EQUATIONS DE RELATIONS FLOUES AVEC LA COMPOSITION CONORME-NORME TRIANGULAIRES

L. BOUR, M. LAMOTTE

C.R.A.N. Université de Nancy I et Institut National Polytechnique.

Unité Associée au CNRS n°821

1-Introduction

I désignant le segment [0,1] , soient $X = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ et $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_p\}$ deux ensembles finis non vides, $F(X) = \{A : X \to I\}$ et $F(Y) = \{ B : Y \to I\}$ les familles d'ensemble flous sur X et Y, F(YxX) l'ensemble des relations floues sur YxX.

Considérons l'équation de relation floue

$$R \circ A = B \qquad (1)$$

où "$\circ$" désigne une composition max-norme triangulaire et où $A \in F(X)$ et $B \in F(Y)$ sont donnés. R étant l'inconnue dans l'équation (1), on désigne par

$$E(M,T) = \{R \mid R \circ A=B,\ R \in F(YxX)\}$$

l'ensemble des solutions de l'équation (1), qui est aussi équivalente au système

$$\begin{cases} \max\limits_{x_j \in X} T(R(y_i,x_j),A(x_j)) = B(y_i) \\ y_i \in Y \end{cases} \qquad (2)$$

en notant T une norme triangulaire quelconque.

Pour simplifier l'écriture, on écrira aussi r_{ij} pour $R(y_i,x_j)$, a_j pour $A(x_j)$, b_i pour $B(y_i)$. On pose $J = \{1,2,\ldots,n\}$, $K = \{1,2,\ldots,p\}$. Ainsi la relation floue R sera représentée par une pxn matrice (r_{ij}), A et B par des matrices colonnes (a_j) et (b_i), ${}^tA$ désignera la transposée de la matrice A.

Il a été établi dans [1] et [2] les résultats suivants:

<u>Proposition</u>

Pour que l'ensemble E(M,T) soit non vide, il faut que:

$$\forall i \in K,\ b_i \le \max_{j \in J} a_j \qquad (3)$$

La condition (3) est suffisante si, pour tout $b \in I$, l'application $x \to T(x,b)$ est continue sur I.

<u>Proposition</u>

Soit T une norme triangulaire telle que, pour tout $b \in I$, l'application $x \to T(x,b)$ soit continue sur I.

Alors, il existe un opérateur τ de I^2 dans I tel que $T(a\, \tau\, b,b) = \min (a,b)$

Cet opérateur τ sera aussi appelé dans la suite opérateur de maximalisation associé à T car ([2]), si E(M,T) n'est pas vide, E(M,T) contient une solution maximale $\check{R} = B \,ⓣ\, {}^tA$.

Par exemple, si $T(a,b) = ab$, $a\tau b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \ge b \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } a<b \end{cases}$

On se propose ici de remplacer la conorme "max" dans la composition "$\circ$" par une conorme triangulaire quelconque S: cette composition conorme-norme triangulaires, qui sera notée "$*$", permettra de déterminer des relations de causalité R qui, agissant sur A, ont pour effet B; en particulier dans des cas où E(M,T) est vide.

La propriété d'associativité d'une conorme permet de noter

$$S(S(x_1,x_2),x_3) = S(x_1,S(x_2,x_3)) \quad \text{par} \quad S(x_1,x_2,x_3)$$

et, plus généralement

$$S(\ldots S(S(S(x_1,x_2),x_3),x_4),\ldots,x_n) \text{ par } S(x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ ou par } \underset{j\in J}{S}(x_j)$$

Avec ces conventions d'écriture, l'équation

$$R*A = B \tag{4}$$

où R est l'inconnue, est équivalente au système

$$\begin{cases} \underset{j\in J}{S}(T(r_{ij},a_j)) = b_i \\ i = K \end{cases} \tag{5}$$

2- Existence de solutions

On désigne par $E(S,T) = \{R \mid R*A = B, R \in F(YxX)\}$ l'ensemble des solutions de l'équation (4).

Théorème 1

> Pour que l'ensemble E(S,T) soit non vide, il faut que
> $$\forall i \in K,\ b_i \le \underset{j\in J}{S}(a_j) \tag{6}$$
> La condition (6) est suffisante si S et T vérifient respectivement les deux conditions suivantes:
> (i) l'application $S:(x,y) \to S(x,y)$ est continue sur I^2, (7)
> (ii) l'application $x \to T(x,b)$ est continue sur I pour tout b de I (8)

La condition (6) est nécessaire car si $R=(r_{ij})$ est un élément de E(S,T), on a

$$T(r_{ij},a_j) \le a_j \quad \text{et} \quad b_i = \underset{j\in J}{S}(T(r_{ij},a_j)) \le \underset{j\in J}{S}(a_j)$$

Si la condition de continuité (7) est vérifiée, alors l'application

$(t_1,t_2,\ldots,t_n) \to \underset{j\in J}{S}(t_j)$ est continue de I^n sur I donc,

$\forall i \in K$, il existe $(t_{i1},t_{i2},\ldots,t_{in}) \le (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ tel que $\underset{j}{S}(t_{ij}) = b_i$

De plus, si la condition (8) est vérifiée, la fonction $x \to T(x,a_j)$ est une application continue de [0,1] sur $[0,a_j]$, donc il existe $r_{ij}\in[0,1]$ tel que $T(r_{ij},a_j)=t_{ij}$.

Donc si les conditions (6), (7), (8) sont vérifiées, l'ensemble E(S,T) n'est pas vide.

Remarque 1. En remplaçant dans le théorème 1 l'inégalité (6) par une inégalité plus restrictive, la condition de continuité (7) peut être supprimée.

Posons $J_1(i) = \{j \in J \mid b_i \le a_j\}$, on a le résultat suivant:

Théorème 2

Pour que l'ensemble E(S,T) soit non vide, il suffit que

i) $\forall\, i \in K,\ J_1(i) \neq \varnothing$

ii) l'application $x \to T(x,b)$ est continue sur I pour tout b de I.

Soit k(i) un élément de $J_1(i)$ supposé non vide; puisque T vérifie la condition (8) elle admet un opérateur de maximalisation τ telle que $T(b\,\tau\, a,a) = \min(b,a)$

Posons

$$\forall i \in K,\ \begin{cases} r_{ij} = 0 & \text{si } j \neq k(i) \\ r_{i,k(i)} = b_i\, \tau\, a_{k(i)} \end{cases} \qquad (9)$$

$$\text{Alors } \begin{cases} T(r_{ij},a_j) = 0 & \text{si } j \neq k(i) \\ T(r_{i,k(i)},a_{k(i)}) = b_i & \text{(puisque } b_i \leq a_{k(i)}) \end{cases}$$

$$\text{donc } \underset{j\in J}{S}\,(T(r_{ij},a_j)) = S(0,b_i) = b_i$$

ce qui montre que la relation R définie par (9) est solution de (4).

Corollaire

Si i) $\forall i \in K, J_1(i) \neq \varnothing$

ii) l'application $x \to T(x,b)$ est continue sur I pour tout $b \in I$

alors, quelles que soient les conormes triangulaires S et S',

$$E(S,T) \cap E(S',T) \neq \varnothing$$

car la relation R définie par (9) appartient à E(S,T) et E(S',T).

Remarque 2 Dans le cas où la conorme S admet un générateur additif g, l'énoncé du théorème 1 peut également être modifié.

Théorème 3

Soit S une conorme triangulaire admettant un générateur additif g. Pour que l'ensemble E(S,T) soit non vide, il faut que

$$\forall i \in K, \quad g(b_i) \leq \sum_{j\in J} g(a_j) \qquad (10)$$

Cette condition est suffisante si T vérifie la propriété (8).

Démonstration.

On a $S(a_1,a_2) = g^{(-1)}(g(a_1) + g(a_2))$ où $g^{(-1)}$ désigne la pseudo-inverse de g.

Premier cas: si S est stricte, c'est à dire si g est une application strictement croissante de [0,1[sur [0,+∞[, alors $g^{(-1)} = g^{-1}$ et

$$S(a_1,a_2,a_3) = S(S(a_1,a_2),a_3) = g^{-1}(g(a_1)+g(a_2)+g(a_3))$$

$$\text{d'où } \underset{j\in J}{S}\,(a_j) = g^{-1}\left(\sum_{j\in J} g(a_j)\right) = g^{(-1)}\left(\sum_{j\in J} g(a_j)\right).$$

Deuxième cas : si S n'est pas stricte, c'est à dire si g est une application strictement croissante et continue de [0,1] sur [0,1], alors $g^{(-1)} = g^{-1}$ sur [0,1[et $g^{(-1)} = 1$ sur [1,+∞[et

$$\begin{aligned} S(a_1,a_2,a_3) &= g^{(-1)}\{g(g^{(-1)}(g(a_1)+g(a_2)))+g(a_3)\} \\ &= g^{(-1)}(g(a_1)+g(a_2)+g(a_3)) \quad \text{si } g(a_1)+g(a_2) < 1 \\ &= 1 = g^{(-1)}(g(a_1)+g(a_2)+g(a_3)) \quad \text{si } g(a_1)+g(a_2) \geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{et, plus généralement, } \underset{j\in J}{S}\,(a_j) = g^{(-1)}\left(\sum_{j\in J} g(a_j)\right)$$

Dans les deux cas, puisque g est croissante,

$b_i \leq \underset{j\in J}{S}(a_j)$ implique $g(b_i) \leq \sum_{j\in J} g(a_j)$ car $g^{(-1)}=g^{-1}$ ou, sinon, $g(b_i) \leq 1 \leq \sum_j g(a_j)$.

La condition (6) implique la condition (10).

Réciproquement, si (10) est vérifié alors, puisque $g^{(-1)}$ est croissante,

$$g^{(-1)}(g(b_i)) = b_i \leq g^{(-1)}\left(\sum_{j\in J} g(a_j)\right) = \underset{j\in J}{S}(a_j)$$

Si S admet un générateur additif g les conditions (6) et (10) sont équivalentes donc, si T vérifie la condition (8) et S la condition (10), $E(S,T) \neq \varnothing$, puisque S est continue.

Remarque 3 Les deux conditions introduites dans la démonstration du théorème 1

$$\begin{cases} \underset{j\in J}{S}(t_{ij}) = b_i \\ (t_{i1},\ldots,t_{in}) \leq (a_1,\ldots,a_n) \end{cases}$$

montrent que si (4) a une solution, alors, en général, celle-ci n'est pas unique, car le choix des t_{ij} n'est pas unique, et a fortiori celui des r_{ij} définis par $t_{ij} = T(r_{ij},a_j)$.

3 Comparaisons de solutions

Deux conormes triangulaires S' et S" sont comparables si

$$\forall\ (x,y) \in I^2,\ \ S'(x,y) \leq S''(x,y).$$

De même pour deux relations R' et R" de F(YxX)

Proposition

> Soient S, S',S" trois conormes comparables telles que $S' \leq S \leq S''$, S étant continue, et soit T une norme triangulaire vérifiant la condition de continuité (8).
> S'il existe deux éléments R' et R" de E(S',T) et E(S",T) respectivement, tels que $R'' \leq R'$, alors il existe $R \in E(S,T)$ tel que $R'' \leq R \leq R'$.

Posons $T(r'_{ij},a_j) = t'_{ij}$, $T(r''_{ij},a_j) = t''_{ij}$:

$r''_{ij} \leq r'_{ij} \Rightarrow t''_{ij} \leq t'_{ij} \quad (\leq a_j)$

On a $b_i = \underset{j\in J}{S'}(t'_{ij}) = \underset{j\in J}{S''}(t''_{ij})$ et, puisque $S' \leq S \leq S''$,

$$\underset{j\in J}{S}(t''_{ij}) \leq \underset{j\in J}{S''}(t''_{ij}) = b_i$$

$$\underset{j\in J}{S}(t'_{ij}) \geq \underset{j\in J}{S'}(t'_{ij}) = b_i$$

donc $b_i \in \left[\underset{j\in J}{S}(t''_{ij}),\ \underset{j\in J}{S}(t'_{ij})\right]$

et, puisque S est continue, il existe $t_{ij} \in [t''_{ij},t'_{ij}]$ tel que $S(t_{ij}) = b_i$.

De plus, la fonction $x \to T(x,a_j)$ est une application continue de [0,1] sur $[0,a_j]$; donc, puisque $t_{ij} \leq a_j$, il existe $r_{ij} \in [0,1]$ tel que $T(r_{ij},a_j)=t_{ij}$ et puisque $T(r''_{ij},a_j) \leq T(r_{ij},a_j) \leq T(r'_{ij},a_j)$, on peut choisir r_{ij} tel que $r''_{ij} \leq r_{ij} \leq r'_{ij}$; ce qui démontre la proposition.

<u>Exemple 1</u> La fonction $x \to g_\beta(x) = -\ln(1-x^\beta)$ engendre, pour $\beta>0$, la conorme triangulaire $S(x,y) = (x^\beta+y^\beta-x^\beta y^\beta)^{1/\beta}$
telle que, par exemple, $S_2(x,y) \leq S_1(x,y) \leq S_{1/2}(x,y)$
Soit ${}^tA = (0.6 \quad 0.4 \quad 0.5)$, $B = (0.748)$, $T(x,y)=\min(x,y)$
L'équation $R \circ A=B$, où "$\circ$" représente l'opération max-min, n'a pas de solution car $b>\max a_j$; mais l'équation $R * A=B$ a des solutions pour les compositions S_2-min, S_1-min et $S_{1/2}$-min, car

$$g_2(b) \cong 0{,}82 \leq \sum_{j=1}^{3} g_2(a_j) \cong 0{,}91$$

$$g_1(b) \cong 1{,}38 \leq \sum_{j=1}^{3} g_1(a_j) \cong 2{,}12$$

$$g_{1/2}(b) \cong 2 \quad \leq \sum_{j=1}^{3} g_{1/2}(a_j) \cong 3{,}72$$

Par exemple, $R_2 = (0.7 \quad 0.5 \quad 0.425) \in E(S_2,\min)$

$R_{1/2} = (0.36 \quad 0.25 \quad 0.105) \in E(S_{1/2},\min)$

On vérifie que $E(S_1,\min)$ contient des éléments compris entre R_2 et $R_{1/2}$ par exemple $R_1 = (0.5 \quad 0.4 \quad 0.16)$.

<u>Remarque 4</u>. Dans le cas où $S(a,b)=\max(a,b)$ et où la norme triangulaire T admet un opérateur de maximalisation τ, l'ensemble $E(M,T)$ des solutions de l'équation (1) contient un élément maximal unique R et des solutions minimales R_m (cf. [1] et [2]).

Cette structure particulière de l'ensemble $E(M,T)$ n'existe plus, en général, pour l'ensemble $E(S,T)$.

<u>Exemple 2</u>
Soit ${}^tA = (0.5 \quad 0.5 \quad 0.5)$ $B = (0.6)$,
$S(x,y)=x+y-xy$ et $T(x,y)=xy$

$E(M,T)=\varnothing$ car $b=0.6 > \max a_j = 0.5$

mais $E(S,T) \neq \varnothing$ car $S(0.5,0.5,0.5)=0.875 > b$
$R=(a \ b \ c)$ est un élément de $E(S,T)$ si $4a+4b+4c-2ab-2ac-2bc+abc=4{,}8$ (10')

Par exemple, $R = (1 \quad 0{,}4 \quad 0\,) \in E(S,T)$.

Soit $R'= (a' b' c')$ un autre élément de $E(S,T)$: puisque a', b' et c' sont liés par la relation (10') il est impossible de trouver ici $R' > R$ ou $R' < R$; si par exemple $a' \geq a$ et $b' \geq b$, nécessairement $c' \leq c$.

Deux éléments quelconques de $E(S,T)$ ne sont pas comparables et $E(S,T)$ ne contient ni élément maximal, ni élément minimal.

4- Résolution de l'équation (4)

Parmi les solutions de (4), on pourra choisir R en fonction d'un critère donné, par exemple, choisir l'une des solutions qui fournit ([3][4][5]):

- une énergie E(R) maximale avec $E(R) = \frac{1}{p.n} \sum_{i,j=1}^{p,n} f(r_{ij})$,

f étant une application croissante de [0,1] sur [0,1] telle que f(0) = 0, f(1) = 1

- ou une entropie H(R) minimale avec $H(R) = \frac{1}{p.n} \sum_{i,j} \Delta(r_{ij})$,

Δ étant une application croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$ telle que $\Delta(x)=\Delta(1-x)$, $\Delta(0)=\Delta(1)=0$

-ou tout autre critère de choix en fonction de la spécificité du problème considéré.

Ainsi, dans l'exemple 2, en choisissant f(x) = x sur [0,1] et $\Delta(x) = x$ sur [0,1/2], E(S,T) contient un élément d'énergie maximale
$R_1=(0.5264 \quad 0.5264 \quad 0.5264)$ avec $E(R_1) = 0.5264$
et six éléments d'entropie minimale
$R_2=(1 \quad 0.4 \quad 0)$ et les cinq autres relations obtenues par permutation des éléments de R_2 avec $H(R_2) = 2/15$.

On se propose ici de donner un algorithme de calcul d'une solution de (4), sans s'imposer une contrainte de choix.

<u>a) Détermination d'un élément de E(S,T)</u>

On veut déterminer une solution R du système

$$\begin{cases} \underset{j\in J}{S}(t_{ij}) = b_i \\ t_{ij} \le a_j \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \underset{j\in J}{S}(a_j) \ge b_i \\ t_{ij} = T(r_{ij},a_j) \\ S \text{ est continue} \\ T \text{ admet un opérateur } \tau \end{cases}$$

*) Si $J_1(i) \neq \emptyset$ quel que soit $i\in K$, alors il existe un j(i) tel que $a_{j(i)}\ge b_i$ et

on pose $\begin{cases} t_{ij} = 0 & \text{si } j\neq j(i) \\ t_{ij(i)}=b_i \end{cases}$ et $\begin{cases} r_{ij} = 0 & \text{si } j\neq j(i) \\ r_{ij(i)}=b_i \,\tau\, a_{j(i)} \end{cases}$

et on a bien $\underset{j\in J}{S}(t_{ij}) = S(0,t_{ij(i)})=b_i$

**) S'il existe $i \in K$ tel que $J_1(i) = \emptyset$, c'est à dire si $\max_{i\in K} b_i > \max_{j\in J} a_j$,

puisque $S(a_1,0,\ldots,0)=a_1<b_i$ et $S(a_1,a_2,\ldots,a_n)\ge b_i$, il existe

$q \in [2,n] \cap \mathbb{N}$ tel que
$S(a_1,\ldots,a_{q-1},0,\ldots,0) < b_i$ et $S(a_1,\ldots,a_{q-1},a_q,0,\ldots,0) \ge b_i$
Si $S(a_1,\ldots,a_q,0,\ldots,0)=b_i$, une solution est donnée par

$$\begin{cases} r_{ij} = b_i \,\tau\, a_j & \text{pour } 1\le j\le q \\ r_{ij} = 0 & \text{pour } j>q \end{cases}$$

Si $S(a_1,\ldots,a_q,0,\ldots,0) > b_i$ posons, pour simplifier l'écriture,

$$S(a_1,\ldots,a_{q-1},x,0,\ldots,0)= S(\underset{1\le j\le q-1}{S}(a_j),x)= s(x)$$

on a $s(0)<b_i<s(a_q)$ et, par raison de continuité, il existe $x^* \in \,]0,a_q[$ tel que

$$s(x^*) = b_i \tag{11}$$

L'équation (11) peut être résolue de manière approchée, par exemple par une méthode de dichotomie: on définit une suite (x_m) par $x_0=0$, $x_1=a_q$, $x2=a_q/2$, et ainsi de suite. Les itérations sont arrêtées lorsque $| s(x_m) - b_i|< \varepsilon$ et on pose $x^*=x_m$.

Une solution de l'équation (4) est alors donnée par

$$\begin{cases} r_{ij} = b_i \,\tau\, a_j = 1 & \text{si } j\le q-1 \\ r_{iq} = x^* \,\tau\, a_q & \\ r_{ij} = 0 & \text{si } j>q \end{cases}$$

<u>Exemple 3</u> ${}^tA=(0.2 \quad 0.7 \quad 0.3 \quad 0.4)$, $B = (0.8)$
$S(x,y)=x+y-xy$, $T(x,y) = xy$

$S(a_1,a_2) = 0.76$, $S(a_1,a_2,a_3) = 0.832 > b=0.8$ donc $E(S,T) \neq\emptyset$
et on pose $s(x) = S(a_1,a_2,x,0) = S(0.76,x)$.

Par la méthode de dichotomie précédente, avec $\varepsilon = 10^{-3}$, on obtient

$x^* \in \,]x_{10},x_9[\, = \,]0.1669 , 0.1675[$

donc $x^*=0.167$ et $x^* \,\tau\, a_3=0.167/0.3\cong 0.557$
Une solution de (4) est donnée par
$R = (1 \quad 1 \quad 0.557 \quad 0)$

<u>b-Cas où la conorme admet une fonction génératrice</u>

Dans le cas où la conorme triangulaire S admet un générateur additif g et où T vérifie la condition de continuité (8), on peut déterminer une solution de (4) par la résolution du système

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} g(t_{ij}) = g(b_i) & (12) \\ t_{ij} = T(r_{ij},a_j) \le a_j & (13) \\ i \in K & \end{cases}$$

Si on pose $\begin{cases} g(t_{ij}) = \lambda_{ij} g(b_i) & (14) \\ \displaystyle\sum_{j\in J} \lambda_{ij} = 1 & \end{cases}$

alors (12) est vérifié.

Pour que (13) soit vérifié il suffit que $g(t_{ij}) \le g(a_j)$, puisque g est croissante, c'est à dire que

$$\lambda_{ij} g(b_i) \le g(a_j) \quad \text{ou} \quad \lambda_{ij} \le \frac{g(a_j)}{g(b_i)}$$

(on peut supposer $g(b_i) \neq 0$, car si $b_i=0$ il existe la solution évidente $r_{ij}=0$ pour tout $j\in J$).

Il est possible de déterminer n coefficients λ_{ij} tels que

$$\sum_{j\in J}\lambda_{ij} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_{ij} \le \frac{g(a_j)}{g(b_i)}$$

car la condition (10) du théorème 3 étant vérifiée,

$$\frac{1}{g(b_i)}\sum_{j\in J} g(a_j) \ge 1$$

D'après (14), $t_{ij} = g^{-1}(\lambda_{ij}g(b_i))$ et on peut choisir

$$r_{ij} = g^{-1}(\lambda_{ij}\, g(b_i))\ \tau\ a_j \quad \text{car} \quad T(\alpha\ \tau\ \beta,\beta) = \min(\alpha,\beta)$$

<u>Exemple 4</u> ${}^tA = (0.5 \quad 0.5)$ ${}^tB = (0.6 \quad 0.7)$
$S(x,y) = x+y-xy$, $g(x) = -\ln(1-x)$
$T(x,y) = xy$, $g^{-1}(x) = 1-e^{-x}$
$x\ \tau\ y = x/y$ si $x<y$, 1 si $x\ge y$

$$\frac{g(a_1)}{g(b_1)} = \frac{g(a_2)}{g(b_1)} = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,4)} \cong 0,756$$

$$\frac{g(a_1)}{g(b_2)} = \frac{g(a_2)}{g(b_2)} = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,3)} \cong 0,576$$

On peut, par exemple choisir $\lambda_{ij} = 1/2$ pour tout (i,j) et, puisque

$$r_{ij} = \frac{1-(1-b_i)^{\lambda_{ij}}}{a_j}$$

on obtient la solution $R = \begin{pmatrix} 0,735 & 0,735 \\ 0,905 & 0,905 \end{pmatrix}$

5-Conclusion

L'utilisation de la composition S-T au lieu de la composition M-T (où M désigne la conorme triangulaire max), indépendamment du fait qu'elle peut être susceptible de fournir des solutions à une équation de relation floue lorsque l'ensemble des solutions est vide avec la composition M-T, semble moins intéressante car l'ensemble des solutions E(S,T) n'a pas la structure remarquable de l'ensemble E(M,T) qui, sous réserve d'une hypothèse sur T, contient une solution maximale, des solutions minimales et une solution remarquable ([1] et [2]) qui permettent de définir tous ses éléments.

De plus la résolution de (4) est moins aisée que la résolution de (1).

Mais le choix d'une conorme triangulaire S autre que M peut se justifier par le critère de décision que l'on veut privilégier: les égalités

$$\underset{j\in J}{M}(t_{ij}) = \underset{j\in J}{S}(t'_{ij}) = b_i$$

montrent, puisque $M \le S$, que le choix de M, s'il est possible, est plus judicieux si on recherche des relations d'énergie maximale.

Par contre, le choix de S pourra fournir des solutions d'entropie plus petite, ainsi que le montre l'exemple suivant.

Exemple 5

Considérons les équations $R \circ A = B$ et $R * A = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \end{pmatrix} \qquad B = (0,4)$$

$$T_\alpha(a,b) = \frac{ab}{\max(a,b,\alpha)} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{(norme triangulaire de Dubois-Prade)}$$

$S(a,b) = \min(1,a+b)$.

$$\text{Pour } T_\alpha \text{ on a ([2]) } a \,\tau\, b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq 1 \\ \frac{a}{b}\max(b,\alpha) & \text{si } a < b \end{cases}$$

et $E(M,T)$ a pour élément maximal $\check{R} = B \textcircled{\tau} A = (1 \;\; 0.5)$ et pour élément minimal unique $\hat{R} = (0 \;\; 0.5)$.

Ainsi tout élément $R = (r_1 \;\; r_2)$ de $E(M,T)$ vérifie $\hat{R} \leq R \leq \check{R}$ donc $R = (r_1 \;\; 0.5)$ avec $r_1 \in [0,1]$.

En utilisant la fonction Δ définie au paragraphe 4, on constate que tout élément de $E(M,T)$ a une entropie supérieure ou égale à 0.25.

La conorme triangulaire S ayant pour générateur additif $g(x)=x$ on obtient, en appliquant la méthode du paragraphe 4-b, des éléments de $E(S,T)$ de la forme (r_1,r_2) avec

$$r_1=(0.4\lambda_1)\,\tau\, 0.2 \quad , \quad r_2=(0.4\lambda_2)\,\tau\, 0.6 \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Par exemple, pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$ on obtient l'élément $R = (1 \;\; 0.25)$ de $E(S,T)$, d'entropie 0.125 plus faible que l'entropie d'un élément quelconque de $E(M,T)$.

Références

[1] L. Bour, M. Lamotte Solutions minimales d'équations de relations floues avec la composition max-norme triangulaire. BUSEFAL 31 (1987) pp. 24-31

[2] L. Bour et al. Détermination d'un opérateur de maximalisation pour la résolution d'équations de relations floues. BUSEFAL 25 (1986) pp.95-106

[3] A. Di Nola On functionals measuring the fuzziness of solutions in relational equations. Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) pp. 249-258

[4] A. Di Nola and S. Sessa On measures of fuzziness of solutions of composite fuzzy relation equations, Proceedings of IX IFAC Symposium, Marseille (1983), pp. 275-279.

[5] A. Kaufmann Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, tome I. ed Masson 1973.