamotte, Détermination d'un opérateur de maximalisation pour la résolution d'équations de relations floues, Busefal 25 (1986) 95-106.

[2] L. Bour, M. Lamotte, Solutions minimales d'équations de relations floues avec la composition max-norme triangulaire, Busefal 31 (1987) 24-31.

[3] J. Drewniak, Fuzzy relation equations and inequalities, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 237-247.

[4] H. Hashimoto, Subinverses of fuzzy matrices, Fuzzy Sets and Systems 12 (1984) 155-168.

[5] M. Miyakoshi, M. Shimbo, Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms, Fuzzy Sets and Systems 16 (1985) 53-63.

[6] W. Pedrycz, Fuzzy relational equations with generalized connectives and their applications, Fuzzy Sets and Systems 10 (1983) 185-201.

[7] E. Sanchez, Solution of fuzzy equations with extended operations, Fuzzy Sets and Systems 12 (1984) 237-248.

[8] E.W. Shi, A BCK algebraic characteristic of the fuzzy inverse operator, Fuzzy Sets and Systems 23 (1987) 387-391.

[9] S. Weber, A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms, Fuzzy Sets and Systems 11 (1983) 115-134.