FILES D'ATTENTE ET PSEUDO-PROBABILITES FLOUES

par A. KAUFMANN

Nous ne rappellerons pas la théorie des files d'attente renvoyant certains lecteurs à quelques-uns de nos ouvrages (1) et nous nous reporterons à la Note N° 150.- Pseudo-probabilités floues.

Supposons que, dans unphénomène d'attente à une seule station, le taux moyen d'arrivée λ soit mal connu et donné seulement dans un intervalle de confiance :

1 $$\lambda = [\lambda_1 , \quad \lambda_2] .$$

De même, en ce qui concerne le service, le taux moyen de ce service est mal connu et donné par :

2 $$\mu = [\mu_1 , \quad \mu_2] .$$

On considère ici le fonctionnement du système d'attente en régime permanent.

Dans la théorie des files d'attente, la quantité ψ :

3 $$\psi = \frac{\lambda}{\mu}$$

---

(1) A. Kaufmann.- Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle. Ed. Dunod.- Paris.- A. Kaufmann et R. Cruon.- Les phénomènes d'attente.- Ed. Dunod.- Paris.

est appelée "intensité de trafic" où elle joue un rôle important.

Dans le cas où λ et μ sont connues chacun par un intervalle de confiance, il en sera de même de ψ :

4
$$\psi = [\psi_1, \psi_2] = \frac{[\lambda_1, \lambda_2]}{[\mu_1, \mu_2]} = [\lambda_1/\mu_2, \lambda_2/\mu_1],$$

avec $\lambda_2 \leqslant \mu_1$ autrement la file d'attente pourrait ne pas être finie. Avec cette hypothèse, on retrouvera :

5
$$0 < \psi < 1 .$$

La théorie des files d'attente est une théorie probabiliste. Dans le cas où les arrivées suivent la loi de Poisson et les intervalles de service la loi exponentielle, on démontre facilement que la loi de probabilité de n unités dans le système est :

6
$$p(n) = \psi^n (1 - \psi).$$

Cette loi n'est pas monotone et possède un maximum pour $\psi = \frac{n}{n+1}$.

Par contre, la loi :

7
$$pr(N \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \psi^k (1-\psi) = (1-\psi)\sum_{k=0}^{n} \psi^k = (1-\psi) \cdot \frac{1-\psi^{n+1}}{1-\psi} = 1 - \psi^{n+1}.$$

est une loi monotone.

De même évidemment que la loi complémentaire.

8
$$pr(N > n) = \psi^{n+1}.$$

Tout utilisateur de la théorie des probabilités sait que l'on ne devrait pas appeler probabilité un intervalle de confiance de probabilités car on ne retrouve pas les propriétés des probabilités, en particulier la propriété fondamentale d'une somme de toutes les probabilités des cas possibles égale à 1. On les nomme alors pseudo-probabilités et on les notera π au lieu de p . Nous ne pouvons faire intervenir les intervalles de confiance que dans le cas de fonctions monotones comme (7) et (8). On note

9 $$\pi_1(n) = \psi_1^{\,n+1},$$

10 $$\pi_2(n) = \psi_2^{\,n+1},$$

11 $$(\psi_2 > \psi_1) \Longleftrightarrow (\pi_2 > \pi_1).$$

Et nous pouvons poser :

12 $$[\pi_1(n),\ \pi_2(n)] = [\psi_1^{\,n+1},\ \psi_2^{\,n+1}]$$

avec :

13 $$[\psi_1,\ \psi_2] = [\lambda_1/\mu_2,\ \lambda_2/\mu_1],\quad \lambda_2 < \mu_1 .$$

Il sera utile, dans ce qui suivra , pour éviter toute ambiguïté avec la théorie des probabilités d'appeler les quantités π : indicateurs de confiance.

Ainsi, l'indicateur de confiance avec $\lambda_1 = 2.8$, $\lambda_2 = 3.2$, $\mu_1 = 4.1$, $\mu_2 = 4.3$:

14 $$[\pi_1(5),\ \pi_2(5)] = [0.076,\ 0.186]$$

qu'il y ait plus de 5 unités dans le système est situé entre 0.076 et 0.186 .

A titre d'indication, on donne, en fonction de n les intervalles de confiance (figure 1).

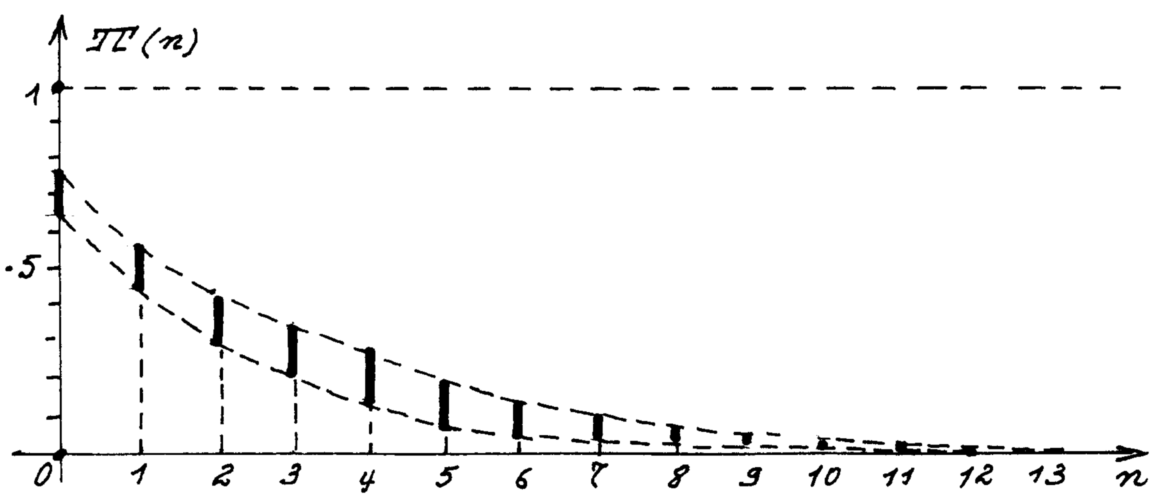

figure 1

Le principe que nous allons utiliser sera alors le suivant : toute formule relative aux files d'attente qui sera monotone (croissante ou décroissante) par rapport au paramètre considéré pourra être considérée comme pouvant s'exprimer par un intervalle de confiance.

Ainsi, toujours dans le cas d'une file d'attente unique, arrivée poissonnenne service exponentiel, le nombre moyen d'unités dans le système est donné par :

18 $$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p(n) = \frac{\psi}{1-\psi}$$

où $p(n)$ est la probabilité qu'il y ait n unités dans la file. $p(n)$ n'est pas monotone par rapport à ψ mais $\bar{n}$ est monotone par rapport à ψ. On posera alors :

19 $$[\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \left[\frac{\psi_1}{1-\psi_1}, \frac{\psi_2}{1-\psi_2}\right].$$

Par exemple avec les données (14).

20 $$[\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \left[\frac{0.651}{1-0.651}, \frac{0.756}{1-0.756}\right]$$
$$= [1.865, 3.098].$$

Ainsi, ce nombre moyen peut varier entre 2 et 3 (on élimine les parties fractionnaires qui ne sont pas significatives ici).

Le nombre donné en (18) correspond au nombre moyen d'unités en attente (on ne compte pas l'unité qui est en train d'être servie), on a :

21 $$\bar{\nu} = \frac{\psi^2}{1-\psi}.$$

C'est une fonction monotone. Avec les données (14)

22 $$[\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2] = \left[\frac{0.651^2}{1-0.651}, \frac{0.756^2}{1-0.756}\right]$$
$$= [1.214, 2.342].$$

La file d'attente est de 1 à 2 unités environ.

D'autres résultats donnent aussi des formules dotées de la monotonie.

Le temps moyen d'attente dans la file :

23 $$\bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}$$

et le temps moyen d'attente dans le système :

24 $$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda}.$$

De là :

25 $$[\bar{t}_{f1}, \quad \bar{t}_{f2}] = \frac{1}{[\lambda_1, \quad \lambda_2]} \cdot \left[\frac{\psi_1^2}{1-\psi_1} \quad \frac{\psi_2^2}{1-\psi_2}\right]$$
$$= \left[\frac{\psi_1^2}{\lambda_2(1-\psi_1)}, \quad \frac{\psi_2^2}{\lambda_1(1-\psi_2)}\right].$$

Vérifions la monotonie.

On a toujours :

26 $$\lambda_1 \leqslant \lambda_2,$$

d'où :

27 $$\frac{1}{\lambda_2} \leqslant \frac{1}{\lambda_1};$$

d'autre part :

28 $$\frac{\psi_1^2}{1-\psi_1} \leqslant \frac{\psi_2^2}{1-\psi_2},$$

donc :

29 $$\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_1^2}{1-\psi_1} \leqslant \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\psi_2^2}{1-\psi_2}.$$

Pour le temps d'attente dans le système, on a :

30 $$[\bar{t}_{s1}, \quad \bar{t}_{s2}] = \frac{1}{[\lambda_1, \quad \lambda_2]} \cdot \left[\frac{\psi_1}{1-\psi_1}, \quad \frac{\psi_2}{1-\psi_2}\right]$$
$$= \left[\frac{\psi_1}{\lambda_2(1-\psi_1)} \quad \frac{\psi_2}{\lambda_1(1-\psi_2)}\right].$$

Vérifions la monotonie.

On a, par hypothèse :

31 $$\psi_1 \leqslant \psi_2,$$

32 $$1-\psi_1 \geqslant 1-\psi_2 ,$$

33 $$\frac{\psi_1}{1-\psi_1} \leqslant \frac{\psi_2}{1-\psi_2} ,$$

d'où, en se reportant à (27)

34 $$\frac{1}{\lambda_2}\cdot\frac{\psi_1}{1-\psi_1} \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{\psi_2}{1-\psi_2} .$$

Reprenons les valeurs numériques (14)

35 $$\psi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} = \frac{2.8}{4.3} = 0.651,$$

36 $$\psi_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_1} = \frac{3.1}{4.1} = 0.756,$$

37
38 $$\frac{\psi_1^2}{1-\psi_1} = 1.214 , \quad \frac{\psi_2^2}{1-\psi_2} = 2.342,$$

39
40 $$\frac{1}{\lambda_2} = 0.322 , \quad \frac{1}{\lambda_1} = 0.357,$$

41
42 $$\frac{\psi_1}{1-\psi_1} = 1.865 , \quad \frac{\psi_2}{1-\psi_2} = 3.098,$$

43 $$[\bar{t}_{f1}, \ \bar{t}_{f2}] = [0.322 \times 1.214, \ 0.357 \times 2.342] = [0.391, \ 0.836],$$

44 $$[\bar{t}_{s1}, \ \bar{t}_{s2}] = [0.322 \times 1.865, \ 0.357 \times 3.098] = [0.601, \ 1.106].$$

A noter que, contrairement à ce qui se passe avec des données non floues, la différence entre (44) et (43) ne donne pas la durée du service c'est-à-dire $\frac{1}{\mu}$.

45 $$[\bar{t}_{s1}, \ \bar{t}_{s2}] (-) [\bar{t}_{f1}, \ \bar{t}_{f2}]$$

$$= \left[\frac{1}{\lambda_2}\cdot\frac{\psi_1}{1-\psi_1} , \ \frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{\psi_2}{1-\psi_2} \right]$$

$$(-) \left[\frac{1}{\lambda_2}\cdot\frac{\psi_1^2}{1-\psi_1} , \ \frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{\psi_2^2}{1-\psi_2} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{\lambda_2}\cdot\frac{\psi_1}{1-\psi_1} - \frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{\psi_2^2}{1-\psi_2} , \ \frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{\psi_2}{1-\psi_2} - \frac{1}{\lambda_2}\cdot\frac{\psi_1^2}{1-\psi_1} \right] .$$

Si l'on fait $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ et $\psi_1 = \psi_2$, on retrouve :

46 $$\bar{t}_s - \bar{t}_f = \frac{1}{\mu} .$$

Ce phénomène est bien connu dans la théorie des intervalles de confiance comme dans le flou.

47 $$([a_1, a_2] (-) [b_1, b_2]) (+) [b_1, b_2]$$
$$= [a_1 - b_2 + b_1, a_2 - b_1 + b_2] \neq [a_1, a_2] .$$

On ne retrouve pas non plus la propriété (46) avec la différence de Minkowski :

48 $$[\bar{t}_{s1} , \bar{t}_{s2}] \underset{m}{(-)} [\bar{t}_{f1} , \bar{t}_{f2}]$$
$$= [\frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\psi_1}{1-\psi_1} - \frac{1}{\lambda_2} \frac{\psi_1^2}{1-\psi_1} , \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\psi_2}{1-\psi_2} - \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\psi_2^2}{1-\psi_2}]$$
$$\neq [\frac{1}{\mu_2} , \frac{1}{\mu_1}] .$$

On a alors, si $\bar{d}$ désigne la durée moyenne du service :

49 $$[\bar{d}_{\sigma 1} , \bar{d}_{\sigma 2}] = 1 (:) [\mu_1 , \mu_2]$$
$$= [\frac{1}{\mu_2} , \frac{1}{\mu_1}] .$$

De même, on aura, si $\bar{d}_E$ désigne la durée moyenne entre deux arrivées :

50 $$[\bar{d}_{E1} , \bar{d}_{E2}] = [\frac{1}{\lambda_2} , \frac{1}{\lambda_1}] .$$

Comme on le voit, on peut manipuler des données incertaines dans la théorie des files d'attente de cette manière sous réserve de préserver la monotonie.

Ce que nous avons fait sans difficulté avec des intervalles de confiance, on le fera aussi sans difficulté avec des nombres flous triangulaires avec l'approximation :

51 $$1 (:) (a_1, a_2, a_3) \overset{\mathrm{n}}{=} (\frac{1}{a_3} , \frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_1}) .$$

Et on pourrait le faire avec des données floues quelconques niveau par niveau.

Nous allons examiner maintenant le cas de plusieurs stations considérées comme identiques et en parallèle.

Soit S le nombre de stations qui assurent le service. Si les S stations ne sont pas occupées lorsqu'une unité se présente, cette unité est servie immédiatement ; au contraire, si les S stations sont toutes occupées, l'unité doit attendre et il se forme une file d'attente. Appelons n le nombre d'unités qui sont dans le système. Si $n \leqslant S$, les unités n'ont pas à attendre et si $n > S$, il y a une file d'attente de $n - S$ unités.

Dans le cas formel, l'étude est sensiblement plus difficile que dans le cas précédent mais cette étude a été faite depuis longtemps et est bien connue. Nous allons rencontrer les mêmes difficultés et nous montrerons ce que l'on peut décrire dans le cas où les données d'entrée et de service sont incertaines et connues seulement sous la forme d'intervalles de confiance. S , bien entendu, est une donnée formelle, c'est une décision ou hypothèse de base sur la structure du système.

Rappelons les conditions et spécifications de la théorie probabiliste d'une file d'attente à plusieurs stations. Lorsqu'une station est libre, le premier client de la file est servi par cette station, il n'y a aucune préférence d'un client pour une station. Toutes les stations ont un même taux moyen de service et la loi du service est exponentielle. Les arrivées suivent la loi de Poisson (intervalles d'arrivée selon la loi exponentielle) dont le taux moyen est λ . On appelle :

S le nombre de stations,
ν le nombre d'unités dans la file d'attente,
n le nombre total d'unités dans le système, c'est-à-dire dans la file et dans les stations soit $n = \nu + j$,
j le nombre de clients en cours de service dans les stations ($0 \leqslant j \leqslant S$)
ρ le nombre de stations inoccupées,
$\bar{n}, \bar{\nu}, \bar{j}, \bar{\rho}$ les espérances mathématiques de n , ν , ρ et j ,
$\bar{t}_f$ le temps moyen d'attente dans la file avant le service.

Il y a une file unique et les clients vont vers une station libre dès qu'elle est libre.

Tant que $j < S$, c'est-à-dire lorsque toutes les stations ne sont pas occupées, il n'y a pas de file d'attente et toute unité qui arrive est immédiatement servie ($\nu = 0$). Au contraire, si $j = S$, une file d'attente peut se former, alors $\nu \geqslant 0$.

Cette fois encore, on se place dans le cas du fonctionnement du système en régime permanent.

On posera :

52 $$\psi = \frac{\lambda}{\mu} .$$

Cette grandeur sera appelée "intensité de trafic par station". On note que l'on s'imposera :

53 $$\frac{\lambda}{\mu S} < 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\lambda}{\mu} < S ;$$

sinon la file deviendrait infinie.

La probabilité $p(n)$ qu'il y ait n unités dans le système (c'est-à-dire clients qui sont, soit en train d'être servis ou dans la file d'attente) est donnée par :

54 $$p(n) = p(0) \cdot \frac{\psi^n}{n!}, \quad 1 \leqslant n \leqslant S,$$
$$= p(0) \cdot \frac{\psi^n}{S!\, S^{n-S}}, \quad n \geqslant S.$$

avec

55 $$p(0) = \frac{1}{\dfrac{\psi^S}{S!\left(1 - \dfrac{\psi}{S}\right)} + 1 + \dfrac{\psi}{1} + \dfrac{\psi^2}{2!} + \cdots + \dfrac{\psi^{S-1}}{(S-1)!}}$$

ou encore :

56 $$p(n) = \frac{\psi}{n}\, p(n-1), \quad 1 \leqslant n \leqslant S,$$
$$= \frac{\psi}{S}\, p(n-1), \quad n \geqslant S.$$

Cette loi de probabilité n'est pas monotone. Par contre :

57 $$pr(N \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} p_k$$

et

58 $$pr(N > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k$$

sont des lois cumulées monotones. On peut alors remplacer les probabilités par des indicateurs de confiance $\pi(n)$:

59 $$\pi(n) = [\pi_1(n), \pi_2(n)]$$
$$= [pr_1(N>n), pr_2(N>n)]$$

où $\pi_1(n)$ est relatif à ψ_1 et $\pi_2(n)$ à ψ_2 avec :

60 $$\psi = [\psi_1, \psi_2] = \frac{[\lambda_1, \lambda_2]}{[\mu_1, \mu_2]}$$
$$= [\lambda_1/\mu_2, \lambda_2/\mu_1], \quad \lambda_2/\mu_1 < S.$$

Le calcul de $\pi_1(n)$ et $\pi_2(n)$ s'effectuera donc de la façon suivante :

61 $$\pi_1(n) = \pi_1(0).\frac{\psi_1^{\,n}}{n!} \quad , 1 \leq n < S$$

$$= \pi_1(0).\frac{\psi_1^{\,n}}{S!\,S^{n-S}}, \quad n \geqslant S .$$

62 $$\pi_1(0) = \frac{1}{\dfrac{\psi_1^{\,S}}{S!\,(1-\frac{\psi_1}{S})} + 1 + \dfrac{\psi_1}{1!} + \dfrac{\psi_1}{2!} + \cdots + \dfrac{\psi_1^{\,S-1}}{(S-1)!}} .$$

63 $$\pi_2(n) = \pi_2(0).\frac{\psi_2^{\,n}}{n!}, \quad 1 \leq n < S,$$

$$= \pi_2(0).\frac{\psi_2^{\,n}}{S!\,S^{n-S}},$$

64 $$\pi_2(0) = \frac{1}{\dfrac{\psi_2^{\,S}}{S!\,(1-\frac{\psi_2}{S})} + 1 + \dfrac{\psi_2}{1!} + \dfrac{\psi_2}{2!} + \cdots + \dfrac{\psi_2^{\,S-1}}{(S-1)!}}$$

65 $$\Pi_1(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_1(n)$$

66 $$\Pi_2(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_2(n)$$

On peut prendre aussi pour $\pi_1(n)$ et $\pi_2(n)$.

67 $$\pi_1(n) = \pi_1(0).\frac{\psi_1^{\,n}}{n!}, \quad 1 \leqslant n < S,$$

$$= \pi_1(0).\frac{\psi_1}{S!\,S^{n-S}}, \quad n \geqslant S .$$

68 $$\pi_2(n) = \pi_2(0).\frac{\psi_2^{\,n}}{n!}, \quad 1 \leqslant n < S,$$

$$= \pi_2(0).\frac{\psi_2^{\,n}}{S!\,S^{n-S}}, \quad n \geqslant S.$$

Les formules (61) à (68) peuvent prendre une forme simplifiée si on considère le cas d'une attente possible de durée quelconque. On pose :

69 $$\Pi_1(S) = \sum_{n=S}^{\infty} \pi_1(n) = \frac{\Psi_1^S}{S!\,(1-\frac{\Psi_1}{S})} \cdot \Pi_1(0),$$

70 $$\Pi_2(S) = \sum_{n=S}^{\infty} \Pi_2(n) = \frac{\Psi_2^S}{S!\,(1-\frac{\Psi_2}{S})} \cdot \Pi_2(0).$$

Comme on le voit, les calculs sont assez compliqués mais bien peu pour les machines.

La monotonie va se retrouver pour $\overline{\nu}$ et $\overline{n}$:

71 $$\overline{\nu}_1 = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)\pi_1(n) = \frac{\Psi_1^{S+1}}{S.\,S!\,(1-\frac{\Psi_1}{S})^2} \cdot \Pi_1(0),$$

72 $$\overline{\nu}_2 = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)\,\Pi_2(n) = \frac{\Psi_2^{S+1}}{S.\,S!\,(1-\frac{\Psi_2}{S})^2} \cdot \Pi_2(0).$$

Ainsi :

73 $$[\overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2] = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)\,[\pi_1(n), \pi_2(n)]$$
$$= \left[\frac{\Psi_1^{S+1}}{S.\,S!\,(1-\frac{\Psi_1}{S})^2}, \frac{\Psi_2^{S+1}}{S.\,S!\,(1-\frac{\Psi_2}{S})^2}\right].$$

Le calcul de $[\overline{n}_1, \overline{n}_2]$ ne conduit pas à une formule comme celle de (73), il faut procéder au calcul en posant :

74 $$[\overline{n}_1, \overline{n}_2] = \left[\sum_{n=0}^{\infty} n.\,\pi_1(n), \sum_{n=0}^{\infty} n.\,\pi_2(n)\right]$$

Pour $[\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2]$, c'est plus simple :

75 $$[\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2] = \left[\sum_{n=0}^{S} (S-n)\,\pi_2(n), \sum_{n=0}^{S} (S-n)\,\pi_1(n)\right]$$
$$= [S-\Psi_2, S-\Psi_1]$$

Quant à $[\overline{j}_1, \overline{j}_2]$, on a :

76 $$[\overline{j}_1, \overline{j}_2] = [\overline{n}_1 - \overline{\nu}_2, \overline{n}_2 - \overline{\nu}_1].$$

Les moyennes sont liées entre elles comme suit :

77 $$[\overline{n}_1, \overline{n}_2] = [\overline{\nu}_1 \quad \overline{\nu}_2] \,(+)\, S \,(-)\, [\overline{\rho}_1, \rho_2]$$
$$= [\overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2] \,(+)\, [\Psi_1, \Psi_2].$$

Pour obtenir le temps moyend'attente dans la file, on rappelle que ,
on aura alors ici :

78 $$[\bar{t}_{f_1}, \bar{t}_{f_2}] = \frac{[\bar{\nu}_1, \quad \bar{\nu}_2]}{[\lambda_1, \quad \lambda_2]} = [\frac{\bar{\nu}_1}{\lambda_2}, \quad \frac{\bar{\nu}_2}{\lambda_1}]$$

où $\bar{\nu}_1$ et $\bar{\nu}_2$ seront obtenus à partir de (73).

Le temps moyen d'attente dans le système s'obtiendra de façon similaire mais sensiblement plus compliquée mais toujours monotone.

Beaucoup d'autres grandeurs utiles peuvent être calculées par intervalles de confiance si la monotonie est vérifiée.

Bien entendu, comme pour le cas d'une seule station, les considérations développées ci-dessus s'appliquent sans problème aux nombres flous triangulaires et plus généralement aux nombres flous niveau par niveau.

Voyons encore un exemple en rappelant que la méthode d'extension à l'incertain que nous venons de montrer s'applique à toutes les formules où l'on trouve la monotonie. Le cas que nous allons voir maintenant concerne mlusieurs stations et un nombre limité de clients (toujours en régime permanent).

On considère le cas concret de m machines (clients) et S mécaniciens d'entretien (stations) avec l'hypothèse $S<m$.On décrira le phénomène d'attente de la façon suivante : si $1 \leq n \leq S$, il y a $S-n$ mécaniciens qui sont inoccupés (n machines sont en réparation et aucune machine n'est en attente de réparation) ; si $S < n \leq m$, il y a S machines en réparation et $n-S$ en attente. On admet que $\psi < S$ pour éviter un phénomène de congestion où $\psi = \frac{\lambda}{\mu}$.

On suppose toujours que les lois des pannes et celles de durées de réparation suivent la loi de Poisson (intervalles suivant la loi exponentielle).

On a :

79 $$0 \leq n \leq S, \quad p(n) = C_n^m \psi^n p(0) \quad \text{où} \quad C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!\,n!},$$
$$S \leq n \leq m, \quad p(n) = \frac{n!}{S!\,S^{n-S}} \cdot C_n^m \psi^n p(0),$$

avec évidemment

80 $$\sum_{n=0}^{m} p(n) = 1 .$$

De (79) et (80), on tire $p(0)$.

On peut aussi utiliser plus commodemment une méthode récurrente. On pose :

81 $$a_n = \frac{p(n)}{p(0)} .$$

De $n=0$ à $n=S-1$, on calcule a_n à l'aide de la formule :

82 $$a_n = \frac{m-n+1}{n} \cdot \Psi \cdot a_{n-1} \qquad \text{avec } a_0 = 1 .$$

De $n = S$ à $n = m$, on calcule a_n avec la formule :

83 $$a_n = \frac{m-n+1}{S} \cdot \Psi \cdot a_{n-1} .$$

Bien entendu, la loi $p(n)$ n'est pas monotone et les a_n non plus. Mais les lois cumulées qui sont obtenues à partir de $p(n)$ ou a_n sont monotones. On peut alors poser :

84 $$[\bar{\nu}_1 , \bar{\nu}_2] = [\sum_{n=S+1}^{m} (n-S)\,\pi_1(n) , \sum_{n=S+1}^{m} (n-S).\pi_2(n)]$$

où $\pi_1(n)$ correspond à la loi $p(n)$ avec Ψ_1 et $\pi_2(n)$ correspond à cette loi avec Ψ_2. De même :

85 $$[\bar{\rho}_1 , \bar{\rho}_2] = [\sum_{n=0}^{S} (S-n).\pi_2(n) , \sum_{n=0}^{S} (S-n).\pi_1(n)] ,$$

car pour $\bar{\rho}$, la monotonie se fait en sens inverse. On a encore :

86 $$[\bar{n}_1 , \bar{n}_2] = S \,(+)\, [\bar{\nu}_1 , \bar{\nu}_2] \,(-)\, [\bar{\rho}_1 , \bar{\rho}_2] .$$

Ce qui permet de calculer $[\bar{n}_1 , \bar{n}_2]$.

Le temps moyen d'attente pour une machine est :

87 $$[\bar{t}_{f1} , \bar{t}_{f2}] = \frac{[\bar{\nu}_1 , \bar{\nu}_2]}{[\lambda_1 , \lambda_2] . [m-\bar{n}_2 , m-\bar{n}_1]} .$$

On prend un exemple numérique.

88 $$m = 20 , \quad S = 3 , \quad \Psi_1 = 0.1 , \quad \Psi_2 = 0.2 .$$

On utilise (82) et (83).

1) avec $\Psi_1 = 0.1$.

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{20-0}{1} \times 0.1 \times 1 = 2 ,$$

$$a_2 = \frac{20-1}{2} \times 0.1 \times 2 = 1.9,$$

89 $$a_3 = \frac{20-2}{3} \times 0.1 \times 1.9 = 1.14,$$

$$a_4 = \underline{20-3} \times 0.1 \times 1.14 = 0.646,$$

$$a_5 = \frac{20-4}{3} \times 0.1 \times 0.646 = 0.34453,$$

$$a_6 = \frac{20-5}{3} \times 0.1 \times 0.34453 = 0.17226,$$

$$a_7 = \frac{20-6}{3} \times 0.1 \times 0.17226 = 0.08039,$$

$$a_8 = \frac{20-7}{3} \times 0.1 \times 0.08039 = 0.03483,$$

$$a_9 = 0.01393, \quad a_{10} = 0.00511, \quad a_{11} = 0.00170,$$

$$a_{12} = 0.000051, \quad a_{13} = 0.00013, \quad a_i < 0.0001,$$

$$i = 14, 15, \ldots, 20.$$

On en tire :

90 $$\sum_{n=1}^{20} a_n = 6.3394.$$

et de là :

91 $$\pi_1(0) = \frac{1}{1 + 6.3394} = 0.13625.$$

D'où :

$$\pi_1(1) = 0.27250, \quad \pi_1(2) = 0.25888, \quad \pi_1(3) = 0.15533,$$

$$\pi_1(4) = 0.08802, \quad \pi_1(5) = 0.04694, \quad \pi_1(6) = 0.02347,$$

92 $$\pi_1(7) = 0.01095, \quad \pi_1(8) = 0.00475, \quad \pi_1(9) = 0.00190,$$

$$\pi_1(10) = 0.00070, \quad \pi_2(11) = 0.00023, \quad \pi_2(12) = 0.00007.$$

2) avec $\psi_2 = 0.2$.

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{20-0}{1} \times 0.2 \times 1 = 4,$$

$$a_2 = \frac{20-1}{2} \times 0.2 \times 4 = 7.6,$$

$$a_3 = \frac{20-2}{3} \times 0.2 \times 7.6 = 9.12,$$

$$a_4 = \frac{20-3}{3} \times 0.2 \times 9.12 = 10.336,$$

$$a_5 = \frac{20-4}{3} \times 0.2 \times 10.336 = 11.02506,$$

$$a_6 = \frac{20-5}{3} \times 0.2 \times 11.02506 = 11.02506,$$

93 $$a_7 = \frac{20-6}{3} \times 0.2 \times 11.0256 = 10.29005,$$

$$a_8 = \frac{20-7}{3} \times 0.2 \times 10.29005 = 8.91804,$$

$$a_9 = \frac{20-8}{3} \times 0.2 \times 8.91804 = 7.13443,$$

$$a_{10} = \frac{20-9}{3} \times 0.2 \times 7.13443 = 5.23191,$$

$$a_{11} = \frac{20-10}{3} \times 0.2 \times 5.23191 = 3.48794,$$

$$a_{12} = 2.09276, \quad a_{13} = 1.11614, \quad a_{14} = 0.52086,$$

$$a_{15} = 0.20834, \quad a_{16} = 0.06944, \quad a_{17} = 0.01851,$$

$$a_{18} = 0.00370, \quad a_{19} = 0.00049, \quad a_{20} = 0.00003.$$

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = 93.19875,$$

94 $$\pi_2(0) = \frac{1}{1 + 93.19875} = 0.01061,$$

$\pi_2(1) = 0.04246,\quad \pi_2(2) = 0.08068,\quad \pi_2(3) = 0.09681,$

$\pi_2(4) = 0.10972,\quad \pi_2(5) = 0.11704,\quad \pi_2(6) = 0.11704,$

$\pi_2(7) = 0.10923,\quad \pi_2(8) = 0.09467,\quad \pi_2(9) = 0.07573,$

$\pi_2(10) = 0.05554,\quad \pi_2(11) = 0.03702,\quad \pi_2(12) = 0.02221,$

$\pi_2(13) = 0.01184,\quad \pi_2(14) = 0.0052,\quad \pi_2(15) = 0.00221,$

95 $\pi_2(16) = 0.00073,\quad \pi_2(17) = 0.00019,\quad \pi_2(18) = 0.00003$

$\pi_2(19) = 0,\quad \pi_2(20) = 0.$

On calcule $\bar{\nu}_1$ et $\bar{\nu}_2$:

96 $$\bar{\nu}_1 = \sum_{n=4}^{20} (n-3).\pi_1(n) = 0.339,$$

97 $$\bar{\nu}_2 = \sum_{n=4}^{20} (n-3)\cdot\pi_2(n) = 3.273,$$

98 $$[\bar{\nu}_1,\ \bar{\nu}_2] = [0.339,\ 3.273].$$

De même $\bar{\rho}_1$ et $\bar{\rho}_2$:

99 $$\bar{\rho}_1 = \sum_{n=0}^{3} (3-n).\pi_2(n) = 0.197,$$

100 $$\bar{\rho}_2 = \sum_{n=0}^{3} (3-n).\pi_1(n) = 1.213,$$

101 $$[\bar{\rho}_1,\ \bar{\rho}_2] = [0.197,\ 1.213].$$

Comme on le voit, en prenant $\psi_2 = 2\psi_1$, les écarts se creusent beaucoup pour les intervalles de confiance. Dans la pratique, on peut valuer ψ de façon plus serrée. Pour obtenir $\psi_1 = 0.1$ et $\psi_2 = 0.2$, on avait pris :

102 $$\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = 3,\quad \mu_1 = 15,\quad \mu_2 = 20;$$

ce qui donne :

103 $$\begin{aligned}[\psi_1,\ \psi_2] &= [\lambda_1,\ \lambda_2]\,(:)\,[\mu_1,\ \mu_2] \\ &= [2,\ 3]\,(:)\,[15,\ 20] \\ &= [2/20,\ 3/15] = [0.1,\ 0.2].\end{aligned}$$

Ainsi le nombre moyen de machines en attente de réparation est donné par (98) et le nombre moyen de mécaniciens inactifs est donné par (101).

On calcule aussi :

104
$$(\bar{n}_1, \quad \bar{n}_2) = 3\ (+)\ [0.339, \quad 3.273]\ (-)\ [0.197, \quad 1.219]$$
$$= [2.126, \quad 6.076].$$

On s'intéresse dans cette étude à deux coefficients

105
$$k^{(1)} = \frac{\bar{\nu}}{m} = \frac{\text{nombre moyen de machines en attente}}{\text{nombre total de machines}},$$

106
$$k^{(2)} = \frac{\bar{\rho}}{s} = \frac{\text{nombre moyen de mécaniciens inactifs}}{\text{nombre total de mécaniciens}}.$$

Ici, ces coefficients deviendront des intervalles de confiance.

107
$$[k_1^{(1)}, \quad k_2^{(1)}] = \frac{1}{20}\ [0.339, \quad 3.273]$$
$$= [0.017, \quad 0.163],$$

108
$$[k_1^{(2)}, \quad k_2^{(2)}] = \frac{1}{3}\ [0.197, \quad 1.213]$$
$$= [0.065, \quad 0.404].$$

Le temps moyen d'attente pour une machine a été donné en (87). Soit avec les données en intervalles de confiance :

109
$$m\ (-)\ [\bar{n}_1, \quad \bar{n}_2] = [20, \quad 20]\ (-)\ [2.126, \quad 6.076]$$
$$= [13.924, \quad 17.874],$$

110
$$[\lambda_1, \quad \lambda_2]\ .\ (m\ (-)\ [\bar{n}_1, \quad \bar{n}_2])$$
$$= [2, \quad 3]\ (\cdot)\ [13.924, \quad 17.874]$$
$$= [27.848, \quad 53.622]$$

111
$$[\bar{t}_{f_1}, \quad \bar{t}_{f_2}] = [0.339, \quad 3.273]\ (:)\ [27.848, 53.622]$$
$$= [0.006, \quad 0.117]$$

L'aspect économique de ce dernier problème est très intéressant et utile à considérer.

Soit c_1 le coût d'immobilisation d'une machine par unité de temps et c_2 celui du salaire d'un mécanicien (on suppose qu'ils ont tous le même salaire et que le parc de machines est homogène).

Le coût global d'inactivité est donné par :

112 $$\Gamma(S) = (c_1 \overline{\nu} + c_2 \overline{\rho}).T$$

Avec des coûts constants dans le temps, on prend :

113 $$\gamma(S) = \frac{\Gamma(S)}{T} = c_1 \overline{\nu} + c_2 \overline{\rho} .$$

Maintenant, on passe aux intervalles de confiance :

114 $$\begin{aligned} [\gamma_1(S), \; \gamma_2(S)] &= c_1 [\overline{\nu}_1, \; \overline{\nu}_2] (+) c_2 [\overline{\rho}_1, \; \overline{\rho}_2] \\ &= c_1 \Big[\sum_{n=S+1}^{m} (n-S) \pi_1(n), \sum_{n=S+1}^{m} (n-S) \pi_2(n) \Big] \\ &\quad (+) c_2 \Big[\sum_{n=0}^{S} (S-n) \pi_2(n), \sum_{n=0}^{S} (S-n) \pi_1(n) \Big] . \end{aligned}$$

Ainsi, supposons que le coût horaire d'indisponibilité d'une machine soit 1800 et le salaire horaire d'un mécanicien soit 60 . On aura, en prenant les données numériques obtenues en (98) et (101)

115 $$\begin{aligned} [\gamma_1(3), \; \gamma_2(3)] &= 1800 \, [0.339, \; 3.273] \\ &\quad (+) \; 60 \, [0.197, \; 1.213] \\ &= [610, \; 5891] (+) [11, \; 72] \\ &= [622, \; 5963] . \end{aligned}$$

Il semble évident que 3 mécaniciens ne sont pas suffisants. Mais il convient de faire un calcul économique avec S comme paramètre. On refera donc les calculs précédents non plus seulement avec $S=3$ mais avec $S = 1, 2, 3, \ldots, 20$ mécaniciens. Les intervalles de confiance obtenus ne donneront généralement pas un ordre total pour l'obtention d'un coût global minimal ; on aura un ordre partiel et on se donnera un critère (par exemple valeur moyenne de chaque intervalle) pour obtenir un ordre total et ainsi optimiser. On peut aussi se donner à ce sujet plusieurs critères.

Nous n'avons donné que trois exemples d'applications mais tous les modèles de files d'attente peuvent d'une manière similaire être étudiés dans l'incertain. On conseille aussi de passer des intervalles de confiance aux nombres flous triangulaires, c'est souvent plus expressif pour le décideur.