SOLUTIONS MINIMALES D'EQUATIONS DE RELATIONS FLOUES AVEC LA COMPOSITION MAX-NORME TRIANGULAIRE

L. Bour M. Lamotte

CRAN-LEA Univ. Nancy I BP 239 54506 Vandœuvre les Nancy

1-Introduction.

$\mathbf{I}$ désignant le segment [0,1], soit $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ et $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_p\}$ deux ensembles finis non vides, $F(X)=\{A:X\to\mathbf{I}\}$ et $F(Y)=\{B:Y\to\mathbf{I}\}$ les familles d'ensembles floues sur X et Y, et F(YxX) l'ensemble des relations floues sur YxX.

On considère l'équation de relation floue

$$R\circ A=B \qquad (1)$$

où "$\circ$" désigne une composition "max-norme triangulaire" et où $A\in F(X)$ et $B\in F(Y)$ sont donnés.

R étant l'inconnue dans l'équation (1), on désigne par

$$E=\{R \mid R\circ A=B, R\in F(YxX)\}$$

l'ensemble des solutions de l'équation (1), qui peut aussi s'écrire, en notant par T une norme triangulaire quelconque,

$$\max_{x_j\in X} T(R(y_i,x_j),A(x_j))=B(y_i) \qquad ,y_i\in Y \qquad (2)$$

Cet article a pour but de généraliser les résultats bien connus dans le cas où T(a,b)=min(a,b) [2], c'est à dire de montrer l'existence, sous réserve d'hypothèses supplémentaires portant sur T, d'éléments minimaux dans E, et de calculer ceux-ci.

Pour des raisons de simplicité on écrira parfois r_{ij} pour $R(y_i,x_j)$, a_j et b_i pour $A(x_j)$ et $B(y_i)$, et on pose $J=[1,n]\cap\mathbf{N}=[\![1,n]\!]$. Ainsi la relation floue R sera représentée par une $p*n$-matrice (r_{ij}), A et B par des matrices-colonnes, ${}^tA$ désignant la transposée de la matrice représentant A.

2-Quelques propriétés de l'opérateur de maximalisation τ, ou opérateur de Pedrycz.

Dans [1] il a été défini un opérateur $\tau_T : I^2 \to I$ associé à T, noté plus simplement τ, appelé opérateur de maximalisation associé à la norme triangulaire T et défini par les trois propriétés suivantes:

$$\forall (a,b,c) \in I^3 \qquad a \le c \Rightarrow a \,\tau\, b \le c \,\tau\, b \qquad (3)$$

$$T(a \,\tau\, b, b) \le a \qquad (4)$$

$$T(a,b) \,\tau\, b \ge a \qquad (5)$$

Nous voulons préciser ici quelques propriétés d'un tel opérateur, dont certaines ont déjà été étudiées dans [4] et dans [3] où il est établi que si la norme triangulaire T vérifie la condition supplémentaire de continuité

pour tout $b \in I$, l'application $f_b : x \longmapsto T(x,b)$ est continue sur I (6)

alors l'opérateur τ et l'opérateur α_T défini par

$$a \;\alpha_T\; b = \sup\{x \mid T(x,b) \le a\} \qquad (6')$$

coïncident.

Ainsi les propriétés (3),(4) et (5) impliquent la propriété (7)

$$a \ge b \quad \Leftrightarrow \quad a \,\tau\, b = 1 \qquad (7)$$

car $T(1,b) \,\tau\, b = b \,\tau\, b \ge 1$ donc $b \,\tau\, b = 1$ et $a \ge b \Rightarrow a \,\tau\, b \ge b \,\tau\, b = 1$

Réciproquement $a \,\tau\, b = 1 \;\Rightarrow\; T(a \,\tau\, b, b) = b \le a$.

On obtient également

$$T(a,b) \le c \quad \Leftrightarrow \quad a \le c \,\tau\, b \qquad (8)$$

car $T(a,b) \le c \Rightarrow a \le T(a,b) \,\tau\, b \le c \,\tau\, b$ et $a \le c \,\tau\, b \Rightarrow T(a,b) \le T(c \,\tau\, b, b) \le c$.

De la propriété (8) on déduit, en particulier

$$T(a,b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \le 0 \,\tau\, b \qquad (9)$$

$$\text{et} \quad c < T(a,b) \quad \Rightarrow \quad c \,\tau\, b < a \qquad (10)$$

Dans le cas où T vérifie (6) l'inégalité (4) peut être remplacée par une égalité et on a le résultat suivant:

Proposition 1

Si la norme triangulaire T vérifie la condition (6) alors, pour tout a et b dans I on a

$$T(a \,\tau\, b, b) = \min(a,b) \qquad (11)$$

Si $a \ge b$ (11) est vérifié car, d'après (7), $T(a \,\tau\, b,b) = T(1,b) = b = \min(a,b)$

Si $a < b$ on sait, d'après (4), que $T(a \,\tau\, b,b) \le a$; supposons $T(a \,\tau\, b,b) < a$: alors, la fonction $x \longmapsto T(x,b)$ étant continue sur I et prenant ses valeurs sur $[0,b]$, il existe $x_0 \in I$ tel que $T(x_0,b) = a$ d'où $T(a \,\tau\, b,b) < T(x_0,b)$ et donc $a\tau b < x_0$. On a donc nécessairement $T(a \,\tau\, b,b) = a = \min(a,b)$.

Remarque 1: Dans le cas où la norme triangulaire T admet un générateur additif f on sait [1] que l'opérateur τ peut être défini par

$$a \tau b=\begin{cases} 1 & \text{si } a \geq b \\ f^{-1}(f(a)-f(b)) & \text{si } a < b \end{cases}$$

et la proposition (1) est immédiatement vérifiée car, pour $a < b$,

$$T(a \tau b,b)=f^{(-1)}(f(a \tau b)+f(b))=f^{-1}(f(a))=a$$

Remarque 2: De (11) on déduit, en particulier

$$\forall (a,b)\in \mathbf{I}^2,\ T(a \tau b,b) \tau b=a \tau b \qquad (12)$$

car $\min(a,b) \tau b=a \tau b$

De même, sous certaines conditions, l'inégalité de la propriété (5) peut être remplacée par une égalité.

Proposition 2

Si la norme triangulaire T vérifie la condition (6) et s'il existe $c\in \mathbf{I}$ tel que $c \tau b=a$, alors $T(a,b) \tau b=a$

car $T(a,b) \tau b=T(c \tau b,b) \tau b=c \tau b=a$.

La fonction $x \longmapsto x \tau b$ étant monotone sur $\mathbf{I}$ admet en tout point de $\mathbf{I}$ une limite à gauche. On pose, pour $b\neq 0$,

$$(b-0) \tau b=\lim_{\substack{x\to b \\ x<b}}(x \tau b)=\sup_{x<b}(x \tau b)$$

Proposition 3

Si la fonction $f_b:x \longmapsto T(x,b)$ est continue sur $\mathbf{I}$ et si la fonction $g_b:x \longmapsto x \tau b$ est continue sur $[0,b[$ alors $\forall b>0,\ \forall a\in [0 \tau b,(b-0) \tau b[,\ T(a,b) \tau b=a$

car, pour $b\neq 0$, $g_b([0,b[)=[0 \tau b,(b-0) \tau b[$ et g_b est continue sur $[0,b[$ donc

$\forall a\in [0 \tau b,(b-0) \tau b[,\ \exists c\in [0,b[:\ c \tau b=a$ et $T(a,b) \tau b=a$ d'après la proposition 2

Remarque. Si la fonction g_b est continue sur $[0,b]$ alors $(b-0)\tau b=b \tau b=1$ et il vient

$$\forall a\in [0 \tau b,1],\ T(a,b) \tau b=a$$

Ceci est vrai notamment dans le cas où T admet un générateur additif f car alors, pour $a \leq b$,

$$a \tau b=f^{-1}(f(a)-f(b))$$

d'où $T(a,b) \tau b=f^{-1}(f(T(a,b))-f(b))=f^{-1}[f(f^{(-1)}(f(a)+f(b)))-f(b)]$.

Si T est stricte, $f^{(-1)}=f^{-1}$ et $\forall (a,b)\in \mathbf{I}^2,\ T(a,b) \tau b=a \quad (b\neq 0)$;

si T n'est pas stricte on a $f^{(-1)}=f^{-1}$ si $f(a)+f(b) \leq 1$, c'est à dire si $f(a) \leq 1-f(b)$ ou $a \geq f^{-1}(f(0)-f(b))=0 \tau b$ et on retrouve le résultat.

3-Recherche d'une solution remarquable R^* de l'équation (1).

Il s'agit ici de généraliser l'un des résultats obtenus dans le cas où "$\circ$"="max-min", à savoir l'existence d'une solution remarquable $R^* \in E$ telle que , si $E \neq \emptyset$, toute relation floue $R \in F(Y \times X)$ vérifiant $R^* \leq R \leq \check{R}$ appartient à E.

Théorème 1

Pour que l'ensemble E des solutions de l'équation (1) soit non vide il faut que

$$\forall i \in |[1,p]| \quad , \qquad b_i \leq \max_{j \in J} a_j$$

La condition est suffisante si T vérifie la condition de continuité (6). La condition est nécessaire car, si $E \neq \emptyset$, il existe $R \in E$ tel que

$$\forall i \in |[1,p]|, \qquad b_i = \max_{j \in J} T(r_{ij}, a_j) \leq \max_{j \in J} a_j$$

Si la fonction $x \longmapsto T(x,b)$ est continue sur I la condition est suffisante. En effet, dans ce cas on sait, d'après (6'), que T admet un opérateur de maximalisation τ et, en posant, pour $i \in |[1,p]|$,

$$J_1(i) = \{j \in J \mid a_j \geq b_i\} \quad \text{et} \quad J_2(i) = \{j \in J \mid a_j < b_i\}$$

$$(B \textcircled{\tau}^t A)(y_i, x_j) = B(y_i) \, \tau \, {}^tA(x_j) = b_i \, \tau \, a_j$$

on a, d'après la proposition 1, et parce que $J_1 \neq \emptyset$,

$$\max_{j \in J} T(b_i \, \tau \, a_j, a_j) = \max[\max_{j \in J_1(i)} T(b_i \, \tau \, a_j, a_j), \max_{j \in J_2(i)} T(b_i \, \tau \, a_j, a_j)]$$

$$= \max[b_i, \max_{j \in J_2(i)} a_j] = b_i$$

donc $(B \textcircled{\tau}^t A) \circ A = B$ et $E \neq \emptyset$.

Remarque. Si la fonction $x \longmapsto T(x,b)$ n'est pas continue sur I la condition du théorème 1 n'est pas toujours suffisante car alors, même si τ existe, $B \textcircled{\tau}^t A$ n'est pas toujours élément de E.

Exemple: On considère la norme triangulaire discontinue T_5 [1] définie par

$$T_5(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a+b-1 \leq 0 \\ \min(a,b) & \text{si } a+b-1 > 0 \end{cases}$$

et qui admet un opérateur de maximalisation τ défini par

$$a \tau b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq b \\ a & \text{si } 1-b \leq a < b \\ 1-b & \text{si } a < \min(b,1-b) \end{cases}$$

Pour ${}^tA=(0,2 \quad 0,4 \quad 0,6)$ et ${}^tB=(0,4 \quad 0,6)$, l'ensemble E des solutions de l'équation (1) n'est pas vide car

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 1 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

mais $B \textcircled{\tau} {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0,4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E.

Pour ${}^tA=(0,4 \quad 0,6)$ et ${}^tB=(0,3 \quad 0)$, avec la même norme triangulaire T_5, l'ensemble E est vide, bien que $b_i \leq \max\limits_{j \in J} a_j$

A l'aide de l'opérateur τ nous allons maintenant définir un opérateur θ de I^2 dans I permettant de calculer un élément remarquable de E, qui sera noté R^*.

<u>Définition.</u>

On pose, pour tout (a,b) de I^2,

$$a \theta b = \begin{cases} 0 & \text{si } a > b \\ a \tau b & \text{si } a < b \\ (b-0) \tau b & \text{si } a = b \end{cases}$$

où τ est l'opérateur de maximalisation associé à une norme triangulaire T et où $(b-0) \tau b = \lim\limits_{\substack{a \to b \\ a<b}} a \tau b$

Si la fonction $x \longmapsto x \tau b$ est continue en b on a $(b-0) \tau b = 1$.

D'après la proposition 1 on a, pour toute norme triangulaire vérifiant (6)

$$T(x \tau b, b) = \min(x,b)$$

donc $T(x \theta b, b) = x$ pour $x < b$ et, puisque T vérifie (6)

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} T(x \tau b, b) = T((b-0) \tau b, b) = \lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} x = b$$

d'où
$$T(a \theta b, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > b \\ a & \text{si } a \leq b \end{cases} \qquad (13)$$

En posant $(B \textcircled{\theta} {}^tA)(y,x) = B(y) \theta {}^tA(x)$ on obtient le résultat suivant:

Théorème 2.

Si T est une norme triangulaire vérifiant la condition de continuité (6) et si $E\neq\emptyset$ alors $R^*=B\,\textcircled{\theta}\,{}^tA$ appartient à E.

Démonstration: Si T vérifie (6) on est assuré, d'après (6'), de l'existence de τ, et donc de l'opérateur θ, associé à T.

Posons $B(y_i)\,\theta\,{}^tA(x_j)=b_i\,\theta\,a_j$, $R^*(y_i,x_j)=r^*_{ij}$ et ${}^tA(x_j)=A(x_j)=a_j$.

R^* appartient à E si $R^*\circ A=B$ c'est à dire si

$$\forall i\in [\![1,p]\!],\ \max_{j\in J} T(r^*_{ij},a_j)=\max_{j\in J} T(b_i\,\theta\,a_j,a_j)=b_i.$$

Or, en utilisant (13),

$$\max_{j\in J} T(b_i\,\theta\,a_j,a_j)=\max\left[\ \max_{j\in J_1(i)} T(b_i\,\theta\,a_j,a_j),\max_{j\in J_2(i)} T(b_i\,\theta\,a_j,a_j)\ \right]$$

$$=\max\left[\ \max_{j\in J_1(i)} b_i,0\ \right]=b_i$$

car, d'après le théorème 1, $J_1(i)\neq\emptyset$ puisque $E\neq\emptyset$.

Donc R^* est bien élément de E.

Il est immédiat de vérifier que si $E\neq\emptyset$ et si R est un élément de $F(Y\times X)$ vérifiant $R^*\leq R\leq \check{R}$, où $\check{R}=B\,\textcircled{\tau}\,{}^tA$, alors $R\in E$.

La connaissance de R^* permet également de construire les éléments minimaux de E, lorsqu'ils existent.

4-Eléments minimaux de E.

Définition.

Un élément R_k de E est minimal si ($R\in E$ et $R\leq R_k$) $\Rightarrow$ $R=R_k$.

Soit $b\neq 0$; avec les hypothèses de la proposition 3 on a

$$\forall a\in [0\,\tau\,b,(b-0)\,\tau\,b[\ ,\ T(a,b)\,\tau\,b=a<1$$

donc, nécessairement, $T(a,b)<b$ et $T(a,b)\,\tau\,b=T(a,b)\ \theta\,b$, d'où le résultat suivant:

Lemme | Si la fonction $f_b : x\longmapsto T(x,b)$ est continue sur I et si la fonction $g_b: x\longmapsto x\,\tau\,b$ est continue sur $[0,b[$, alors $\forall b\neq 0,\ \forall a\in [0\,\theta\,b,b\,\theta\,b[\ ,\ T(a,b)\,\theta\,b=a$.

On pose $\beta_0=\{\ i\in [\![1,p]\!]\ |\ b_i=0\ \}$

$\beta_1=\{\ i\in [\![1,p]\!]\ |\ b_i\neq 0\ \}$

$\rho(i)=\{\ j\in J\ |\ r^*_{ij}\neq 0\ \}$

Théorème 3 Soit T une norme triangulaire et τ l'opérateur de maximalisation associé. Si, pour tout $b \in \mathbf{I}$,

(i) $\forall i \in |[1,p]|$, $b_i \leq \max_{j \in J} a_j$

(ii) l'application $x \longmapsto T(x,b)$ est continue sur $\mathbf{I}$

(iii) l'application $x \longmapsto x \tau b$ est continue $[0,b[$

alors E contient m éléments minimaux où $m = \prod_{i \in \beta_1} \text{card } \rho(i)$

Démonstration. Les conditions (i) et (ii) impliquent $E \neq \emptyset$.

Si $\beta_1 = \emptyset$, c'est à dire si B=0, alors E contient un élément minimal unique $R_0=0$.

Si $\beta_1 \neq \emptyset$ alors, pour tout $i \in \beta_1$ on a $\rho(i) \neq \emptyset$: on désignera par k l'un des éléments de $\rho(i)$ lorsque i appartient à β_1 et on pose

$$R_k(y_i,x_j)=0 \qquad \text{si } (i,j) \in \beta_0 x J$$

$$R_k(y_i,x_j)=0 \qquad \text{si } (i,j) \in \beta_1 x (J-\{k\})$$

$$R_k(y_i,x_k)=R^*(y_i,x_k) \neq 0 \quad \text{si } i \in \beta_1$$

$R_k \in E$ c'est à dire $R_k \circ A = B$ car

$$\forall i \in \beta_0, \ \max_{j \in J} T(R_k(y_i,x_j),A(x_j))=0=B(y_i) \quad \text{et}$$

$$\forall i \in \beta_1, \ \max_{j \in J} T(R_k(y_i,x_j),A(x_j))=T(R^*(y_i,x_k),A(x_k))$$
$$=T(B(y_i) \theta A(x_k),A(x_k))=B(y_i)$$

d'après (13), car $B(y_i) \theta A(x_k) \neq 0$ donc $B(y_i) \leq A(x_k)$.

R_k est minimale. Soit $R \leq R_k$, $R \in E$:

$\forall (i,j) \in \beta_0 x J$ et $\forall (i,j) \in \beta_1 x \{J-\{k\}\}$, $R(y_i,x_j)=R_k(y_i,x_j)=0$ et, pour tout $i \in \beta_1$, il existe un élément k et un seul de J tel que $0<R(y_i,x_k) \leq R_k(y_i,x_k)$. On a $T(R(y_i,x_k),A(x_k))=B(y_i) > 0$ donc, d'après (10)

$$0 \tau A(x_k)=0 \theta A(x_k) < R(y_i,x_k).$$

Supposons $R(y_i,x_k) < R_k(y_i,x_k)=B(y_i) \theta A(x_k)$, alors, d'après le lemme, puisque $R(y_i,x_k) \in [0 \theta A(x_k),B(y_i) \theta A(x_k)[$,

$$T(R(y_i,x_k),A(x_k)) \theta A(x_k)=R(y_i,x_k)=B(y_i) \theta A(x_k)$$

donc on ne peut pas avoir $R(y_i,x_k)<R_k(y_i,x_k)$ et R_k est minimale.

Le nombre d'éléments minimaux m de E est égal au nombre de relations R_k distinctes donc

$$m = \prod_{i \in \beta_1} \text{card } \rho(i)$$

Corollaire: Les hypothèses sont celles du théorème 3. Pour que E admette un élément minimal unique il faut et il suffit que $\forall i \in \beta_1$, card $\rho(i)=1$ ou que $B=0$.

5-Problème dual.

Soit S la conorme triangulaire duale de la norme triangulaire T.

On considère maintenant des équations de relations floues de la forme

$$R \blacklozenge A_1 = B_1$$

où " $\blacklozenge$ " est une composition "min-S"

On pose, pour $x \in \mathbf{I}$, $\bar{x}=1-x$.

Proposition

Si R est solution de l'équation (1) $R \circ A = B$,
alors $\overline{R}$ est solution de l'équation (1') $R \blacklozenge \overline{A} = \overline{B}$.

En effet $R \circ A = B \Leftrightarrow \max\limits_{j \in J} T(r_{ij}, a_j) = b_i$ et, puisque $T(a,b)=1-S(1-a,1-b)$,

$$\max_{j \in J} T(r_{ij}, a_j) = b_i = 1 - \min_{j \in J} S(1-r_{ij}, 1-a_j)$$

c'est à dire $\min\limits_{j \in J} S(1-r_{ij}, 1-a_j) = 1-b_i$

On a bien $\min\limits_{j \in J} S(\overline{r_{ij}}, \overline{a_j}) = \overline{b_i}$.

Il est ainsi aisé de déduire de ce qui précède les solutions remarquables de l'équation (1'). En particulier, si $\check{R}$ est la solution maximale de l'équation (1), quand elle existe, alors $\overline{\check{R}}$ est la solution minimale de (1'), et si R_k est une solution minimale de (1), $\overline{R_k}$ est une solution maximale de (1').

Références.

[1] L. Bour, G. Hirsch, M. Lamotte Détermination d'un opérateur de maximalisation pour la résolution d'équations de relations floues. Busefal 25 (1986) pp 95-106

[2] A. Kaufmann Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, tome 4,Masson 1977,pp 116-166

[3] M. Miyakoshi, M. Shimbo Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms.Fuzzy Sets and Systems 16 (1985) pp 53-63

[4] W. Pedrycz Fuzzy relational equations with generalized connectives and their applications. Fuzzy Sets and Systems 10 (1983) pp 185-201.