Josette COULON, Jean-Louis COULON
Université Claude Bernard (Lyon I)
Institut de Mathématiques
Batiment Doyen Jean Braconnier (101)
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 - VILLEURBANNE Cedex (France)

JTF** comme categorie d'algèbres pour un certain triple *

1. La catégorie de base.

$\mathscr{C}$ est la catégorie ayant pour objets les (X,σ) où X est un ensemble non vide et σ une application de X^2 dans J telle que $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ et $\sigma(x,y) \wedge \sigma(y,z) \leq \sigma(x,z)$. [Notons $\alpha_\sigma(x) = \sigma(x,x)$] et ayant pour morphismes de (X,σ) dans (Y,τ) les applications R de X dans Y telles que $\alpha_\tau[R(x)] = \alpha_\sigma(x)$ et $\sigma(x,y) \leq \tau[R(x), R(y)]$. Cette catégorie a été envisagée par U.Höhle (cf. [4]) et par U.Cerruti (cf. [2]).

2. Triple considéré sur la catégorie $\mathscr{C}$.

Nous allons définir un triple $T = (T,\eta,\mu)$ sur la catégorie $\mathscr{C}$ de la façon suivante : (on utilisera, concernant les triples, les notations de M.Barr, C.Wells (cf. [1]) et de Manes (cf. [5]).

Définition de T.

$T(X,\sigma) = (X^+, \sigma^+)$, où X^+ est l'ensemble des $c(i,x)$ avec : $x \in X$, $i \in J$, $i \leq \alpha_\sigma(x)$ et $c(i,x)$ est la classe d'équivalence de (i,x) pour l'équivalence : $(i,x) \sim (j,y) \Leftrightarrow i = j \leq \sigma(x,y)$, et où σ^+ est l'application de $(X^+)^2$ dans J définie par : $\sigma^+[c(i,x), c(j,y)] = i \wedge j \wedge \sigma(x,y)$.
En particulier : $\sigma^+[c(i,x), c(i,x)] = i$.

Si R est un morphisme de (X,σ) dans (Y,τ), $T(R)$ est le morphisme de (X^+, σ^+) dans (Y^+, τ^+) défini par $T(R)[c(i,x)] = c[i,R(x)]$.

Il est facile de vérifier que T est un endofoncteur de la catégorie $\mathscr{C}$.

Définition de η.

η est la transformation naturelle de $1_{\mathscr{C}}$ dans T définie par : $\eta_{(X,\sigma)}[x] = c[\alpha_\sigma(x),x]$ (on notera plus simplement $\eta(x) = c[\alpha_\sigma(x),x]$.

* N.B. Nous remercions U.Höhle de nous avoir indiqué cette approche.

Définition de μ.

μ est la transformation naturelle de T^2 dans T définie par :
$\mu_{(X,\sigma)}[c(j, c(i,x)] = c(j,x)$ (on notera plus simplement $\mu[c(j, c(i,x))] = c(j,x)$.
On vérifie aisément la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu_T"] \arrow[d, "T(\mu)"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "="'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T(\eta)"'] \arrow[dl, "="] \\ & T & \end{tikzcd}$$

3. Catégorie de Kleisli associée.

Soit $\mathscr{C}(T)$ la catégorie de Kleisli associée.

$\mathscr{C}(T)$ a pour objets ceux de $\mathscr{C}$. Les morphismes de (X,σ) vers (Y,τ) sont ceux, au sens de $\mathscr{C}$, de (X,σ) vers (Y^+, τ^+), avec la clone-composition (notée $\circ$) : $\psi \circ \phi = \mu_Z T(\psi)\, \phi$ (morphisme composé, au sens de $\mathscr{C}$, de μ_Z, ϕ et $T(\psi)$). Donc, si $\phi(x) = c(i,y)$, et si $\psi(y) = c(j,z)$, alors : $(\psi \circ \phi)(x) = c(i,z)$.

PROPOSITION 1.

$\mathscr{C}(T)$ est isomorphe à la catégorie JTF de D.Ponasse (cf. [6]).

Preuve.

(a). Soit **F** le foncteur de $\mathscr{C}(T)$ dans JTF défini par : $\mathbf{F}(X,\sigma) = (X,\sigma)$.

Si ϕ est un $\mathscr{C}(T)$-morphisme de (X,σ) dans (Y,τ), $\mathbf{F}(\phi)$ est la relation de X vers Y définie par : $x\ \mathbf{F}(\phi)\ y \Leftrightarrow \phi(x) = c[\alpha_\sigma(x), y]$.

Il est facile de voir que c'est un morphisme (au sens de D.Ponasse), et que $\mathbf{F}(\psi \circ \phi) = \mathbf{F}(\psi) \circ \mathbf{F}(\phi)$, ce dernier composé étant pris au sens de JTF.

D'abord, si $\phi(x) = c(i,y)$, alors $y \in \mathbf{F}(\phi)\ x$.
Si $x\ \mathbf{F}(\phi)\ y$ et $x'\ \mathbf{F}(\phi)\ y'$, $\sigma(x,x') \leq \sigma^+[\phi(x), \phi(x')] \leq \tau(y,y')$
Si $x\ \mathbf{F}(\phi)\ y$ et $\alpha_\sigma(x) \leq \tau(y,z)$, $\phi(x) = c[\alpha_\sigma(x), z]$, et $x\ \mathbf{F}(\phi)\ z$.

D'autre part, si $x\ \mathbf{F}(\psi \circ \phi)\ z$, il existe un élément y de Y tel que :
$\phi(x) = c(i,y)$ et $\psi(y) = c(j,z)$; alors : $x\ \mathbf{F}(\phi)\ y$ et $y\ \mathbf{F}(\psi)\ z$, et donc :
$x\ \mathbf{F}(\psi)\ \mathbf{F}(\phi)\ z$; et, si $x\ \mathbf{F}(\phi)\ y$, $y\ \mathbf{F}(\psi)\ z^+$, $\alpha_\sigma(x) \leq \rho(z,z^+)$, $(\psi \circ \phi)(x) = c(i,z^+)$, et comme $c(i,z^+) = c(i,z)$, $(\psi \circ \phi)(x) = c(i,z)$.

(b). On définit un foncteur **G** de JTF dans $\mathscr{C}(T)$ par : $\mathbf{G}(X,\sigma) = (X,\sigma)$.

Si S est un morphisme, au sens de D.Ponasse, de (X,σ) dans (Y,τ), $\mathbf{G}(S)$ est le morphisme, au sens de $\mathscr{C}(T)$, défini par $\mathbf{G}(S)\,(x) = c[\alpha_\sigma(x), y]$, où $x\ S\ y$. Cela a bien un sens, car si $x\ S\ y$ et $x\ S\ y'$, $c[\alpha_\sigma(x), y] = c[\alpha_\sigma(x), y']$.

Il est facile de voir que $\mathbf{G}(S)$ est bien un morphisme de (X,σ) dans (Y,τ), au sens de $\mathscr{C}(T)$, puisque :
$x\ S\ y$ et $x'\ S\ y' \Rightarrow \sigma(x,x') \leq \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(x') \wedge \tau(y,y') = \tau^+[c[\alpha_\sigma(x),y], c[\alpha_\sigma(x'),y']$.

D'autre part, si TS est le composé de S avec T au sens de D.Ponasse, $\mathbf{G}(TS)\,(x) = c[\alpha_\sigma(x), z]$, où x TS z ; alors que : $\mathbf{G}(T) \circ \mathbf{G}(S)\,(x) = c[\alpha_\sigma(x), z^+]$, où $x\ S\ y$ et $y\ T\ z^+$. On voit facilement que c'est la même chose.

$(\mathbf{F},\mathbf{G})$ définit un isomorphisme de catégorie entre $\mathscr{C}(T)$ et JTF.

4. Catégorie des algèbres associées à ce triple

PROPOSITION 2.

$\mathscr{C}^T$, catégorie des algèbres associées au triple T, est isomorphe à la catégorie JTF°°.

<u>Rappelons d'abord quelques définitions :</u>

Une T-algèbre est un $[(X,\sigma), \xi]$, où :

(1). ξ est un morphisme de (X^+, σ^+) dans (X,σ) ;
donc : $\sigma[\xi[c(i,x)], \xi[c(i,x)]] = i$, et $i \wedge j \wedge \sigma(x,y) \leq \sigma[\xi[c(i,x)], \xi[c(j,y)]]$.

(2). On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & X^+ \arrow[d, "\xi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

donc : $\xi[c[\alpha_\sigma(x), x]] = x$.

(3). On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X^{++} \arrow[r, "T(\xi)"] \arrow[d, "\mu_X"'] & X^+ \arrow[d, "\xi"] \\ X^+ \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd}$$

donc : $\xi[c[k, \xi[c(i,x)]]] = \xi[c(k,x)]$.

Un T-homomorphisme R de $((X,\sigma), \xi)$ dans $((Y,\tau), \eta)$ est un morphisme de (X,σ) dans (Y,τ) tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X^+ \arrow[r, "T(R)"] \arrow[d, "\xi"] & Y^+ \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "R"'] & Y \end{tikzcd}$$

donc : $R[\xi[c(i,x)]] = \eta[c[i, R(x)]]$.

Preuve de la proposition 2.

(a). Soit **M** le foncteur de JTF°° dans $\mathscr{C}^T$ déifni par :
$\mathbf{M}(X,\sigma) = [(X,\sigma), \xi]$, où : $\xi[c(i,x)] = x|_i$, ce qui a un sens, car :
$c(i,x) = c(i,y) \Rightarrow x|_i = y|_i$. $\mathbf{M}(R) = R$.

(b). Soit **N** le foncteur de $\mathscr{C}^T$ dans JTF°° défini par :
$\mathbf{N}[(X,\sigma), \xi] = (X,\sigma)$. C'est bien un objet de JTF°°, car :
$\sigma(x,y) = \alpha_\sigma(x) = \alpha_\sigma(y) \Rightarrow c[\alpha_\sigma(x), x] = c[\alpha_\sigma(y), y)] \Rightarrow \ldots\ldots$
$\xi[c[\alpha_\sigma(x), x]] = \xi[c[\alpha_\sigma(y), y]] \Rightarrow x = y$,
et d'autre part si $x \in X$, $i \leq \alpha_\sigma(x)$, et $y = \xi[c(i,x)]$:
$\alpha_\sigma(y) = \sigma[\xi[c(i,x)], \xi[c(i,x)]] = i$ et :
$\sigma(y,x) = \sigma[\xi[c(i,x)], \xi[c[\alpha_\sigma(x), x]]] \geq i \wedge \alpha_\sigma(x) = i$, et en fait $\sigma(y,x) = i$.

(c). Il est clair que $(\mathbf{M},\mathbf{N})$ définit un isomorphisme de catégories entre $\mathscr{C}^T$ et JTF°°.

Remarque.

Si $[(X,\sigma), \xi]$ est une T-algèbre, nécessairement : $\xi[c(i,x)] = x|_i$.

□

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. M.BARR, C.WELLS :
Toposes, triples and theories,
GMW, Springer Verlag, 1985.

[2]. U.CERRUTI :
Categories of L-fuzzy relations on L-fuzzy sets,
(Proc. of Acapulco Congress).

[3]. J.COULON, J.L.COULON :
La définition et les propriétés de la catégorie JTF°° se trouvent dans le BUSEFAL n° 21, 23, 24, 26, 29, 30, 31.
Is the category JTF°° a topos ? (à paraître, spécial issue of FSS).
About some categories of totally fuzzy sets (soumis à JMAA).
Weak classifier of monomorphisms in the category JTF°°,
(à paraître dans "Portugaliae Mathematica").

[4]. U.HOHLE :
The category M-set. An algebraic approach to uncertainty,
(Cincinnati, Ohio, Wuppertal, 1986-1987).

[5]. E.G.MANES :
Algebraic theories,
GTM 26, Springer Verlag, 1976.

[6]. D.PONASSE :
Séminaire de Mathématique Floue,
Université de Lyon 1.