J. COULON ; J.L. COULON
Université Claude Bernard (Lyon I)
Institut de Mathématiques
Batiment Doyen Jean Braconnier
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 - VILLEURBANNE Cedex (France)

# LES RELATIONS TOTALEMENT FLOUES SELON $JTF^{oo}$ (Suite) ; EQUIVALENCES ET ORDRES TOTALEMENT FLOUS.

## § 4 - QUELQUES RESULTATS CONCERNANT LES EQUIVALENCES TOTALEMENT FLOUES.

* DEFINITION.

Soit $R$ une équivalence totalement floue sur $(X,\sigma)$, de famille naturelle $(R_i)_J$.

Soit $M$ un morphisme de $(X,\sigma)$ vers $(Y,\tau)$. On dit que $M$ est *compatible avec* $R$ si et seulement si, pour tout $i \in J$, $M_i$ est compatible avec $R_i$ (au sens usuel).

* THEOREME 3.

Soit $R$ une équivalence totalement floue sur $(X,\sigma)$. Alors, il existe un objet $(Z,\rho)$ de $JTF^{oo}$ et un épimorphisme fort $(X,\sigma) \overset{\omega}{\twoheadrightarrow} (Z,\rho)$ compatible avec $R$ tels que, pour tout morphisme $(X,\sigma) \xrightarrow{M} (Y,\tau)$ compatible avec $R$, il existe un unique morphisme $(Z,\rho) \xrightarrow{N} (Y,\tau)$ tel que $N\omega = M$.

$\langle (Z,\rho), \omega \rangle$ est déterminé à un isomorphisme près. On note $(Z,\rho) = (X,\sigma)/_R$ et on dit que $\omega$ est l'épimorphisme canonique de $(X,\sigma)$ sur $(X,\sigma)/_R$.

* THEOREME 4.

Soit $(X,\sigma) \xrightarrow{M} (Y,\tau)$ un morphisme de $JTF^{oo}$.

(1). Pour chaque $i \in J$, soit $R_i$ l'équivalence sur $X_i$ associée à l'application $X_i \xrightarrow{M_i} Y_i$ $(x\ R_i\ x' \Longleftrightarrow M_i(x) = M_i(x'))$. Alors $(R_i)_J$ détermine une équivalence totalement floue $R^M$ sur $(X,\sigma)$ dite *equivalence totalement floue sur* $(X,\sigma)$ *associée à* M.

(2). $(X,\sigma)/_{R^M}$ est isomorphe à l'image de M, de sorte que $(X,\sigma) \xrightarrow{\omega^M} (X,\sigma)/_{R^M} \supset\!\!\xrightarrow{I^M} (Y,\tau)$ est la décomposition de M en épimorphisme / monomorphisme fort.

* PROPOSITION 3.

L'ensemble $\mathcal{E}(X,\sigma)$ des équivalences totalement floues sur $(X,\sigma)$ peut être ordonné par l'ordre induit par celui des parties totalement floues de $(X,\sigma) \times (X,\sigma)$. Alors :

$$[R \leqq S] \Longleftrightarrow [\forall\ i \in J\ ;\ \forall\ x,\ x' \in X_i\ :\ x\ R_i\ x' \Rightarrow x\ S_i\ x']$$

De plus, pour cet ordre, $\mathcal{E}(X,\sigma)$ est un treillis complet.
On peut donc parler de l'équivalence totalement floue engendrée par une relation totalement floue, ou plus généralement par une application A de $X \times X$ dans J telle que $A(x,x') \leqq \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(x')$.

## § 5 - QUELQUES CONSTRUCTIONS.

* RAPPELS (cf. [3]).

Soit $(X,\sigma)$ un objet de $JTF^{oo}$, et soit A une partie totalement floue de $(X,\sigma)$.

L'enveloppe forte $\tilde{A}$ de A dans $(X,\sigma)$ peut être obtenue ainsi : si $i \in J$ et $x \in X_i$ : $x \in \tilde{A}_i \Longleftrightarrow$ il existe une partie K de J telle que $\bigvee K = i$ et $\forall\ k \in K : x|_k \in A_k$.

Ce résultat donne une contruction commode de l'enveloppe d'une partie totalement floue, par exemple lorsque le treillis $J$ est fini.

* Exemple : Construction de la transitivisée d'une relation totalement floue donnée sur $(X,\sigma)$.

Soit $R$ une relation totalement floue sur $(X,\sigma)$.

Pour chaque $i \in J$, on construit la transitivisée $T_i$ de $R_i$ sur $X_i$.

THEOREME 5.

$(T_i)_J$ détermine une partie totalement floue, notée $T$, de $(X,\sigma)$.

D'autre part, l'enveloppe forte de $T$ est la transitivisée de $R$ sur $(X,\sigma)$.

D'où la construction de la transitivisée de $R$, d'après ce qui précède.

N.B. La preuve du théorème 5 utilise le fait que $J$ est un *treillis de Heyting complet*.

* Construction analogues.

Par des procédés analogues, on peut construire la symétrisée d'une relation totalement floue, l'équivalence totalement floue engendrée par une relation totalement floue ou par une prérelation totalement floue.

* Conséquences pour $JTF^{oo}$.

L'existence et l'allure de l'équivalence totalement floue engendrée par une relation totalement floue donnée nous ont permis de montrer que $JTF^{oo}$ est cofiniment complète (existence de pushouts et de conoyaux de paires), de construire pratiquement les pushouts et les conoyaux de

paires, et de montrer que les conoyaux de paires sont exactement les épimorphismes forts. Le fait que $JTF^{oo}$ est cofiniment complète est utile pour affirmer que cette catégorie est un quasi-topos au sens de Pénon.

* Utilisation pour l'étude des structures algébriques totalement floues.

Dans un article ("totally fuzzy groups", proposé pour le "first IFSA-EC and EURO-WG on "Progress in fuzzy sets in Europe" de Varsovie : 25 → 27 novembre 1986"), nous étudions une notion de *groupe totalement flou :*

un objet non vide $(G,\sigma)$ de $JTF^{oo}$ est un groupe totalement flou si et seulement si :

chaque $G_i$ est un groupe (de la loi $*_i$), ou est vide.

Si $x,y \in G_i$ et $j \leq i$ : $x|_j *_j y|_j = (x *_i y)|_j$

(on pourrait de même définir d'autres structures algébriques totalement floues).

On dit qu'une équivalence totalement floue $R$ sur le groupe totalement flou $(G,\sigma)$ est *compatible* si et seulement si :

pour chaque $i \in J$ tel que $G_i \neq \emptyset$, $R_i$ est compatible avec la structure de groupe de $G_i$.

Si $x,y \in G_i$, si $x', y' \in G_{i'}$ :

$R(x,x') \wedge R(y,y') \leq R(x *_i y, x' *_{i'} y')$.

On appelle *sous-groupe totalement flou* de $(G,\sigma)$ toute partie totalement floue $H$ non vide de $(G,\sigma)$ telle que chaque $H_i$ soit ou vide ou un sous-groupe de $G_i$.

On peut montrer qu'il y a correspondance bijective entre les équivalences totalement floues compatibles de $(G,\sigma)$ et les sous-groupes totalement flous $H$ de $(G,\sigma)$ qui sont des parties *fortes* de $(G,\sigma)$

et telles que chaque $H_i$ non vide soit un sous-groupe distingué de $G_i$.

Cela permet de définir *une notion correcte de sous-groupe totalement flou distingué de* $(G,\sigma)$ :
il ne suffit pas, pour pouvoir convenablement passer au quotient, d'avoir un sous-groupe totalement flou "distingué niveau par niveau", encore faut--il que ce soit une partie totalement floue forte.

Par des méthodes analogues aux méthodes précédentes, on peut construire le sous-groupe totalement flou (resp. le sous-groupe totalement flou distingué) engendré par une partie totalement floue donnée.

Le second est en fait l'enveloppe forte du premier.

## § 6 - ORDRES TOTALEMENT FLOUS.

* THEOREME 6.

Soit $(X,\sigma)$ un objet de $JTF^{oo}$, et soit $R$ une relation totalement floue sur $(X,\sigma)$.

Il y a équivalence entre :

* Pour tout $i \in J$, $R_i$ est un ordre sur $X_i$

* $R$ est un préordre totalement flou sur $(X,\sigma)$ et

$\forall\, x, x', x'' \in X : R(x,x') \wedge R(x',x) \leqq \sigma(x,x')$.

On dit alors que $R$ est un ordre totalement flou sur $(X,\sigma)$. On retrouve la notion donnée par N. Blanchard [5].

Exemple 1. Ordre naturel sur le classificateur de monomorphismes forts de $JTF^{oo}$ (cf. [3]).

Si $(i,\alpha), (j,\beta) \in \Omega$ $(i,j \in J\ ;\ \alpha,\beta \in J\ ;\ \alpha \leqq i,\ \beta \leqq j)$, on pose : $R((i,\alpha), (j,\beta)) = i \wedge j \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$.

Exemple 2. ordre naturel sur un objet puissance faible de $JTF^{oo}$ (cf. [3]).

Si $(X,\sigma)$ est un objet de $JTF^{oo}$, l'objet puissance faible associé est $(T,h)$, où

un élément de $T$ est de la forme $[i,Y]$, où $i \in J$ et où $Y$ est une partie totalement floue forte de $(X,\sigma)$ telle que

$$Y \subset \bigcup_{j \leqq i} X_j$$

$$h([i,Y],[i',j']) = i \wedge i' \wedge \bigvee \{k \in J / \forall\, r \leqq k,\ \forall\, x \in X_r : r \leqq \sigma(x,Y) \leftrightarrow \sigma(x,Y')\},$$

avec $\sigma(x,Y) = \bigvee_{y \in Y} \sigma(x,y)$, $\sigma(x,Y') = \bigvee_{z \in Y'} \sigma(x,z)$.

On définit un ordre totalement flou sur $(T,h)$ en posant :

$$\rho([i,Y],[i',Y']) = i \wedge i' \wedge \bigvee \{k \in J / \forall\, r \leqq k,\ \forall\, x \in X_r : r \leqq \sigma(x,Y) \rightarrow \sigma(x,Y')\}$$

* Morphismes croissants dans $JTF^{oo}$.

* DEFINITION.

Soient $(X,\sigma)$ et $(Y,\tau)$ deux objets de $JTF^{oo}$, respectivement ordonnés par les ordres totalement flous $R$ et $S$.

Soit $M$ un morphisme de $(X,\sigma)$ vers $(Y,\tau)$.

On dit que $M$ est *croissant* si et seulement si chaque $M_i$ est une application croissante de $(X_i, R_i)$ dans $(Y_i, S_i)$.

* THEOREME 7.

Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre :

* $M$ est croissant

* $\forall\, x, x' \in X : R(x,x') \leqq S[M_{\alpha_\sigma(x)}(x), M_{\alpha_\sigma(x')}(x')]$.

## A LA RECHERCHE D'UNE NOTION D'ORDRE TOTALEMENT FLOU TOTAL SELON $JTF^{oo}$

Soit $(X,\sigma)$ un objet de $JTF^{oo}$, et soit $R$ un ordre totalement flou sur $(X,\sigma)$.

Quand est-il raisonnable (selon $JTF^{oo}$) de le dire total ?

Première idée. Si chaque $R_i$ est total (nous dirons alors que $R$ *est* T1).

c'est la totalité "niveau par niveau".

$JTF^{oo}$ n'étant pas la catégorie des J-préfaisceaux, mais des J-préfaisceaux séparés, il y a peu de chances que cette notion soit la bonne.

Deuxième idée.

Rappelons que le treillis des parties totalement floues fortes de $(X,\sigma)$ est complet, et qu'étant données deux telles parties $Y$ et $Z$ leur borne supérieure est l'enveloppe forte $Y \sqcup Z = Y \cup Z$ de $Y \cup Z$ (cf. [3]).

D'autre part, étant donné un ordre totalement flou $R$ sur $(X,\sigma)$, on définit l'ordre totalement flou inverse $R^*$ par $R^*(x,x') = R(x,x')$. Il est facile de voir que, pour tout $i \in J$, $R_i^*$ est l'ordre inverse (au sens usuel) de $R_i$ sur $X_i$.

Considérons $R$ et $R^*$ comme des parties totalement floues fortes de $(X,\sigma) \times (X,\sigma)$ (dont la base est $\bigcup_{i \in J} X_i \times X_i$), il est naturel de dire :

$R$ est total si et seulement si $R \sqcup R^* = \bigcup_{i \in J} X_i \times X_i$ (nous dirons que $R$ *est* T2).

* THEOREME 8.

Soit $R$ un ordre totalement flou sur $(X,\sigma)$. Il y a équivalence entre :

* $R$ est T2
* $\forall\, x, x' \in X : R(x,x') \vee R(x',x) \geqq \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(x')$
* $\forall\, x, x' \in X : R(x,x') \vee R(x',x) = \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(x')$
* Si $i \in J$, si $x, x' \in X_i$, il existe une partie $K$ de $J$ telle que : $\bigvee K = i$ ; $\forall\, k \in K : x|_k \, R_k \, x'|_k$ ou $x'|_k \, R_k \, x|_k$

On voit T1 $\Rightarrow$ T2 ; la réciproque -inexacte en général- est vraie lorsque $J$ est une chaîne.

Inconvénient.

On peut trouver des ordres totalement flous sans extension T2. On n'a donc pas, pour cette généralisation, de théorème de Spilrajn.

Comme R est T1 $\Rightarrow$ R est T2, on n'a pas non plus de théorème de Szpilrajn avec la notion T1.

Troisième idée.

Rappelons que le treillis complet des parties totalement floues fortes de $(X,\sigma)$ est de Heyting (cf. 3 ).

En particulier, étant donnée une partie totalement floue forte $Y$ de $(X,\sigma)$, la partie $\neg Y$ est ainsi constituée :

Si $x \in X_i$ : $x \in (\neg Y)_i \iff \sigma(x,Y) = \bigvee_{y \in Y} \sigma(x,y) = 0$

Considérant $R$ comme une partie totalement floue forte de $(X,\sigma) \times (X,\sigma)$, on peut envisager la partie totalement floue forte $\neg R$ (qui n'est en général pas un ordre totalement flou sur $(X,\sigma)$).

La troisième idée concsiste à dire : R est total si et seulement si $\neg R \subset R^*$ (nous dirons que R *est* T3).

* THEOREME 9.

Soit R un ordre totalement flou sur $(X,\sigma)$. Il y a équivalence entre :

* R est T3
* $\forall\, x, x' \in X : \neg R(x,x') \wedge \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(x') \leq R(x', x)$

* THEOREME 10.

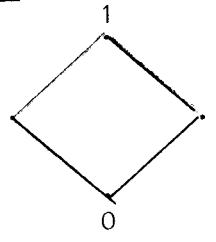
Tout ordre totalement flou a une extension T3 (théorème de Szpilrajn pour $JTF^{oo}$).

* Commentaires.

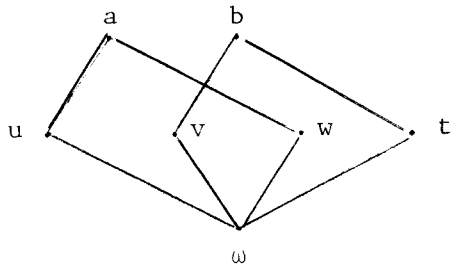
Cette notion est à rapprocher de celle d'ordre linéaire de N. Blanchard (qui n'utilise toutefois, comme U. Höhle, que des égalités "concrètes" telles que l'on ait toujours $\alpha_\sigma(x) = 1$ ).

Elle prouve (cf. [5]) un théorème de Szpilrajn duquel on peut déduire directement notre théorème 10.

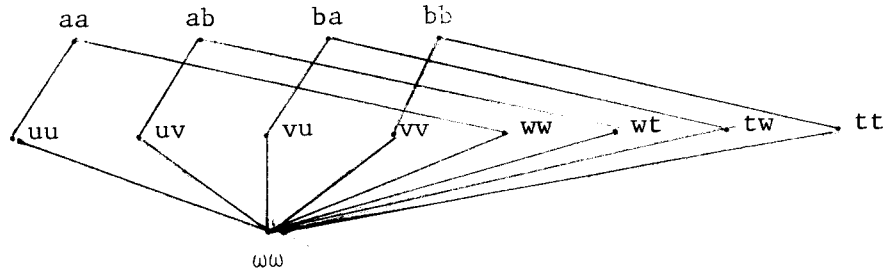
* ILLUSTRATION.

$J =$ 

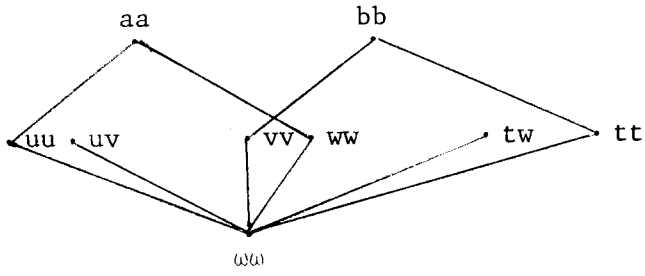
; $(X,\sigma)$ est le J-préfaisceau séparé :



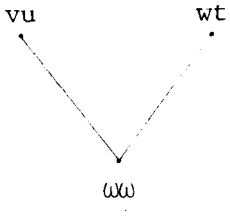
$(X,\sigma) \times (X,\sigma)$ :



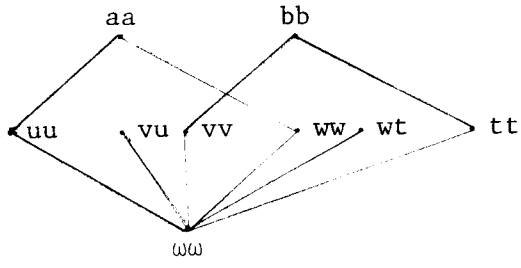

R (ordre totalement flou donné sur $(X,\sigma)$) :




$\neg R$




$R^*$




Comme $\neg R \subset R^*$, l'ordre donné R est T3.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] GOLDBLATT : Topoï : The categorial analysis in logic.
(North-Holland, 1979)

[2] D. PONASSE : Séminaire de Mathématique Floue.
(Université LYON I, polycopié)

[3] J. COULON, J.L. COULON :
- Séminaire de Mathématique Floue.
  (Université LYON I, 1984-1985 et 1985-1986, polycopié)
- Remarques sur certaines catégories d'ensembles totalement flous.
  (BUSEFAL n° 21,23,24)
- Classificateur faible de monomorphismes dans la catégorie JTF°°.
  (BUSEFAL n°26)
- Classificateur de morphismes partiels dans la catégorie JTF°° d'ensembles totalement flous.
  (à paraître dans BUSEFAL)
- About some categories of totally fuzzy sets.
  (Soumis à JMAA)
- Weak classifier of monomorphisms in the category JTF°°.
  (A paraître dans Portugaliae Mathematica)

[4] O. WYLER : Are there topoï in topology ?
(Lecture notes in Math. 540, Springer-Verlag, 1975, 699-719)

J. PENON : Sur les quasi topos.
(Cahiers de topologie et géométrie différentielle, vol.XVIII-2, 1977, 181-218)

[5] N. BLANCHARD, U. HöHLE : Partial ordering in L-underdeterminate sets (LUS).