Etude théorique et pratique de méthodes de démonstration automatique en environnement incertain et/ou imprécis

- Situation d'un projet de recherche -

Didier DUBOIS - Jérome LANG - Henri PRADE

Laboratoire Langages et Systèmes Informatiques

Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne
F-31062 TOULOUSE Cédex

Résumé

Le but de ce projet est l'extension et l'implémentation de méthodes pour la prise en compte de l'incertitude et de l'imprécision des connaissances dans le cadre de la démonstration automatique, et à plus long terme dans celui de la programmation logique. Le caractère approximatif des connaissances humaines justifie l'intérêt de telles méthodes.

Le modèle choisi pour représenter l'incertitude et l'imprécision est la théorie des possibilités. Il s'agit d'implémenter l'approche proposée (et de chercher pour cela des stratégies efficaces), de généraliser certaines des propriétés du principe de résolution classique, et de faire le lien avec d'autres approches.

Mots clés

Incertitude et imprécision, démonstration automatique, théorie des possibilités, principe de résolution.

1. Situation actuelle du sujet de recherche

Le sujet de recherche s'inscrit dans un double contexte, à savoir :

- la démonstration automatique de théorèmes
- la représentation de connaissances incertaines ou imprécises.

En ce qui concerne la démonstration automatique (Chang et Lee [1]), l'approche retenue pour notre travail est le principe de résolution (Robinson [15]). Il s'agit donc de trouver un modèle de représentation de l'incertitude dans lequel le principe de résolution est facilement généralisable, c'est-à-dire conserve des propriétés intéressantes.

En ce qui concerne la représentation de l'incertain, l'approche retenue est la théorie des possibilités (Zadeh [17], Dubois et Prade [3]). Elle présente, par rapport à d'autres modèles, les avantages suivants :

- capacité de représentation de l'ignorance partielle ou totale (non représentable avec des probabilités).
- capacité de représenter l'incertitude aussi bien que l'imprécision.
- c'est un modèle mathématique axiomatisé (par opposition à des modèles empiriques utilisés dans certains systèmes experts).
- le principe de résolution est facilement généralisable et conserve des propriétés intéressantes, comme nous allons le voir par la suite.
- c'est une approche numérique , qui permet donc d'exprimer que certaines connaissances sont plus incertaines que d'autres et de prendre en compte le caractère éventuellement vague de prédicats.
- il est enfin à noter que la probabilité d'un événement est toujours comprise entre sa nécessité et sa possibilité.

Nous nous plaçons dans un contexte démonstration automatique (dans lequel peu de méthodes de prise en compte de l'incertitude et de l'imprécision ont été étudiées), qui offre des capacités de représentation, plus grandes que celles des systèmes experts à règles de production (dans lesquels maintes méthodes de prise en compte de l'incertitude et de l'imprécision existent déjà).

Esquissons une brève revue des travaux existants.

- Démonstration automatique en environnement probabiliste (Nilsson [14]). Nilsson propose une logique du premier ordre dans laquelle les formules sont valuées par des probabilités, et donne une méthode permettant, à partir des probabilités de chacune des hypothèses, de calculer un encadrement de la probabilité d'une conclusion. La méthode proposée par Nilsson n'utilise pas le principe de résolution et exige une quantité importante de calculs si le nombre d'hypothèses est grand. Il existe néanmoins un principe de résolution probabiliste (non utilisé par l'auteur), mais il n'est pas complet, dans la mesure où son emploi répété ne garantit pas l'obtention du meilleur encadrement de la probabilité d'une conclusion.

- Des approches ont été faites avec des modèles non numériques; par exemple, Duval et Kodratoff [6] ont tenté une approche basée sur des modulations linguistiques; la modulation associée à une preuve est alors une concaténation structurée des modulations élémentaires et la modulation finale associée à une conclusion est la combinaison des modulations des différentes preuves de cette conclusion.

L'interprétation de ces combinaisons de modulations semble ardue et n'a pas reçue de solution à ce jour.

- D'autres auteurs ont proposé des "Prolog flous" : Ishizuka et Kanai [9], Mukaidono et col. [13] , Hinde [8], Martin et col. [12], basés en partie sur [11]. Ces approches sont différentes de la nôtre car non clairement fondées sur la théorie des possibilités (bien que traitant en général de prédicats vagues et d'incertitude, d'où un problème d'interprétation des nombres).

2. Travaux et publications de l'équipe sur le sujet.

L'équipe a d'abord proposé une extension du principe de résolution à des clauses plus ou moins certaines (valuées en terme de mesure de nécessité) dans le cadre de la théorie des possibilités; un démonstrateur de théorèmes fondé sur cette première extension a été programmé en Le_Lisp; récemment, une deuxième extension a été proposée (pour prendre en compte des clauses plus ou moins possiblement vraies), ainsi qu'une généralisation permettant de traiter cette fois des prédicats vagues.

Ces travaux ont donné lieu a plusieurs publications :

- "Necessity measures and the resolution principle" [4]
- "Theorem proving under uncertainty" [2]
- "Resolution principles in possibilistic logic" [5]

L'état des recherches est le suivant :

La règle de résolution classique (ou encore règle de coupure) pour clauses propositionnelles

$$(1) \qquad \frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \vee r \end{array}}{q \vee r}$$

se généralise en

$$(2) \qquad \frac{\begin{array}{c} N(p \vee q) \geq \alpha \\ N(\neg p \vee r) \geq \beta \end{array}}{N(q \vee r) \geq \min(\alpha,\beta)}$$

(pour $\alpha = \beta = 1$, on retrouve bien (1)).

Pour des clauses contenant des prédicats, la règle de particularisation

$$(3) \qquad \frac{\forall\, x p(x)}{p(a)}$$

se généralise en

$$(4) \qquad \frac{N(\forall x p(x)) \geq \alpha}{N(p(a)) \geq \alpha}$$

(pour $\alpha = 1$, on retrouve bien (3)), et plus généralement, on a

$$\frac{N(C) \geq \alpha}{N(C\sigma) \geq \alpha}$$

où σ est une substitution quelconque et C une clause de la logique classique.
Notons que des lois générales faisant intervenir par exemple des quantificateurs vagues ("presque tous les oiseaux volent") donnent, une fois instanciées, une conjecture incertaine (" Titi vole") et peuvent ainsi être traitées comme précédemment.

Une clause incertaine sera une clause de la logique classique à laquelle on associe une valuation qui est une borne inférieure de son degré de nécessité. Ainsi, écrire que (C α) est réalisée équivaut à dire que $N(C) \geq \alpha$.

La méthode de preuve par réfutation est généralisée aux clauses incertaines de la manière suivante: soit C une conclusion à prouver à partir d'un ensemble de clauses incertaines (hypothèses) H. Soit H' la réunion de l'ensemble d'hypothèses H et de l'ensemble des clauses résultant de la négation de la conclusion (ces dernières étant valuées par 1); alors, il est prouvé que toute valuation associée à une clause vide dérivée à partir de H' correspond à une borne inférieure du degré de nécessité de la conclusion à prouver C. Ceci implique l'existence de réfutations "optimales", c'est-à-dire des dérivations d'une clause vide avec une valuation maximale.

En vue de l'obtention d'une réfutation optimale, il faut définir, comme en logique classique , des stratégies de résolution. Une stratégie de résolution pour clauses incertaines sera dite N-complète ssi son application à un ensemble inconsistant de clauses incertaines S permet de trouver une réfutation optimale de S .

Par exemple, on peut ordonner les clauses initiales par valuations décroissantes et appliquer la stratégie suivante: tant qu'on peut produire un résolvant de valuation α, on ne cherche pas à produire de résolvant de valuation $\alpha' < \alpha$. Cette stratégie , bien que N-complète, est aveugle , si bien que le nombre de clauses produites peut être beaucoup trop grand.

Pour pallier cet inconvénient, on peut définir des stratégies informées en généralisant les algorithmes de recherche ordonnée de type A*, l'opérateur '+' étant remplacé dans la fonction d'évaluation par l'opérateur 'min' (et le "coût" étant à maximiser). La stratégie de résolution est dans ce cas linéaire ; l'algorithme de production des résolvants est analogue aux algorithmes A* ; on définit de la même manière que pour les algorithmes A* des fonctions admissibles.

Un premier démonstrateur de théorèmes incertains basé sur l'extension du principe de résolution que nous venons de présenter a été programmé en Le_Lisp ; il utilise une stratégie linéaire guidée par une fonction d'évaluation admissible [2].

En logique classique, un ensemble S de clauses est inconsistant ssi il existe une réfutation à partir de S (validité et complétude pour la réfutation du principe de résolution). Un ensemble de clauses incertaines sera dit inconsistant si les valuations associées à ses clauses violent la théorie des possibilités/nécessités. Alors on prouve qu'un ensemble S de clauses incertaines est inconsistant ssi l'ensemble S* de clauses classiques associé à S (c'est-à-dire abstraction faite des valuations) est lui-même inconsistant. Ce résultat ne serait plus vrai si l'incertitude était modélisée par la théorie des probabilités.

Par ailleurs, une sémantique appropriée a été définie, et la complètude de la première extension du principe de résolution a été prouvée. Soit $S = \{C_i,\ 1 \le i \le n\}$ un ensemble de clauses incertaines, une clause incertaine C étant un couple (C* w), C* étant une clause de la logique classique et w étant la valuation associée à C*. L'ensemble des modèles de S est un ensemble flou dont la fonction d'appartenance sera notée μ_S. μ_S (I) est la valeur de vérité de "I est un modèle de S". Si C = (C* w) alors

$$I \in M(C^*) \implies \mu_C(I) = 1$$

$$I \in M(\neg C^*) \implies \mu_C(I) = 1\text{-}w$$

Si $S = \{C_i,\ 1 \le i \le n\}$, alors

$$\mu_S(I) = \min\{\mu_{C_i}(I),\ 1 \le i \le n\}$$

Les définitions classiques de conséquence logique et de tautologie ont été généralisées. Le degré de consistance (resp. inconsistance) de S est défini par

$$c(S) = \operatorname{Sup}_I \mu_S(I) \quad (\text{resp } inc(S) = 1 - c(S))$$

Soit S un ensemble de clauses valuées, considérées comme hypothèses. Soit C* une conclusion. On veut chercher la meilleure borne inférieure du degré de nécessité de C*. Alors il est prouvé que la meilleure borne inférieure de N(C*) est $\inf_{I \in M(\neg C^*)}(1 - \mu_S(I))$. On peut donc calculer la meilleure borne inférieure de N(C*) en calculant explicitement $\mu_S(I)$ pour toute interprétation I.

Prouver la validité et la complètude de la première extension du principe de résolution consiste donc à montrer que la meilleure borne inférieure calculée de la manière précédente est égale à la meilleure borne inférieure de N(C*) donnée par le principe de résolution. Ce qui a été fait.

On sait qu'en logique classique, un ensemble d'hypothèses inconsistant est à rejeter car on peut en déduire logiquement n'importe quelle conclusion. Ceci n'est plus vrai quand les hypothèses sont incertaines : en effet, soit H un ensemble d'hypothèses incertaines, et C une conclusion à prouver; soit $S = H \cup \{(\neg C \;\; 1)\}$; alors, si le degré d'inconsistance α de S est strictement supérieur au degré d'inconsistance β de H, alors il existe un sous-ensemble H' de H, consistant, tel que C puisse être déduit de H' avec le degré α ; si $\alpha = \beta$, on ne peut rien dire a priori. La notion de sous-bases maximales consistantes a également été généralisée.

Le démonstrateur qui a été programmé peut soit chercher une réfutation optimale, soit chercher toutes les réfutations, dans l'ordre décroissant des valuations. Il tient compte de l'inconsistance de l'ensemble d'hypothèses. Il permet aussi un traitement de prédicats vagues par approximation par une famille de prédicats incertains non vagues.

Le démonstrateur a été testé sur des exemples variés, et en particulier sur un problème de diagnostic de pannes d'une taille relativement importante (environ 30 clauses).

Une autre régle de résolution a été proposée pour des clauses incertaines valuées par des bornes inférieures de degrés de possibilité ou de nécessité :

$$\frac{N(p \vee q) \geq \alpha \qquad \Pi(\neg p \vee r) \geq \beta}{\Pi(q \vee r) \geq \alpha \, I_m \, \beta}$$

$$\text{où } \alpha \, I_m \, \beta = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha + \beta \leq 1, \\ \beta \text{ si } \alpha + \beta > 1. \end{cases}$$

De la même manière que précédemment, une méthode de réfutation a été proposée ainsi que des stratégies permettant de donner la meilleure borne inférieure du degré de possibilité de la conclusion si on ne peut trouver aucune borne inférieure strictement positive de son degré de nécessité.

Enfin, une nouvelle méthode de prise en compte des prédicats vagues a été proposée [5].

3. Développements futurs

Le projet a été motivé par des résultats théoriques obtenus en 1986. D'un point de vue implémentation , il a débuté en Janvier 1987. Il a donné lieu à un mémoire de DEA en 1986-87 [10].

La recherche à venir portera sur les points suivants :

Les quatre points suivants seront étudiés dans le courant de 1988.

- mise en œuvre des résultats récemment obtenus pour la gestion des bornes inférieures de mesures de possibilité et le traitement des prédicats vagues.
- utilisation de bases de connaissances incertaines partiellement inconsistantes.
- recherche de toutes les réfutations différentes associées à une conclusion (deux réfutations étant considérées comme différentes si elles n'utilisent pas le même sous-ensemble de l'ensemble d'hypothèses), en vue d'associer une explication à chaque réfutation.
- problèmes de complètude concernant les principes de résolution proposés mettant en œuvre des degrés de possibilité ou des prédicats vagues.

Les points suivants seront étudiés dans le courant de 1989.

- lien avec les logiques modales (étude essentiellement théorique dans laquelle seront impliqués d'autres membres de l'équipe) : il serait intéressant de faire le parallèle entre les principes de résolution possibilistes et la résolution modale (Fariñas del Cerro [7])
- étude et expérimentation de diverses stratégies et glissement vers une approche programmation logique.
- association de l'approche proposée avec des idées de résolution en logique typée.
- lien avec un module de traitement des quantificateurs numériques précis, imprécis ou vagues (approche basée sur la programmation linéaire).

4. Conclusion

L'intérêt théorique de ce projet est de fournir un traitement de l'incertitude et du caractère vague des connaissances clairement basé sur une axiomatique, dans un cadre logique (démonstration automatique).

Son intérêt pratique est de fournir, à long terme, un outil pour la programmation logique en environnement incertain.

Références

[1] Chang L.C., Lee R.C.T. (1973) "Symbolic logic and mechanical theorem proving", Academic Press, 1973.

[2] Dubois D., Lang J., Prade H. (1987) "Theorem proving under uncertainty - A possibility theory-based approach", Proc. 10th Inter. Joint Conf. Artificial Intelligence, Milano, 984-986.

[3] Dubois D., Prade H. (1985) "Théorie de possibilités. Applications à la représentation des connaissances en informatique". Masson, Paris. Deuxième version revue et augmentée parue en 1987. Version anglaise à paraître chez Plenum Press, New York, début 1988.

[4] Dubois D., Prade H. (1986) "Necessity measures and the resolution principle", IEEE Trans. on Systems, Man & Cybernetics, 17, 474-478.

[5] Dubois D., Prade H. (1988) "Resolution principles in possibilistic logic", soumis à Inter. J. of Approximate Reasoning.

[6] Duval B., Kodratoff Y. (1986) "Automated deduction in uncertain and inconsistent data bases", Proc. 7th. European Conf. on Artificial Intelligence (Brighton), 101-108.

[7] Fariñas del Cerro L. (1985), "Resolution modal logic". Logique et Analyse n° 110-111, 153-172.

[8] Hinde C.J. (1986) "Fuzzy Prolog", Inter. J. Man-Machine Studies, 24, 569-595.

[9] Ishizuka M., Kanai N. (1985) " Prolog-ELF incorporating fuzzy logic", Proc 9th. Inter. Joint Conf. of Artificial Intelligence, Los Angeles, 701-703.

[10] Lang J. (1987) "Démonstration automatique de théorèmes en présence d'incertitude: mise en œuvre et applications", rapport DEA, Univ. P. Sabatier, 1987.

[11] Lee R.C.T. (1972) Fuzzy logic and the resolution principle", J. of the Assoc. for Computing Machinery, 19, 109-119.

[12] Martin T.P. , Baldwin J.F. , Pilsworth B.W. (1987) "The implementation of Fprolog - A fuzzy Prolog interpreter", Fuzzy Sets and Systems 23, 119-129.

[13] Mukaidono M., Shen Z.L., Ding L. (1987), "Fuzzy Prolog", Proc. 2nd Inter. Fuzzy Systems Assoc. Cong., Tokyo, 844-847.

[14] Nilsson N. (1986) "Probabilistic logic", Artificial Intelligence, 28(1), 71-87.

[15] Robinson J.A. (1965) "A machine-oriented logic based on the resolution principle", J. of the Assoc. for Computing Machinery, 12, 23-41.

[16] Umano M. (1987) "Fuzzy set Prolog", Proc. 2nd Inter. Fuzzy Systems Assoc. Cong., Tokyo, 750-753.

[17] Zadeh L.A. (1987) "Fuzzy Sets and Applications", selected papers by L.A. Zadeh (edited by R.R. Yager, S. Ovchinnikov, R.M. Tong, H.T. Nguyen), Wiley & Sons, New York.