TREILLIS DISTRIBUTIFS ET DEGRES DE VERITE LINGUISTIQUES

H.AKDAG (*) (**) & D.PACHOLCZYK(*)(**)

(*) LAFORIA: Equipe "Logiques de l'incertitude".Université de Paris VI
(**) LERI: Université de Reims.

Dans les travaux sur le Raisonnement Approximatif, il est souvent question, sous diverses formes, de variables linguistiques. Des termes comme "réellement", "pas vraiment", "franchement", "plutôt", "très", sont fréquemment utilisés. Ces valeurs linguistiques essaient de représenter les connaissances incertaines de l'expert afin de construire et d'exploiter une base de connaissances.

Dans ce travail, nous proposons l'utilisation de degrés de vérités linguistiques dans un contexte de logique multivalente. En effet, l'expert raisonne plus naturellement à l'aide de degrés de vérité linguistiques que "numériques" et se ramène toujours, en pratique, à un nombre fini de valeurs linguistiques pour exprimer sa connaissance incertaine. Chacune d'elles correspond à la fois à un degré de vérité et à son incertitude sur ce degré. En d'autres termes, comme nous allons le voir plus loin tout degré de vérité linguistique correspond à un intervalle de confiance.

I. <u>RAPPELS SUR LES TREILLIS</u>. [2]

Dans ce paragraphe, nous allons définir une structure algébrique permettant de traiter les connaissances incertaines de l'expert.

I.1 <u>*Ensembles ordonnés,chaînes.*</u>

Un ensemble ordonné E est un ensemble muni d' une relation d'ordre, notée θ. vérifiant les propriétés suivantes:

1° Réflexivité: $\forall a \in E \quad a\,\theta\, a$

2° Transitivité: $\forall (a,b,c) \in E^3 \quad a\,\theta\, b$ et $b\,\theta\, c$ entraînent $a\,\theta\, c$

3° Antisymétrie: $\forall(a,b,c) \in E^3$ $a\,\boldsymbol{\theta}\,b$ et $b\,\boldsymbol{\theta}\,a$ entraînent $a = b$

Nous utiliserons le plus souvent la notation $a \leq b$, qui se lit : a avant b ou a précède b, ou a inférieur ou égal à b. On peut aussi écrire $b \leq a$.

Deux éléments pour lesquels on a : $a \leq b$ ou $b \leq a$ sont dits comparables.

Si a et b ne sont pas comparables,on notera: $a \parallel b$.

La notation $a < b$ veut dire $a \leq b$ et $a \neq b$,.il s' agit d' une relation d'ordre strict.

Dans un ensemble ordonné, la négation de $a < b$ est donc:

$$\{ b \leq a \text{ ou } a \parallel b \}.$$

Si pour tout couple (a, b) d' éléments de E, on a $a \leq b$ ou $b \leq a$, l'ensemble est dit totalement ordonné ou une chaîne.

Il est commode de représenter la relation $a < b$ par un arc orienté (a,b):

$$\underset{a}{\cdot} \longrightarrow \underset{b}{\cdot}$$

Dans un ensemble ordonné, on appelle:

élément nul ou plus petit élément, un élément noté 0 tel que : $\forall x \in E$, $0 \leq x$; un tel élément est nécessairement unique.

élément universel ou plus grand élément, un élément noté 1 tel que: $\forall x \in E$, $x \leq 1$, Cet élément est, lui aussi, nécessairement unique.

Pour un sous-ensemble A de E, pouvant éventuellement coïncider avec E, on appelle:

élément majorant de A un élément s de E tel que : $\forall x \in A$, $x \leq s$.

élément maximum de A un élément **m** de A tel que : $\forall x \in A$, $x \leq \mathbf{m}$.

Si A possède un élément maximum, cet élément est un majorant, et c'est le plus petit des majorants de A.

élément minorant de A un élément t de E tel que : $\forall x \in A$, $t \leq x$.

élément minimum de A un élément m de A tel que: $\forall x \in A$, $m \leq x$.

Si A admet un élément minimum, c' est un minorant, et c' est le plus petit minorant de A.

I.2. Les Treillis.

Définition 1: Un sup demi-treillis est un ensemble ordonné, dans lequel deux éléments quelconques a et b admettent toujours un plus petit majorant que nous appellerons borne supérieure et que nous désignerons par sup(a,b).

Propriété 1: *Dans un sup demi-treillis tout sous-ensemble fini admet un plus petit majorant.*

Définition 2: Un inf-demi treillis est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments a et b quelconques admettent toujours un plus grand minorant que nous appellerons borne inférieure et que nous désignerons par inf(a,b).

Propriété 2: *Dans un inf demi-treillis tout sous-ensemble fini admet un plus grand minorant.*

Définition 3: Un treillis est un ensemble ordonné qui est à la fois un inf et un sup demi-treillis.

Propriété 3: *Tout sous-ensemble fini d'un treillis est borné.*

Propriété 4: *Un ensemble ordonné isomorphe à un treillis est un treillis.*

Dans un treillis T, on peut associer à tout couple d' éléments a et b les éléments de T suivants: inf(a,b) et sup(a,b); donc définir deux lois de composition internes que nous notons avec les signes d' opérations $\wedge$ et $\vee$:

$$a \wedge b = \inf(a,b)$$
$$a \vee b = \sup(a,b)$$

Ces deux opérations sont:

I. Idempotentes: $\forall a \in T \quad a \wedge a = a \quad a \vee a = a$

II. Commutatives: $\forall (a,b) \in T^2 \quad a \wedge b = b \wedge a \quad a \vee b = b \vee a$

III. Associatives: $\forall (a,b,c) \in T^3$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = \inf(a,b,c)$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = \sup(a,b,c)$$

Elles sont liées par les lois d'absorption:

IV. $\forall (a,b) \in T^2 \; a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a$

Remarque: $a \leq b$ est équivalent à $a \wedge b = a$ ou $a \vee b = b$

Définition 4 : On appelle treillis distributif T un treillis dans lequel chacune des deux opérations $\wedge$ et $\vee$ est distributive par rapport à l' autre.

V. $\forall (a,b,c) \in T^3 \qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

VI. $\forall (a,b,c) \in T^3 \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Remarque: On vérifie sans peine qu'une chaîne est un treillis distributif.

Propriété 5: *Les relations V et VI ne sont pas indépendantes: chacune d' elles entraîne l'autre.*

Nous allons maintenant passer en revue une famille de treillis distributifs.

II. ETUDE D' UNE FAMILLE DE TREILLIS.

Soient la chaîne T_4 composée de quatre éléments:

$$\underset{p_1}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_2}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_3}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_4}{\cdot}$$

ou la chaîne T_5 composée de cinq éléments:

$$\underset{p_1}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_2}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_3}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_4}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_5}{\cdot}$$

ou la chaîne T_{11} composée d' onze éléments:

$$\underset{p_1}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_2}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_3}{\cdot} \longrightarrow \cdots\cdots\cdots \underset{}{\cdot} \longrightarrow \underset{p_{11}}{\cdot}$$

avec $\leq$,$\vee$(max),$\wedge$(min) et une négation : $neg(p_i)=p_{M+1-i}$ (avec M l'indice du plus grand élément du treillis).

Remarque: Si $a < b$ alors $neg(a) > neg(b)$.

Proposition 1: *La négation qu'on vient de définir vérifie les lois de Morgan à savoir:* $\quad neg(a \vee b) = neg(a) \wedge neg(b)$

$\qquad neg(a \wedge b) = neg(a) \vee neg(b)$

Démonstration:

Il suffit de démontrer la première règle.

a) Si $a < b$ alors $neg(a \vee b)=neg(b)=neg(a) \wedge neg(b)=neg(b)$
en vertu de la remarque.

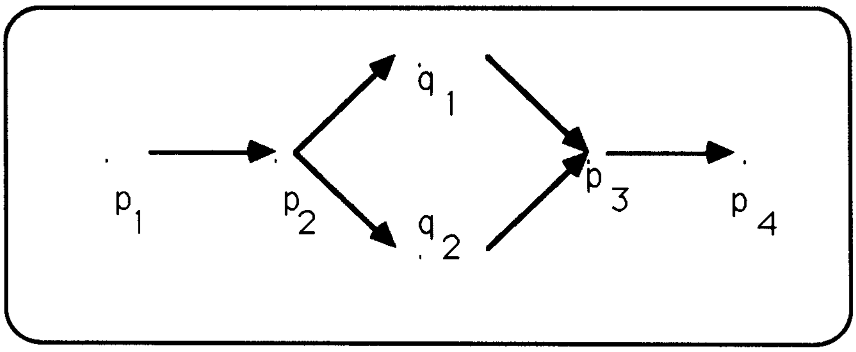
b) Si $a > b$ alors $neg(a \vee b)=neg(a)=neg(a) \wedge neg(b)=neg(a)$

c) Si $a=b$ c'est évident.

Comme on sait qu'une chaîne est un treillis distributif,on peut énoncer:

<u>Théorème 1</u>: *T_4, T_5, T_{11} munis de $\{\leq, \wedge, \vee, neg\}$ sont des treillis distributifs vérifiant les lois de Morgan.*

Soit maintenant l' ensemble ordonné T_6 composé de six éléments dont deux incomparables entre eux.



avec:

$neg(p_i)=p_{5-i} \; i \in [1,4]$

$neg(q_1)=q_1$

$neg(q_2)=q_2$

Nous pouvons remarquer que tous les couples d'éléments sont comparables sauf q_1 et q_2

Nous allons définir les opérateurs logiques $\wedge$(ET) et $\vee$(OU) de la manière suivante:

Soient a, b deux éléments de l'ensemble ordonné T_6. Il existe toujours un ensemble $\mathbf{M}$ des majorants de a et b et un ensemble m des minorants de a et de b. (On peut aisément le vérifier sur le graphe.)

$\mathbf{M}(a,b)=\{z \in T_6 \mid a \leq z \text{ et } b \leq z\}$

$m\,(a,b)=\{z \in T_6 \mid a \geq z \text{ et } b \geq z\}$

L'opérateur $\vee$ est défini de la manière suivante:

$a \vee b= \min(\mathbf{M}(a,b))$

En effet, soient $\{a,b\} \in T_6{}^2$

Deux cas peuvent se présenter:

1) a et b sont comparables:

$a \vee b = a \quad$ si $a>b$

$a \vee b = b \quad$ si $b>a$

2) a et b ne sont pas comparables:

C'est plus précisément le cas du couple (q_1, q_2). Dans ce cas, on remarque que l'ensemble des majorants de l'un (sauf lui-même) est égal à l'ensemble des majorants de l'autre (sauf lui-même) et que par conséquent:

$$q_1 \vee q_2 = p_3$$

ce qui nous permet d'énoncer:

Proposition 2: *T_6 est un sup demi-treillis*

Nous pouvons définir l'opérateur $\wedge$:

$a \wedge b = \max(\boldsymbol{m}\,(a,b))$

avec $a \wedge b = a$ si $a<b$

$a \wedge b = b$ si $b<a$.

$q_1 \wedge q_2 = p_2$

et nous pouvons énoncer:

Proposition 3: *T6 est inf demi-treillis.*

Ces deux dernières propositions entraînent:

Proposition 4: *(T6,≤,∧,∨,neg) est un treillis.*

Proposition 5: *La négation qu'on vient de définir vérifie les lois de Morgan.*

Démonstration:

Il suffit de démontrer la première loi.

a) Si a et b sont comparables, alors se reporter à la démonstration de la proposition 1.

b) Si $a \| b$:

Alors $neg(q_1 \vee q_2) = neg(p_3) = p_2$

$neg(q_1) \wedge neg(q_2) = q_1 \wedge q_2 = p_2$ CQFD

Proposition 6: *(T6,≤,∧,∨,neg) est un treillis distributif.*

Démonstration:

En effet, il suffit de démontrer que:

$\forall\,(a,b,c) \in T6^3$

on a: $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

Trois cas principaux peuvent se présenter:

a) $a = b = c$ c'est trivial.

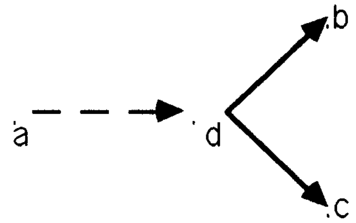
b) Deux des trois éléments sont égaux : on vérifie aisément que c'est vrai.

c) Ils sont tous les trois distincts.

c1) S' ils sont tous les trois comparables, cela revient à prouver la distributivité d' une chaîne. (déjà vu) c2) Dans le cas contraire,trois cas de figures sont possibles:

α) a est comparable à b et c($b \| c$):

Si $a<b$ et $a<c$:

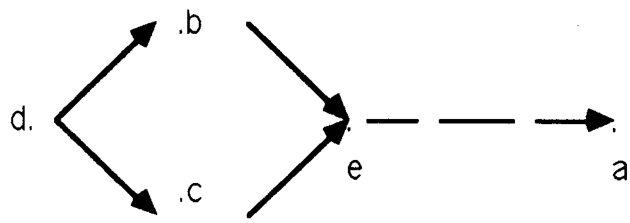


(les points a et d($b \wedge c$) peuvent être confondus).

Alors l' égalité devient:

$b \wedge c = a \vee (b \wedge c) = b \wedge c$

Si $a>b$ et $a>c$:



(les points e($b \vee c$) et a peuvent être confondus).

Alors l'égalité devient:

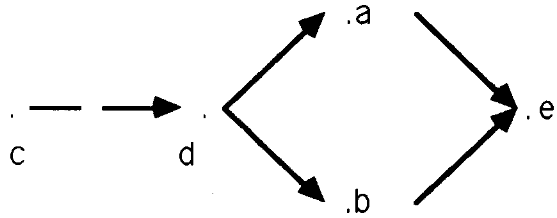
$a \wedge c = c = c \vee (b \wedge c\ ) = c$

β) b est comparable à a et c($a \| c$):

c' est vrai par commutativité.

γ) c est comparable à a et b($b \| a$):

Si $c<a$ et $c<b$

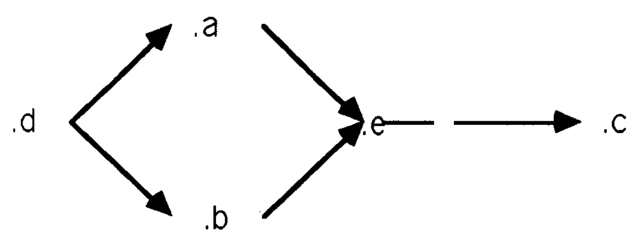


(les points c et d($a \wedge b$) peuvent être confondus).

Alors l'égalité devient:

$(a \vee b) \wedge c = c = c \vee c = c$

Si c>a et c>b



(les points c et e($a \vee b$) peuvent être confondus).

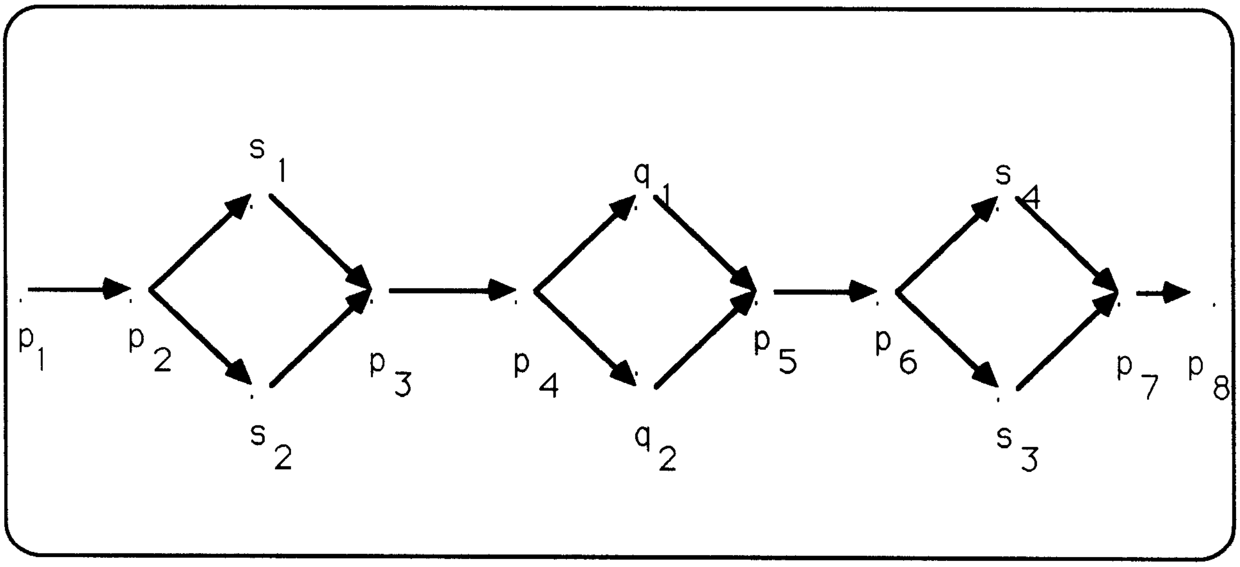
Alors l'égalité devient:

$(a \vee b) \wedge c = a \vee b = a \vee b$ CQFD

Nous pouvons énoncer:

Théorème 2: *(T6,≤,∧,∨,neg) est un treillis distributif vérifiant les lois de Morgan.*

Soit maintenant l'ensemble ordonné T_{14}:



avec :

$neg(p_i) = p_{9-i}$ $i \in [1,8]$

$neg(s_i) = s_{5-i}$ $i \in [1,4]$

$neg(q_1) = q_1$

$neg(q_2) = q_2$

Nous pouvons, de la même manière que pour T_6, définir,une opération $\wedge$ et une opération $\vee$ et arriver au résultat suivant:

Proposition 7 : *(T_{14},≤,∧,∨,neg) est un treillis distributif.*

Les démarches et les démonstrations (sauf pour la proposition 5) sont absolument identiques, avec, en particulier:

$s_1 \wedge s_2 = p_2$ $q_1 \wedge q_2 = p_4$ $s_3 \wedge s_4 = p_6$

$s_1 \vee s_2 = p_3$ $q_1 \vee q_2 = p_5$ $s_3 \vee s_4 = p_7$

De même que:

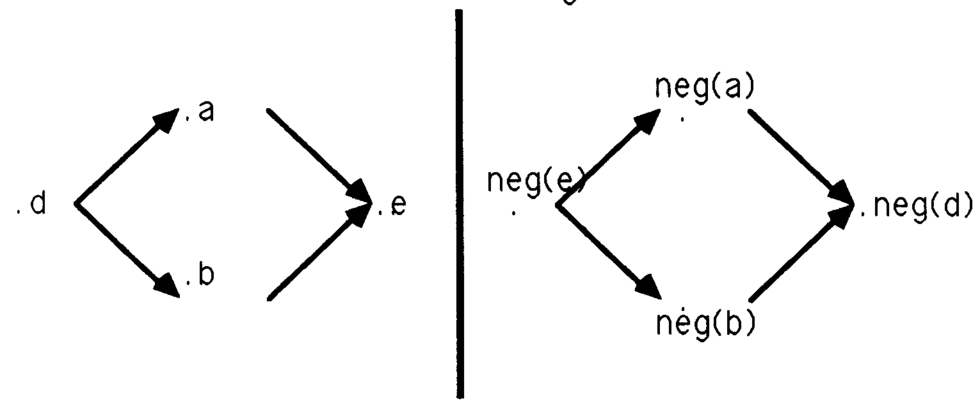
<u>Proposition 8</u> : *La négation qu'on vient de définir pour T_{14} vérifie les lois de Morgan.*

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer la première loi.

α)Si a et b sont comparables, alors se reporter à la démonstration de la proposition 5.

β)Si a||b:

On a forcément ces cas de figures:



On vérifie sur le schéma les deux lois de Morgan à la fois. Notons que les deux figures se confondent lorsque a = q_1 ou q_2

CQFD

Nous pouvons donc énoncer:

<u>Théorème 2bis</u>: *$(T_{14},\leq,\wedge,\vee,neg)$ est un treillis distributif vérifiant les lois de Morgan.*

Tous les treillis que nous venons d' étudier sont donc distributifs et vérifient les lois de Morgan. On pourrait faire la démarche inverse, c'est-à-dire commencer par étudier le T_{14}, et en déduire le T_{11}, le T_6, le T_5 et le T_4 comme cas particuliers.

Ces treillis constituent des outils de qualité pour travailler dans le cadre d' une logique multivalente.

III. <u>**APPLICATION AUX DEGRES DE VERITE LINGUISTIQUES.**</u>

Soit un ensemble totalement ordonné noté [0,1] et muni d' une involution décroissante ¬.

Définissons dans $[0,1]$ un ensemble fini T d' intervalles $[a,b]$ vérifiant les propriétés suivantes:

a) $\cup[a,b]=[0,1]$

b) $[0,0] \in T$ et $[1,1] \in T$

c) $[a,b] \in T \Rightarrow [\neg b,\neg a] \in T$

d) $\{[\max(a,c),\max(b,d)] \in T$ et $[\min(a,c),\min(b,d)] \in T\}$

Soit la relation d'ordre $\leq$:

$\{[a,b]\leq[c,d]\} \Leftrightarrow \{a\leq c$ et $b\leq d\}$

On sait que $\{T,\leq\}$ est un treillis. On peut introduire des opérateurs $\cup$ et $\cap$

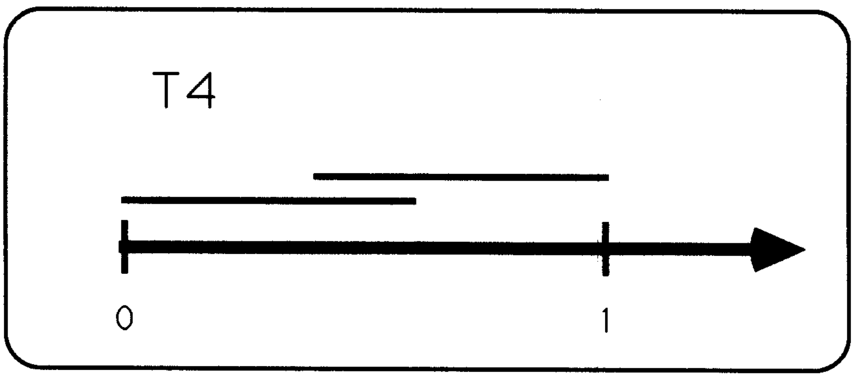
$[a,b] \cup [c,d] = [\max(a,c),\max(b,d)]$

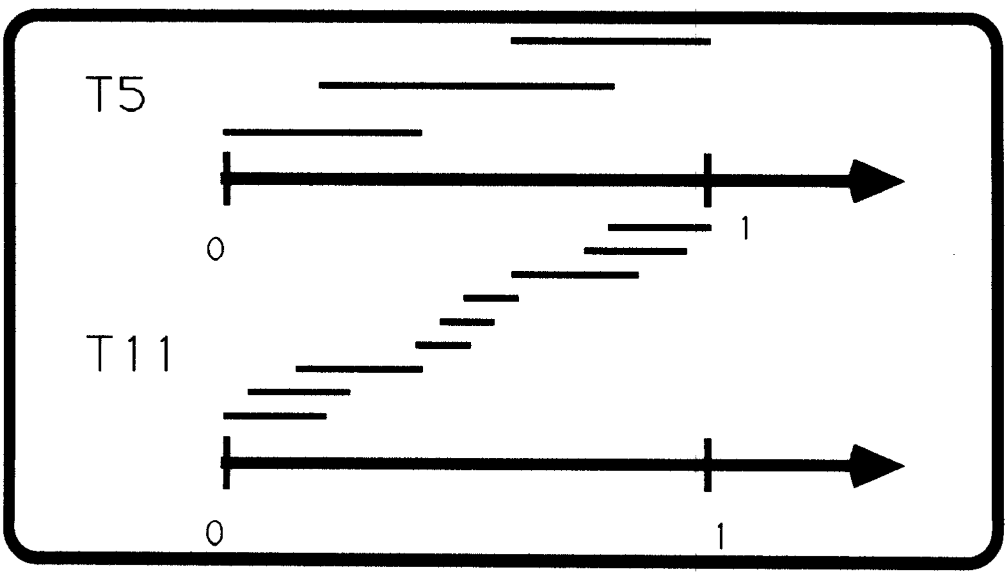
$[a,b] \cap [c,d] = [\min(a,c),\min(b,d)]$

et une négation forte notée $\boldsymbol{n}$,telle que $\boldsymbol{n}[a,b]=[1-b,1-a]$.

$\{T,\leq,\cup,\cap,\boldsymbol{n}\}$ est un treillis vérifiant les lois de Morgan. Il est possible de choisir T de telle sorte que $\{T,\leq,\cup,\cap,\boldsymbol{n}\}$ soit un treillis distributif.

<u>Exemples</u>:





Dans un autre papier[1], on fait remarquer que les éléments de T, vus comme éléments de [0,1], peuvent être considérés comme des degrés de vérité auxquels on peut associer bijectivement des degrés de vérités linguistiques.

Soit L l'ensemble de ces valeurs linguistiques.

$L=\{\tau_\alpha, \alpha=1,M\}$

On peut induire dans L la même structure que dans le treillis T (Treillis distributif vérifiant les lois de Morgan).

Au treillis T_4 nous associons le treillis L_4 des degrés de vérité linguistiques:

T_4	L_4
p_1	Faux
p_2	Plutôt faux
p_3	Plutôt vrai
p_4	Vrai

Par la suite, pour des raisons terminologiques, nous allons utiliser les termes "tout-à-fait faux" et "tout-à-fait vrai" pour désigner "faux" et "vrai".

Au treillis T_5,nous associons le treillis L_5.

T_5	L_5
p_1	Tout-à-fait faux
p_2	Plutôt faux
p_3	Moyennement vrai
p_4	Plutôt vrai
p_5	Tout-à-fait vrai

Au treillis T_{11} nous associons le treillis L_{11}[1].

On a noté:

$L_M=\{\tau_\alpha, \alpha=1,M\}$ (M=2,5,11 par exemple)

Posons $neg(\alpha)=M+1-\alpha$

On a alors dans $\{L_M,\leq,\vee,\wedge,\neg\}$ les relations suivantes:

1) $\tau_\alpha\leq\tau_\beta \Leftrightarrow \alpha\leq\beta$

2) $\neg\tau_\beta=\tau_{neg(\beta)}$

3) $\tau_\alpha \vee \tau_\beta = \tau_{max(\alpha,\beta)}$

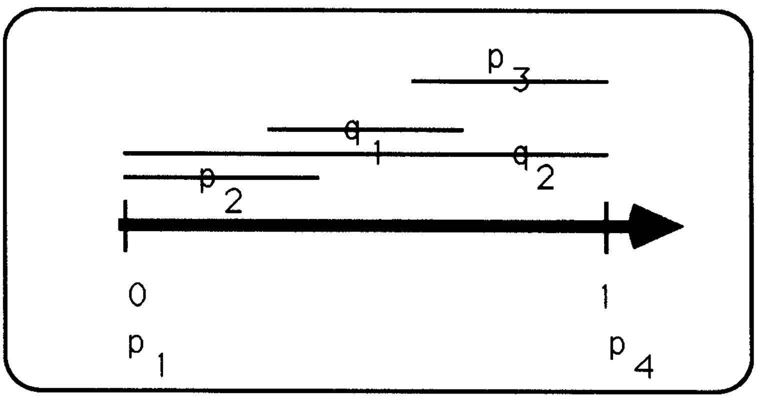
4) $\tau_\alpha \wedge \tau_\beta = \tau_{min(\alpha,\beta)}$

L' utilisation des degrés de vérité nous permet de nous placer, comme nous le verrons dans un autre papier[1], dans des logiques multivalentes.

L'étude des treillis précédemment étudiés T_6 et T_{14} nous permet d'avoir deux ensembles L_6 et L_{14} où dans chaque paire d'éléments incomparables, il y en a un qui constitue la réunion ensembliste de l' autre élément incomparable et de ces deux voisins immédiats.

<u>Exemple</u>: Soit T_6 (paragraphe II)

On peut le représenter graphiquement:



Donc,T_6 diffère de T_5 par l'ajout d'un sixième terme qui en fait est la réunion au sens ensembliste des trois termes centraux de T_5.

On peut proposer:

T_6	L_6
p_1	Tout-à-fait faux
p_2	Plutôt faux
q_1	Moyennement vrai
q_2	Indéterminé
p_3	Plutôt vrai
p_4	Tout-à-fait vrai

Il est facile de voir que T_{14} diffère de T_{11} par l'ajout de trois termes dont chacun représente la réunion ensembliste de trois termes de T_{11} (les trois premiers à partir du deuxième,les trois centraux,les trois suivants).

T_{14}	L_{14}
p_1	Tout-à-fait faux
p_2	Franchement très faux
s_1	Très faux
s_2	Moins que moyennement faux
p_3	Assez faux
p_4	Plutôt faux
q_1	Moyennement vrai
q_2	Indéterminé
p_5	Plutôt vrai
p_6	Assez vrai
s_4	Très vrai
s_3	Plus que moyennement vrai
p_7	Franchement très vrai
p_8	Tout-à-fait vrai

IV. APPLICATIONS AUX SYSTEMES A BASE DE CONNAISSANCES.

L'utilisation des degrés de vérité linguistiques est, en effet, une approche très naturelle du raisonnement de l' expert.

Suivant la complexité du problème, l' expert va choisir le nombre de degrés de vérité qu'il aura à utiliser pour représenter sa connaissance incertaine. Notons que T_5, T_6, T_{11} et T_{14} ne sont que des exemples. Il est facile de les généraliser à savoir:

- une première famille de treillis qui contiennent tous des chaînes.
- une deuxième famille de treillis (de type T_6, T_{14}) , qui contiennent un nombre impair de couples d'éléments non comparables.

Outre le nombre de degrés de vérité, l' expert pourra également choisir les incertitudes sur les degrés de vérité, c' est-à-dire définir les plages de valeurs dans [0,1] pour chacun des degrés de vérité.

Il est possible de choisir les plages de valeurs de telle sorte que ces treillis soient distributifs et vérifient les lois de Morgan.

Remarquons qu'un cas particulier de ces treillis est T_2 qui est composé de deux valeurs: le vrai et le faux. C' est le treillis de Boole qu' on utilise dans les cas où la notion d'incertitude n' existe pas.

Le choix du nombre de degrés de vérité dépend de la complexité du problème et de la capacité de l' expert à représenter les incertitudes liées au problème.

Ainsi, par exemple, un expert travaillant dans la détection des pannes préfère utiliser 4, 5, ou 6 degrés de vérité. Dans le cadre des travaux sur la logique floue, des exemples d' utilisation de 5 et 9 valeurs linguistiques, ne constituant pas du tout une structure algébrique bien définie, ont été rencontrés dans la construction empirique des Systèmes Experts traitant des applications médicales [3]. On peut donc remarquer qu'un médecin préfère utiliser 5 ou 9 degrés de vérité pour exprimer sa connaissance.

De même, un enseignant évaluant les capacités d' un étudiant préfère avoir 11 ou 14 degrés de vérité[1].

Une base de connaissance comprendra, par exemple, des faits du type:

"Le patient a des douleurs rythmées dans la journée" est **très vrai.**

ou des règles du type:

Si "Le patient a des douleurs rythmées dans la journée" est **moyennement vrai.**
et "les douleurs sont situées dans la région dorsale basse" est **assez vrai.**
et "les douleurs sont calmées par les aliments" est **franchement très vrai.**
Alors "le patient souffre de douleurs ulcéreuses" est **assez vrai.**

On trouvera dans [1] toutes les techniques sur la représentation et l'exploitation des connaissances incertaines dans un système à base de connaissances.

V. CONCLUSION.

Nous venons de définir des ensembles de degrés de vérité linguistiques ,qui ont, chacun, la particularité d'être des treillis distributifs vérifiant les lois de Morgan.

L'utilisation de ces degrés de vérité linguistiques,vont nous permettre de gérer une base de connaissances dans le contexte d'une logique multivalente utilisant des valeurs de vérité linguistiques[1].

REFERENCES:

[1]:AKDAG,H. & PACHOLCZYK,D. Gestion linguistique d'une base de connaissances.Rapport interne du LAFORIA,Octobre 1988.
[2]:DUBREIL,P. & DUBREIL-JACOTIN,M.L. Leçons d'algèbre moderne.DUNOD, Paris 1964
[3]:LOPEZ DE MANTARAS,R. et autres. MILORD: An expert system building tool with approximate reasonning, in Fuzzy Logic in Knowledge Engineering,1986.