ALGEBRES EXOTIQUES ET ENSEMBLES FLOUS

Didier DUBOIS
Langages Systèmes Informatiques
Université Paul Sabatier
31062 TOULOUSE cedex

Introduction

La structure de dioïde, à mi-chemin entre les treillis et l'algèbre linéaire, semble fondamentale pour l'étude de certains problèmes très analogues entre eux dans des domaines aussi divers que réseaux de Pétri, analyse convexe, graphes, systèmes à événements discrets, et théorie des automates. On montre ici que cette structure a été également étudiée en théorie des ensembles flous où elle semble jouer (parfois sous une forme affaiblie) un rôle tout aussi fondamental que dans les disciplines évoquées plus haut. Ce lien n'a pas encore été vraiment reconnu, à notre connaissance, en ce sens que pour la plupart des participants au séminaire "Algèbres Exotiques et Systèmes à Evénements Discrets" auquel cette note fait suite, les ensembles flous sont des objets non seulement exotiques, mais peut être d'un intérêt douteux, et que par ailleurs, de par le cloisonnement des disciplines, la plupart des résultats algébriques obtenus en théorie des ensembles flous, l'ont été sans référence à la théorie des dioïdes. Cette note cherche à favoriser une reconnaissance mutuelle. Son propos reste modeste elle se borne à fournir les éléments de base qui justifient le rapprochement entre ensembles flous et dioïdes, à indiquer brièvement la nature des résultats obtenus quant aux équations de relations floues, aux sous-ensembles flous "propres", et aux algèbres de matrices floues, ainsi que les domaines où ces résultats sont effectivement appliqués. Cette note n'est que l'esquisse d'un article de synthèse plus consistant à venir, et laissera le lecteur sur sa faim. Il est invité à se reporter à la bibliographie jointe.

Remarques et bibliographie en marge du Séminaire "Algèbres Exotiques et Systèmes à Evénements Discrets", 3-4 juin 1987, C.N.E.T., Issy les Moulineaux.

1. Algèbres d'ensembles flous

Gondran et Minoux (1982) indiquent que le treillis Booléen et le treillis distributif sont des dioïdes. L'archétype du treillis Booléen est l'ensemble des parties d'un ensemble. Un exemple de treillis distributif est l'ensemble des parties floues d'un ensemble muni d'une union et d'une intersection basée sur le maximum et le minimum dans l'intervalle unité. Un ensemble flou A, dans sa forme la plus abstraite (hormis le plongement dans une catégorie) est associé à une fonction d'appartenance μ_A d'un ensemble U dans un treillis L (Goguen, 1967). La fonction μ_A sert à trier les éléments de U pour les ordonner selon leur degré d'appartenance à A. U est dit référentiel et L ensemble de valuation. En général L possède un plus petit élément ε et un plus grand élément e, ε désignant la non-appartenance, et e l'appartenance totale. Les opérations $\vee$ (sup.) et $\wedge$ (inf.) du treillis sont récupérées pour définir l'union et l'intersection d'ensembles flous

$$\mu_{A \cup B}(u) = \mu_A(u) \vee \mu_B(u) \qquad (1)$$

$$\mu_{A \cap B}(u) = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u) \qquad (2)$$

Une première remarque importante, c'est que l'ensemble L^U des fonctions de U dans L a la même structure que L. Si L est un treillis distributif, l'ensemble des parties floues de U en est un, et en particulier c'est un dioïde. Un exemple de treillis distributif est $(L, \vee, \wedge)$ = ([0,1], max, min). On obtient alors les ensembles flous originellement proposés par Zadeh (1965), à condition que l'on ajoute une opération de complémentation, définie par Zadeh comme suit:

$$\mu_{A^c}(u) = 1 - \mu_A(u) \qquad (3)$$

Avec cette opération, l'ensemble des parties floues possède toutes les propriétés de l'algèbre de Boole sauf celle du tiers exclu ($A \cup A^c \neq U$) et de la non contradiction ($A \cap A^c \neq \emptyset$). Max et min sont d'ailleurs les <u>seules</u> opérations permettant de conserver autant de propriétés à l'algèbre des ensembles flous. On notera que (3) n'est pas une vraie complémentation , c'est une pseudo-complémentation seulement car min(1 - a , a) $\neq$ 0, et max(1 - a , a) $\neq$1). En consequence, $([0,1]^U$,max,min,1-.) n'est pas une algèbre "intuitioniste" de Heyting. Dans les algèbres de Heyting on définit la négation à partir du sup ou de l'inf du treillis distributif, soit

$$\forall \lambda \in L,\ \neg\lambda = \bigvee\{\alpha \in L : \alpha \wedge \lambda = \varepsilon\} \qquad (4)$$

Cette négation n'est pas involutive, contrairement à (3), et appliquée au cas ([0,1], max, min) elle donne la complémentation

$$\mu_{\neg A}(u) = 1 \quad \text{si} \quad \mu_A(u) = 0$$
$$= 0 \quad \text{sinon} \qquad (5)$$

Les ensembles flous "intuitionistes" sont étudiés par Takeuti et Titani (1984).

La notion de négation ou de complémentation au sens d'un treillis n'existe pas en théorie des dioïdes, du moins de façon directe. En effet (4) est un cas particulier d'opération de résiduation dans un treillis, opération qui joue un rôle fondamental pour résoudre des équations sur un dioïde. La complémentation involutive est fortement liée à l'existence d'un plus grand et d'un plus petit élément dans le treillis, alors que les dioïdes habituellement considérés $((\mathcal{R}, \max, +)$, etc...) n'ont pas recours à cette propriété.

Dans le cadre de la théorie des ensembles flous valués sur [0,1], on a progressé dans la caractérisation d'opérations d'union et d'intersection autres que le maximum et le minimum. On a retenu les propriétés suivantes de l'intersection :

- commutativité
- associativité
- $U \cap A = A \quad \forall \mu_A \in [0,1]^U$
- $\emptyset \cap A = \emptyset \quad \forall \mu_A \in [0,1]^U$

Si on définit $\mu_{A \cap B}$ par $\mu_A * \mu_B$ où $*$ est une opération sur [0,1], ([0,1], $*$) est un semi-groupe commutatif dont l'élément neutre est 1 et 0 un élément absorbant. De plus on supposera que $*$ est croissante au sens large selon chaque argument. En effet si $\mu_A(u) \geq \mu_A(u')$, $\mu_B(u) \geq \mu_B(u')$ on trouvera naturel que $\mu_{A \cap B}(u) \geq \mu_{A \cap B}(u')$. Muni de ces propriétés $*$ s'avère être une norme triangulaire ou t-norme, opération inventée par Menger en 1942, pour définir une inégalité triangulaire en géométrie stochastique. On démontre que toutes les normes triangulaires continues se construisent par isomorphisme, ou somme ordinale) à partir de l'une des trois normes triangulaires fondamentales (voir Schweizer et Sklar, 1983):

- $*$ = produit (normes triangulaires strictement monotones)
- $a * b = \max(0, a + b - 1)$ (normes nilpotentes)
- $a * b = \min$ (c'est la plus grande des normes triangulaires, et la seule qui soit idempotente.)

Dualement, les unions d'ensembles flous sont généralisées par les co-normes triangulaires $\perp$ telles que ([0,1], $\perp$) est un semi groupe commutatif, croissant au sens large, d'élément neutre 0, et d'élément absorbant 1. Les trois co-normes fondamentales sont

- $a \perp b = a + b - ab$ (co-normes strictement montones)
- $a \perp b = \min(a + b, 1)$ (co-normes nilpotentes)
- $a \perp b = \max(a, b)$ (la plus petite, la seule idempotente.)

La complémentation involutive d'ensembles flous n'est pas réduite à (3) ; n'importe quelle bijection $c : [0,1] \to [0,1]$, involutive, et strictement décroissante (caractérisée par Trillas, 1979) en fournit un modèle.

Les co-normes et les normes triangulaires s'échangent par une complémentation involutive c, car si $*$ est une norme triangulaire, alors $c(c(.) * c(.))$ est une co-norme et réciproquement. C'est une transposition dans [0,1] des lois de De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Les triplets $(\perp, *, c)$ où $\perp$ et $*$ s'échangent par c sont appelés triplets de De Morgan et sont étudiés pour leurs propriétés mathématiques (Esteva & Quintiliana,1987). Pour plus de détails sur les opérations ensemblistes floues voir Dubois et Prade (1980, 1985).

Il est clair que généralement $([0,1], \perp, *)$ n'est pas un dioïde. La co-norme qui joue le rôle d'addition a bien toutes les propriétés du $\oplus$ dans le dioïde ; la t-norme qui joue le rôle de multiplication, a toutes les propriétés de l'opération $\otimes$ du dioïde, sauf la distributivité sur $*$ $([0,1], \perp, *)$ est donc une structure plus générale que le dioïde, si ce n'est que $*$ est commutatif. Cette propriété est une conséquence de l'associativité sur $\mathcal{R}$, en général (voir Aczel, 1967). Pour retrouver un dioïde, il faudrait trouver toutes les paires $(*,\perp)$ où $*$ est distributif sur $\perp$. C'est le cas si $\perp$ = maximum, quelque soit le choix de la norme triangulaire $*$. On notera que rien n'interdit de faire jouer le rôle d'addition à la norme triangulaire, et celle de multiplication à la co-norme. On obtient alors un dioïde dès que $\perp$ est distributif sur $*$, par exemple $*$ = min pour tout $\perp$. Néanmoins les couples $(\max(0, a + b - 1), \min(1, a + b))$, $(ab, a + b - ab)$ qui forment chacun avec (3) des triplets de De Morgan ne fournissent pas de dioïde. Le premier couple est tel que (3) est vraie complémentation contrairement au second. De plus $A \cap A \neq A$, $A \cup A \neq A$ dans les deux cas.

Notons que toutes les paires (max, min), $(a + b - ab, ab)$, $(\min(a + b,1), \max(0, a + b - 1))$ satisfont l'identité

$$a * b = a + b - a \perp b \qquad (6)$$

fondamentale pour le calcul symbolique de Cuninghame-Green (1980) en algèbre (max, +). Les solutions de (6) dans le cadre des normes triangulaires ont été trouvées par Frank (1979), sous la forme d'une famille unique paramétrée de normes triangulaires et de sa duale au sens de De Morgan. Ce résultat s'applique directement à la recherche d'une opération $*$ qui généralise la définition de l'indépendance d'événements en probabilité, c'est à dire telle que Prob(A ∩ B) = Prob(A) * Prob(B) pour deux événements A et B fixés (Dubois, 1986).

2. Equations matricielles en théorie des ensembles flous

Une matrice M(m x n) à coefficients dans L sert à modéliser des relations floues R, qui sont des sous-ensembles flous d'un produit cartésien UxV d'ensembles finis à m et n éléments respectivement. Le terme m_{ij} de la matrice est interprété comme l'intensité $\mu_R(u_i,v_j)$ du lien entre $u_i \in U$ et $v_j \in V$. Une relation floue généralise une correspondance, et donc une fonction.

Etant donné deux relations floues R et S définies sur U x V et V x W, on définit la relation floue T = R o S sur U x W par l'équation :

$$\forall u_i,\ w_k,\ \mu_T(u_i,w_k) = \bigvee_{v\in V}(\mu_R(u_i,v) \wedge \mu_Q(v,w_k)) \qquad (7)$$

Cette opération généralise la composition des correspondances aux relations floues.

Sanchez (1976, 1977) a étudié la résolution de l'équation

$$T = R \circ Q \qquad (8)$$

connaissant T ,et soit R soit Q, sur un treillis distributif de Brouwer-Heyting. La résolution de ces équations sur une telle structure s'avère très analogue à celle d'équations linéaires sur une algèbre (max, +), telles qu'en résoud Cuninghame-Green (1976). La solution de (8), quand elle existe n'est pas unique. En fait l'ensemble des solutions forme un sup demi-treillis dont l'élément maximal est construit à partir d'une opération de résiduation dans L, soit → telle que

$$a \to b = \sup\{\lambda \mid a \wedge \lambda \leq b\} \qquad (9)$$

et la plus grande solution Q* de (8) s'écrit

$$\mu_{Q^*}(v,w) = \bigwedge_{u\in U} \mu_R(u,v) \to \mu_T(u,w) \qquad (10)$$

Il est clair que (4) est un cas particulier de (9), avec b = ε.

Les plus petites solutions ont aussi été étudiées par Sanchez (1977). Il est clair que (8-10) s'applique directement au dioïde ([0,1], max, min). Ces résultats ont été généralisés aux dioïdes ([0,1], max, $*$) où $*$ est une t-norme continue par Pedrycz (1983). Voir Di Nola et coll. (1984) pour un article de synthèse assez complet sur le sujet. Quand $a * b = \max(0, a + b - 1)$ on est très proche des équations résolues par Cuninghame-Green (1976).

Le problème des vecteurs propres a été étudié par Sanchez (1978, 1981) qui s'est concentré sur des algorithmes efficaces pour leur obtention, dans le cas du dioïde ([0,1], max, min). Un vecteur propre d'une relation floue R sur U x U est un ensemble flou A tel que

$$A \circ R = A \qquad (11)$$

appelé ensemble flou propre. Une caractérisation de ces vecteurs propres est fournie par Cao (1982). Ces travaux sont proches de ceux de Gondran (1976) qui considère le dioïde ($\mathcal{R}+$, min, max) et des matrices dont la diagonale est nulle (le terme i-j de la matrice est la distance entre u_i et $u_j \in U$).

Les matrices à coefficients dans [0,1], qui modélisent des relations floues ont été étudiées par Santos (1968,1972) dans le cadre de la théorie des automates valués, sur le dioïde ([0,1], max, min). Son étude a porté sur la transposition de notions d'algèbre linéaire telles que la notion de base. Il a également étudié le dioïde ([0,1], max, produit) avec la même optique (Santos, 1972a). Son but est de définir l'analogue des automates probabilistes sur des algèbres exotiques, et d'étudier les problèmes classiques de réalisation minimale. Plus récemment Kim et Roush (1980) ont également étudié les matrices sur ([0,1], max, min) avec une vision de type algèbre linéaire; ils étudient non seulement la notion de base, mais aussi celles de rang, d'inversion, de régularité et de formes asymptotique (étude du comportement de la suite des puissances d'une matrice). Voir aussi Kim et Roush (1987) pour un article de synthèse bibliographique et des applications en coloration de graphe.

La structure ([0,1], max, min) a été considérée de façon plus abstraite par Cao (1983) sous le nom d'*algèbre incline* (voir aussi le livre de Cao, Kim et Roush (1985)). Une algèbre incline est une structure (L, **V**, **x**) où (L, **V**) est sup-demi-treillis, (L, **x**) est un semi-groupe commutatif, **x** est distributif sur **V** et $\forall a, b \in L$, a **V**(a **x** b) = a. Le terme "incline" est justifié par cette dernière propriété qui dit que la multiplication fait chuter les éléments du treillis (a **x** b $\leq$ a au sens de l'ordre induit par **V**). On a donc ici un cas particulier de dioïde quand l'algèbre incline contient des éléments neutres pour **V** et **x**. En effet on démontre que l'élément neutre de **V** (le plus petit élément du treillis) est absorbant pour **x**. L'algèbre incline généralise les structures ([0,1], max, t-norme) mais aussi l'algèbre (max, +) de Cuninghame-Green (1979) restreinte aux réels négatifs ou nuls. Cao (1986) a résolu des équations aux vecteurs propres sur une algèbre incline.

3. Applications

On passe rapidement en revue, ici, les applications qui utilisent explicitement la structure algébrique des opérations ensemblistes floues.

3.1. Diagnostic

Dans le cadre de modèles causaux "désordres-symptômes" la résolution d'équations de relations floues s'utilise directement pour calculer l'ensemble des désordres expliquant un ensemble (flou) donné de symptômes, connaissant l'effet de chaque désordre. Formellement si U est l'ensemble des désordres (maladies, pannes, ...), V l'ensemble des symptômes, la relation floue R sur U x V évalue la causalité liant les éléments de U à ceux de V. En particulier $\mu_R(u,v)$ traduit à quel point on est certain d'observer le symptôme v en présence du désordre u. Pour certains auteurs c'est encore un degré d'intensité de présence. Ayant observé la présence plus ou moins affirmée des symptômes, ce qui se décrit à l'aide d'un sous-ensemble flou B sur V, on peut avoir de l'information sur les désordres qui sont à l'origine de ces symptômes en résolvant l'équation de relation floue sur un dioïde ([0,1], max, $*$) où $*$ est une t-norme

$$X \circ R = B \qquad (12)$$

Si une solution X existe elle n'est pas unique. La plus grande solution (au sens du demi-treillis engendré par ([0,1], max)) est l'ensemble maximal des désordres qui expliquent tout B. L'ensemble des solutions possède éventuellement plusieurs plus petites solutions, chacune représentant un sous-ensemble minimal de désordres capables d'expliquer tout B. Si (12) n'a pas de solution, on n'est pas capable d'expliquer tous les symptômes, mais seulement une partie d'entre eux.

Cette méthode qui généralise une technique booléenne déjà connue fournit un modèle assez grossier, qualitatif, de diagnostic permettant de prendre en compte des paramètres difficiles à quantifier (dans le cas d'un système physique : fumée, odeur caractéristique...). Elle permet de fournir une première idée de diagnostic, à affiner ensuite par d'autres techniques. Voir par exemple Sanchez (1977) pour l'application de ces techniques au diagnostic medical, Tsukamoto (1979) au diagnostic de pannes, et Asse et col. (1987) à la surveillance des grands systèmes.

3.2. Raisonnement approximatif en intelligence artificielle

Les règles d'un système expert, de la forme "si $X \in A$ alors $Y \in B$" peuvent se comprendre comme la spécification incomplète d'une relation reliant X à Y. Autrement dit $\exists R$ sur U x V, où U est le domaine de X et V celui de Y, tel que

$$A \circ R \subseteq B \qquad (13)$$

où $A \circ R = \{v \mid \exists u \in A, uRv\}$ dans le cas non flou. On a ici le problème inverse du diagnostic. L'"expert" fournit A et B et le problème d'acquisition de connaissance consiste à trouver R. Il est clair qu'on s'intéresse à la plus grande (au sens de l'inclusion) solution R afin d'éviter toute sélection arbitraire. C'est le principe d'imprécision maximale. Cette approche reste valable quand A et B sont des ensembles flous. On est alors amené à résoudre l'équation (13) sur le dioïde ([0,1], max, $*$) où $*$ est une t-norme, à partir de la donnée d'une règle floue (par exemple "si la taille d'un homme est <u>élevée</u> alors son poids est <u>lourd</u>"). Voir plus de détails dans Dubois et Prade (1985), chapitre 4. La plus grande solution R^*, telle que $\forall R$ solution de (13), $\mu_{R^*} \geq \mu_R$, existe et est unique. Elle dépend de la t-norme choisie. Elle est de la forme $\mu_{R^*} = \mu_A \rightarrow \mu_B$ où $\rightarrow$ est l'opération de résiduation du dioïde considéré, formellement donnée par l' équation (9).

<u>N.B.</u> L'opération $\rightarrow$ est toujours une implication logique au sens d'une logique multivalente; $a \rightarrow 0$ est toujours une négation intuitioniste. Il est naturel que, modélisant des règles "si... alors", on retrouve des implications.

Plus généralement on doit résoudre le problème de synthèse de connaissances dans le cas de plusieurs règles "si $X \in A_i$ alors $Y \in B_i$" $i = 1,n$" soit résoudre le système

$$A_i \circ R \subseteq B_i \qquad i = 1,n \qquad (14)$$

Si R_i^* est la solution de l'équation i, la solution R^* du système est telle que $\mu_{R^*} = \min_{i=1,n} \mu_{Ri^*}$, quelle que soit la t-norme $*$.

Quand on veut traiter un fait de la forme $X \in A'$, on est amené à calculer $B' = A' \circ R$ tel que la conclusion soit $Y \in B'$. C'est le modus ponens généralisé, inventé par Zadeh. La forme modus tollens (connaissant Y déduire X) existe aussi.

Cette approche a été effectivement utilisée en pratique dans les systèmes experts tels que SPII (Lebailly,Martin-Clouaire et Prade, 1987) voir Dubois et Prade (1985) pour une bibliographie plus complète, et Dubois et col. (1987) pour une référence à jour sur la question.

3.3. <u>Commande de procédé et systèmes flous</u>

L'approche décrite ci-dessus a été proposée, dans ses grandes lignes, très tôt par Zadeh (1973), et appliquée dès 1975 à des procédés industriels (fours à ciment, machines à vapeur,...) sous une forme plus empirique et rudimentaire que celle décrite au paragraphe précédent. On modélise le comportement d'un contrôleur humain sous la forme de règles floues de la forme "si <observations> alors <commande>" sur le dioïde ([0,1], max, min), en choisissant comme solution de (14) $\mu_R = \max_i \min(\mu_{Ai}, \mu_{Bi})$. Cette approche renverse complètement la méthodologie classique de l'automatique (modélisation du système - contrôle du modèle) pour adopter une démarche de type intelligence artificielle "modélisation du contrôleur humain - contrôle du processus réel".

Voir Mamdani (1977) pour un rapport sur la méthode, et Sugeno (1985) pour un panorama des applications de cette approche, qui pour être simpliste, n'en est pas moins très efficace en pratique. Les japonais l'utilisent parfois pour commander des métros et des engins, de préférence à la technique classique P.I.D.. On peut utiliser cette approche pour décrire des systèmes à partir d'observations, qui peuvent être qualitatives, sur leur comportement entrée/sortie. Voir Pedrycz (1981) pour une discussion des problèmes de prédiction, sensibilité, identification et stabilité dans ce cadre de modélisation. Un système flou est un bon exemple de modèle défini sur une algèbre exotique, au même titre que les systèmes à événement discrets (Cohen et col., 1987).

Conclusion

La théorie des ensembles flous et ses applications est un terrain propice au développement et à l'utilisation de la théorie des dioïdes. D'autres applications qui pourraient être développées concernent les algèbres de chemins dans les graphes valués par des nombres flous (cf. Dubois, 1983 ; Dubois et Prade, 1980, page 249). Ce type de structure serait utile pour calculer les performances de systèmes à événement discrets dont la description est entâchée d'imprécision. Une autre application pourrait être la physique qualitative (De Kleer et Brown, 1984) qui est basée sur un dioïde très simple et dont l'extension floue semble naturelle (cf. D'Ambrosio, 1987).

References

Aczel J. (1966) Lectures on Functional Equations and their Applications. Academic Press, New York.

Asse A., Maizener A., Moreau A., Willaeys D. (1985) Diagnosis based on subjective information in a solar energy plant. In "Approximate Reasoning in Intelligent Systems, Decision and Control" (E. Sanchez, L.A. Zadeh, eds.), Pergamon Press, 159-175.

Cao Z.Q. (1982) The eigen fuzzy sets of a fuzzy matrix. In "Approximate Reasoning in Decision Analysis" (M.M. Gupta, E. Sanchez, eds.), North-Holland, 61-64.

Cao Z.Q. (1983) An algebraic system generalizing the fuzzy subsets of a set. In "Advances in Fuzzy Sets, Possibility Theory and Applications" (P.P. Wang, ed.), Plenum Press, New York, 71-80.

Cao Z.Q. (1986) Eigen vectors of fuzzy matrices under incline operations. Fuzzy Mathematics (Chine), 5, n° 4, 53-56.

Cao Z.Q., Kim K.H., Roush F.W. (1985) Incline Algebra and Applications. J. Wiley & Sons, New York.

Cohen G., Moller P., Quadrat J.P., Viot M. (1987) A 2-D discrete event linear system theory. In Actes Séminaire "Algèbres Exotiques et Systèmes à Evénement Discrets", Issy-les-Moulineaux,147-165.

Cuninghame-Green R. (1976) Projections in minimax algebra. Mathematical Prog., 10, 111-123..

Cuninghame-Green R. (1979) Minimax Algebra. Lectures Notes in Economical and Mathematical Systems, n° 166, Springer Verlag, Berlin.

Cuninghame-Green R. (1980) An algebra for piecewice linear minimax problems. Discrete Appl. Math., 2, 267-294.

D'Ambrosio B. (1987) Extending the mathematics in qualitative process theory. Proc. 6th Nat. Conf. Artificial Intelligence, Seattle, WA., 595-599.

De Kleer J., Brown J. (1984) A qualitative physics based on confluences. Artificial Intelligence, 24, 7-83.

Di Nola A., Pedrycz W., Sessa S., Wang P.Z. (1984) Fuzzy relation equation under a class of triangular norms : a survey and new results.

Stochastica, VIII, n° 2, 99-145.

Dubois D. (1983) Modèles Mathématiques de l'Imprécis et de l'Incertain en Vue d'Applications aux Techniques d'Aide à la Décision. Thèse d'Etat, Université de Grenoble.

Dubois D. (1986) Generalized probabilistic independence and its implications for utility. Operations Res. Letters, 5, 255-260.

Dubois D., Prade H. (1980) Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications. Academic Press, New York.

Dubois D., Prade H. (1985) Théorie des Possibilités : Applications à la Représentation des Connaissances en Informatique. Masson, Paris, 2ème édition revue et augmentée, octobre 1987.

Dubois D., Martin-Clouaire R., Prade H. (1987) Practical computing in fuzzy logic. In "Fuzzy Computing" (M.M. Gupta, T. Yamakawa, eds.), North-Holland, à paraître.

Esteva F.,R.Quintiliana (1987) On symmetric algebras of fuzzy sets. Fuzzy Sets & Syst.,24,87-92

Frank M.J. (1979) On the simultaneous associativity of F(x,y) and x + y - F(x,y). Aequationes Math., 19, 194-226.

Goguen J. (1967) L-fuzzy sets. J. Math. Anal. Appl., 18, 145-174.

Gondran M. (1976) Valeurs propres et vecteurs propres en classification hiérarchique. RAIRO Informatique Théorique, 10, n° 3, 39-46.

Gondran M., Minoux M. (1982) Dioïd theory and its applications. Workshop "Algebraïc Structures in O.R.", Bad-Honnef, R.F.A. ; dans Actes Séminaires "Algèbres Exotiques et Systèmes à Evénements Discrets", Issy les Moulineaux, 1987, 57-75.

Kim K.H., Roush F.W. (1980) Generalized fuzzy matrices. Fuzzy Sets and Systems, 4, 293-316.

Kim K.H., Roush F.W. (1987) Fuzzy matrix theory, Chap.6 in "The Analysis of Fuzzy Information",vol.1 (J.C. Bezdek, ed.) CRC Press, Boca Raton, Fl.,107-130

Mamdani E.H. (1977) Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems. IEEE Trans. on Computers, 26, 1182-1191.

Lebailly J., Martin-Clouaire R., Prade H. (1987) Use of fuzzy logic in a rule-based system in petroleum geology. In "Approximate Reasoning in Intelligent Systems, Decision and Control (E. Sanchez, L.A. Zadeh, eds.), Pergamon Press, 125-144.

Menger K. (1942) Statistical metrics. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 28; 535-537.

Pedrycz W.(1981) An approach to the analysis of fuzzy systems, Int. J. of Control, 34,403-421.

Pedrycz W. (1983) Fuzzy relational equations with generalized connectives and their applications. Fuzzy Sets and Systems, 10, 185-201.

Sanchez E. (1976) Resolution of composite fuzzy relations. Information and Control, 30, 38-48.

Sanchez E. (1977) Solutions in composite fuzzy relation equations : application to medical diagnosis in Brouwerian logic. In "Fuzzy Automata and Decision Processes" (M.M. Gupta, G.N. Saridis, B.R. Gaines, eds.), North-Holland, 221-234.

Sanchez E. (1978) Resolution of eigen fuzzy set equations. Fuzzy Sets and Systems, 1, 69-74.

Sanchez E. (1979) Medical diagnosis and composite fuzzy relations. In "Advances in Fuzzy Set Theory and Applications (M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager, eds.), North-Holland, 437-444.

Sanchez E. (1981) Eigen fuzzy sets and fuzzy relations. J. Math. Anal. Appl., 81,399-421.

Santos E.S. (1968) Maximin automata. Information and Cont., 13, 363-377.

Santos E.S. (1972) Max-product machines. J. Math. Anal. Appl., 37, 677-686.

Santos E.S. (1972) On reduction of maximin machines. J. Math. Anal. Appl., 40, 60-78.

Schweizer B., Sklar A. (1983) Probabilistic Metric Spaces. North-Holland.

Sugeno M. (ed.) (1985) Industrial Applications of Fuzzy Control. North-Holland.

Takeuti G., Titani S. (1984) Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory. J. Symbolic Logic, 49, 851-866.

Trillas E. (1979) Sobre functiones de negación en la teoria de conjuntos difusos. Stochastica, III, n° 1, 47-59.

Tsukamoto T. (1979) Fuzzy Logic Based on Lukasiewicz Logic and its Application to Diagnosis and Control. Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology.

Zadeh L.A. (1965) Fuzzy sets. Information and Control, 8, 338-353.

Zadeh L.A. (1973) Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. on Syst. Man & Cybernetics, 3, 28-44.