# INTRODUCTION D'UN SEUIL DANS LE CALCUL DE L'INCERTITUDE EN LOGIQUE FLOUE

D. Pacholczyk . LERI-Université de REIMS

## I - INTRODUCTION

La logique floue([ 2 ], [ 4 ]) peut être utilisée pour représenter la connaissance incertaine. A toute proposition p, on peut faire correspondre une mesure de confiance m(p) $\in[0,1]$. Dans ce qui suit, on suppose que la connaissance se compose:

- d'une part, de faits incertains **p** ayant une mesure de confiance m ( p ),
- et d'autre part, de règles **r** du type:

**si** < conditions > **alors** m( r ) < conclusions > , m(r) étant la mesure de confiance associée à la règle r.

L'exploitation de la connaissance exige de définir des opérateurs vérifiant les propriétés des opérations de conjonction et de disjonction. On a besoin en particulier:

- d'évaluer la mesure de confiance de la partie prémisse d'une règle,
- de définir une fonction de propagation de la certitude sur les conclusions,
- et de combiner les évaluations de plusieurs règles.

Le problème du renforcement de la certitude pour les informations provenant d'origines différentes ( plusieurs règles ) est alors posé. Le renforcement systématique peut conduire à une information ayant une mesure de confiance voisine de 1 à partir d'informations ayant une mesure de confiance assez faible ( voisine de 0.25 par exemple et en utilisant l'opérateur $x + y - x * y$ ). Dans de nombreux cas ( en particulier en médecine), il semble plus naturel de l'accepter seulement à partir d'un certain seuil a.

Le but de cet article est de présenter une famille d' opérateurs permettant un renforcement de la certitude à partir d'un seuil donné a quelconque. Il s'agit de normes et de conormes triangulaires C-duales (T-normes et T-conormes ) particulières. On sait que celles-ci répondent aux exigences des opérateurs de conjonction et de disjonction[ 3 ].

## II - GESTION DE L'INCERTITUDE AVEC SEUIL

### II - 1 - définition d'une négation forte :

Une application C: [ 0 , 1 ] -> [ 0 , 1 ] est une négation forte [ 3 ]si elle vérifie les propriétés suivantes:

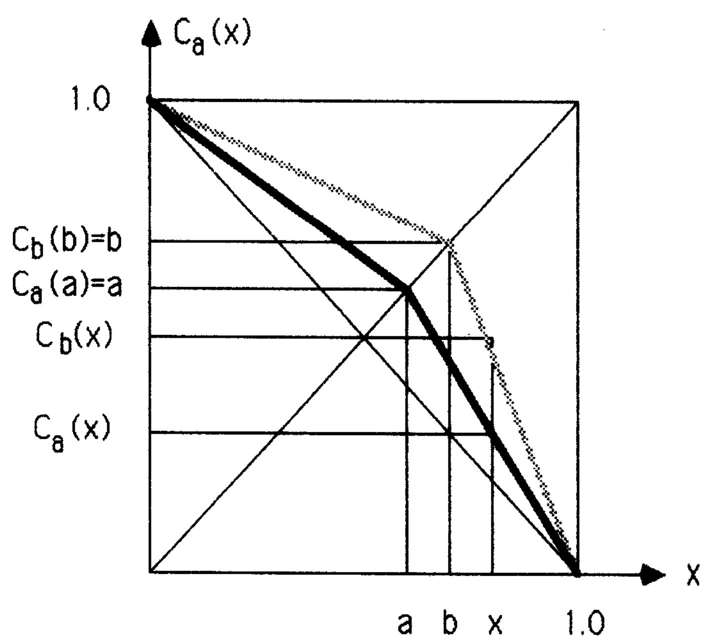
- **N1**: C ( 0 ) = 1
- **N2**: C ( C ( x ) ) = x
- **N3**: C est strictement décroissante sur [ 0 , 1 ]
- **N4**: C est continue sur [ 0 , 1 ].

On sait que dans ces conditions $\exists\, !\, a \in ]0,1[ : C(a) = a$. En utilisant trois valeurs 0, a et 1 on peut définir une négation forte. En effet de façon immédiate on a:

**- Proposition 1: Soit $a \in ]0,1[$,**

$$\text{alors : } C_a(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1-a}{a} * x & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{a}{1-a} * (1-x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

**est une négation forte telle que $C_a(a)=a$**




<u>- Remarque 1:</u> On retrouve pour a = 0,5 $C_{0.5}(x) = 1 - x$.

- Remarque 2: Pour une négation forte C quelconque, $C_a$ est une approximation d'ordre 1 de C sur [ 0 , a ] et [ a , 1 ] où a est l'unique point tel que C ( a ) = a.

- Remarque 3: $\forall a \in ]0, 1[$, on a $x \geq a \Longleftrightarrow C_a(x) \leq a$.

Si x est une mesure de confiance attachée à un fait p, a peut être interprété comme un seuil à partir duquel la mesure de confiance en non p devient inférieure au seuil a.

- Remarque 4: Si $a < b$ alors $C_a(x) \leq C_b(x)$.

Ainsi pour un fait p, la mesure de confiance en sa négation croît avec le seuil.

- Remarque 5: D'après la définition de $C_a$:

si $0 < a \leq 0{,}5$ alors $0 \leq (1 - x) - C_a(x) \leq (1 - a) - C_a(a)$

et si $0{,}5 \leq a < 1$ alors $0 \leq C_a(x) - (1 - x) \leq C_a(a) - (1 - a)$.

Il en résulte que:

si $0 < a \leq 0{,}5$ alors $2*a \leq x + C_a(x) \leq 1$

et si $0{,}5 \leq a < 1$ alors $1 \leq x + C_a(x) \leq 2*a$.

**II - 2 - Valeur de vérité d'une proposition:**

En général, à toute proposition p on associe une valeur de vérité combinant les mesures de confiance m(p) et m(non p). On peut proposer l'un des choix suivants:

II - 2 - a:

$$v_a(p) = \frac{m(p) + C_a(m(\text{non } p))}{2}$$

- Remarque 6: En utilisant les résultats donnés dans la remarque 5 on obtient:

Si $a \in ]0.5, 1[$ alors $1 \leq v_a(p) + v_a(\text{non } p) \leq 2*a$

et si $a \in ]0, 0.5[$ alors $2*a \leq v_a(p) + v_a(\text{non } p) \leq 1$.

et pour $a = 0.5$ on retrouve : $v_a(p) = 0{,}5 * (m(p) + 1 - m(\text{non } p))$

II - 2 - b:

$$v'_a(p) = \frac{(1-a)*m(p) + C_a(a*m(\text{non } p))}{2}$$

Dans ce cas, pour tout fait q sa mesure de confiance m ( q ) est telle que $a * m(q) \leq a$. On obtient alors $C_a(a * m(q)) = 1 - (1-a)*m(q)$. On en déduit que:

$$v'_a(p) = \frac{1 + (1-a)*[m(p) - m(\text{non } p)]}{2},$$

et $\forall a \in ]0,1[,\ v'_a(p) + v'_a(\text{non } p) = 1.$

## II - 3 - T-conorme avec seuil:

Une application S: [ 0 , 1 ] -> [ 0 , 1 ] est une T-conorme si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes:

- **C1**: $S(1,1) = 1$
- **C2**: $S(0,p) = S(p,0) = p$
- **C3**: $S(p,q) = S(q,p)$
- **C4**: Si $(p \leq r)$ et $(q \leq s)$ alors $S(p,q) \leq S(r,s)$
- **C5**: $S(p, S(q,r)) = S(S(p,q), r)$

- Remarque 7 : On sait que toute T-conorme S vérifie:

$$\max(p,q) \leq S(p,q).$$

Montrons qu'à partir d'une T-conorme S quelconque, on peut définir une nouvelle T-conorme $S_a$ renforçant la certitude à partir d'un seuil quelconque $a \in ]0,1[$.

**-Proposition 2:**

**Si $a \in ]0,1[$ et S est une T-conorme quelconque**

**Alors** $$S_a(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{si } x < a \text{ ou } y < a \\ S(x,y) & \text{si } x \geq a \text{ et } y \geq a \end{cases}$$

**est une T-conorme**

- On vérifie de façon immédiate les conditions **C1**, **C2** et **C3**.

- Etablissons la propriété **C4**.

  - Si ( $r < a$ ) ou ( $s < a$ ) alors ( $p < a$ ) ou ( $q < a$ ). Dans ces conditions: $S_a(p, q) = \max(p, q) \leq \max(r, s) = S_a(r, s)$.

  - Si ( $r \geq a$ ) et ( $s \geq a$ ) alors $S_a(r, s) = S(r, s)$. Par définition de $S_a$, et compte-tenu de la remarque 7, $S_a(p, q) \leq S(p, q)$. S étant une T-conorme, la proriété **C4** donne $S(p, q) \leq S(r, s)$. Finalement, on obtient: $S_a(p, q) \leq S(p, q) \leq S(r, s) = S_a(r, s)$.

- Pour établir **C5**, on peut envisager les différents cas possibles.

| $p < a$ | $q < a$ | $r < a$ | $S_a(q, r)$ | $S_a(p, S_a(q, r))$ | $S_a(p, q)$ | $S_a(S_a(p, q), r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| o | o | o | Max(q,r) | Max(p,Max(q,r)) | Max(p,q) | Max(Max(p,q),r) |
| o | o | n | r | r | Max(p,q) | r |
| o | n | o | q | q | q | q |
| o | n | n | S(q,r) | S(q,r) | q | S(q,r) |
| n | o | o | Max(q,r) | p | p | p |
| n | o | n | r | S(p,r) | p | S(p,r) |
| n | n | o | q | S(p,q) | S(p,q) | S(p,q) |
| n | n | n | S(q,r) | S(p,S(q,r)) | S(p,q) | S(S(p,q),r) |

<u>-Remarque 8:</u> Etant donné que $S_a(x, y) \geq \max(x, y)$, $S_a$ ne renforce la certitude qu'à partir du seuil a pour $S \neq \max$ ( T-conorme de Zadeh ).

<u>-Remarque 9:</u> Quand a -> 1, on retrouve le max, et quand a -> 0 on a S.

<u>- Exemple 1:</u> On peut ainsi construire la T-conorme $S_a$:

$$S_a(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \text{si } \; x < a \text{ ou } y < a \\ x + y - x * y & \text{si } \; x \geq a \text{ et } y \geq a. \end{cases}$$

En prenant a = 0.5, on ne renforce la mesure de confiance que pour des informations au moins "moyennement" possibles.

## II - 3 - définition d'une T-norme $C_a$-duale de $S_a$:

Pour définir cette T-norme établissons les résultats suivants:

**- Proposition 3:**

**Soit ( S , T ) un couple de T-conorme et T-norme duales. Pour la négation forte $C_a$ précédemment définie on a:**

$$C_a[S(C_a(x),C_a(y))] = \frac{a}{1-a} * T\left(\frac{1-a}{a} * x, \frac{1-a}{a} * y\right)$$

**pour $x \leq a$ et $y \leq a$**

En effet, dans ces conditions $C_a(x) \geq a$ et $C_a(y) \geq a$. Comme S est une T-conorme $S(C_a(x), C_a(y)) \geq \max(C_a(x), C_a(y)) \geq a$. Par définition de $C_a$ on a:

$$C_a[S(C_a(x), C_a(y))] = \frac{a}{1-a}\,(1 - S(C_a(x), C_a(y))).$$

Comme S et T sont duales $T(a, b) = 1 - S(1-a, 1-b)$ en remplaçant $C_a(x)$ et $C_a(y)$ par leurs valeurs on obtient le résultat proposé.

**- Proposition 4: Max et min sont $C_a$-duales.**

D'après la propriété **N3** on a: $C_a(\max(C_a(x), C_a(y)) = \min(x, y)$.

Dans ces conditions, on obtient $T_a$ la T-norme $C_a$-duale de $S_a$ comme-suit:

**- Proposition 5:**

**Soient $a \in ]0, 1[$ et ( S , T ) un couple de T-conorme et T-norme duales.**

**Pour $S_a$ et $C_a$ définis précédemment, prenons:**

$$T_a(x, y) = \begin{cases} \frac{a}{1-a} * T\left(\frac{1-a}{a} * x, \frac{1-a}{a} * y\right) & \text{si } x \leq a \text{ et } y \leq a \\ \min(x, y) & \text{si } x > a \text{ ou } y > a \end{cases}$$

**Alors $T_a$ est une T-norme**

**$S_a$ et $T_a$ sont $C_a$-duales**

**$S_a$ et $T_a$ sont duales quand $a = 0.5$.**

En effet, il résulte des propositions 3 et 4 que:

$$T_a(x,y) = C_a(S(C_a(x), C_a(y))).$$

$S_a$ étant une T-conorme [ 3 ], on en déduit que $T_a$ est la T-norme telle que $S_a$ et $T_a$ soient $C_a$-duales.

-Remarque 10: Si a = 0.5 on trouve comme T-norme $T_{0.5}$ duale de $S_{0.5}$:

$$T_{0.5}(x,y) = \begin{cases} T(x,y) & \text{si } x \leq 0.5 \text{ et } y \leq 0.5 \\ \min(x,y) & \text{si } x > 0.5 \text{ ou } y > 0.5 \end{cases}$$

- Exemple2: A $S_a$, définie dans l'exemple 1, correspond :

$$T_a(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{a} * xy & \text{si } x \leq a \text{ et } y \leq a \\ \min(x,y) & \text{si } x > a \text{ ou } y > a. \end{cases}$$

Pour a = 0.5, on retrouve la T-norme x y et la T- conorme probabilistes $x + y - x * y$.

## II - 4 - calcul de l'incertitude:

On peut utiliser ces opérateurs pour gérer l'incertitude dans une base de connaissances composées de faits et de règles. Un seuil a étant choisi, on peut définir une négation forte $C_a$ et un couple ( $S_a$ , $T_a$ ) de T-conorme et T-norme $C_a$-duales. $S_a$ peut être utilisée pour contrôler le renforcement de la certitude d'informations provenant de plusieurs règles. Pour chaque règle, la certitude de sa partie prémisse et la fonction de propagation de la certitude sur ses conclusions peuvent être calculés à l'aide de $T_a$.

De tels opérateurs ont été introduits dans SEQUI [ 1 ], un système expert pour le traitement de questionnaires incertains. Le couple ( $S_a$ , $T_a$) choisi a été obtenu à partir des opérateurs probabilistes( exemples 1 et 2). Les résultats obtenus sont très satisfaisants.

## III - CONCLUSION

La négation forte $C_a$ choisie permet de définir une famille de T-normes et T-conormes $C_a$-duales( à partir de tout couple de T-normes et T-conormes duales ) pour laquelle le renforcement de la certitude ne s'effectue qu'à partir du seuil a choisi.

## IV - BIBLIOGRAPHIE

[1] **H. AKDAG - D. PACHOLCZYK:** SEQUI: Un système expert pour le traitement de questionnaires incertains. Journées orléanaises sur la gestion d'incertitude dans les systèmes décisionnels. Septembre 87.

[2] **D. DUBOIS - H. PRADE:** Théorie des possibilités - éd. Masson - 1985.

[3] **H. PRADE:** Modèles mathématiques de l'imprécis et de l'incertain en vue de l'application au raisonnement naturel. Thèse d'état. Toulouse - 1982.

[4] **L-A. ZADEH:** The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems. Fuzzy sets and systems 11 p 199 - 227. 1983.