

J. COULON ; J.L. COULON
 Université Claude Bernard (Lyon I)
 Institut de Mathématiques
 Batiment Doyen Jean Braconnier
 45, boulevard du 11 novembre 1918
 69622 - VILLEURBANNE Cedex (France)

LES RELATIONS TOTALEMENT FLOUES SELON JTF^{oo} (première partie)

§ 1 - INTRODUCTION.

(A). Soit \mathcal{C} une catégorie ayant des produits finis. On appelle *relation de A vers B* (A et B étant des objets de \mathcal{C}) tout morphisme $R \rightrightarrows^{\rho} A \times B$ de codomaine $A \times B$. Si p_1 et p_2 sont les morphismes de projection de $A \times B$ sur A et B, se donner ρ revient à se donner $\langle p_1 \rho, p_2 \rho \rangle$. Une relation de A vers B est donc un diagramme $R \xrightarrow{u} A$ tel que le morphisme $\langle u, v \rangle$ de R vers $A \times B$

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{u} & A \\ \downarrow v & & \\ & & B \end{array}$$

soit un monomorphisme. En particulier, tout diagramme $R \rightrightarrows^u A$ où u

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{u} & A \\ \downarrow v & & \\ & & B \end{array}$$

est un *monomorphisme* est une relation de A vers B, que l'on dit être un *morphisme partiel de A dans B* dont R est le domaine de définition.

Soit \mathcal{C} une catégorie. On dit qu'un monomorphisme $A \rightrightarrows^m B$ est un *monomorphisme fort* (on notera $A \rightrightarrows^m B$) (cf. par exemple Wyler, ou Pénon : [4]) si pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{m} & B \\ \uparrow \alpha & & \uparrow \beta \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

4

est un épimorphisme, il existe un morphisme $D \xrightarrow{t} A$ tel que $mt = \beta$ et $tf = \alpha$.

Soit \mathcal{C} une catégorie ayant des produits finis. On appelle *relation forte de A vers B* toute relation $R \rightrightarrows \xrightarrow{\rho} A \times B$ où ρ est un monomorphisme fort.

En particulier, tout diagramme $R \rightrightarrows \xrightarrow{u} A$ où u est un mono-

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow v \\ & & B \end{array}$$

morphisme fort est une relation forte de A vers B , que l'on dit être un *morphisme partiel fort* de A dans B de domaine de définition R .

(B). Dans un *topos élémentaire*, on peut classer les monomorphismes (cf. par exemple Goldblatt : [1]).

Wylter et Pénon (cf. [4]) appellent *quasi-topos* une catégorie finiment complète, finiment cocomplète, localement cartésienement close (c'est-à-dire pour tout objet A de cette catégorie \mathcal{C} , la catégorie \mathcal{C}/A [dont les objets sont les morphismes $M \xrightarrow{f} A$ de \mathcal{C} de codomaine A , et ayant pour morphismes de $M \xrightarrow{f} A$ vers $N \xrightarrow{g} A$ tout morphisme $M \xrightarrow{\alpha} N$ de \mathcal{C} tel que $g\alpha = f$] a des exponentielles), et ayant un classificateur de monomorphismes forts.

Dans un topos élémentaire, on peut également classer les morphismes partiels :

pour tout objet B , il existe un objet \tilde{B} et un morphisme $B \xrightarrow{\eta_B} \tilde{B}$ tels que, pour tout morphisme partiel $R \rightrightarrows \xrightarrow{u} A$ (cf. par exemple

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow \bar{v} \\ & & \tilde{B} \\ & \downarrow v & \downarrow \eta_B \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & \tilde{B} \end{array}$$

Goldblatt : [1]).

Dans un quasi topos, on peut classer les morphismes partiels forts : c'est-à-dire que pour tout objet B , il existe un objet \tilde{B} et un morphisme

$$B \xrightarrow{\eta_B} \tilde{B} \quad \text{tels que, pour tout morphisme partiel fort } R \supset \supset \xrightarrow{u} A$$

$$\text{allant vers } B, \text{ etc....} \quad \begin{array}{c} \downarrow v \\ B \end{array}$$

On montre (cf. Pénon : [4]) qu'une catégorie est un quasi topos si et seulement si elle est finiment complète, finiment cocomplète, cartésienement close (c'est-à-dire qu'elle a des exponentielles), et si on y peut classer les morphismes partiels forts.

(C). Pour étudier les ensembles totalement flous au sens de G.Blanc (avec comme ensembles des valeurs d'appartenance et d'égalité un treillis de Heyting complet J), D.Ponasse a introduit (cf. [2]) la catégorie JTF . Dans divers articles (cf. [3]), nous avons construit la catégorie JTF^{oo} équivalente à JTF et plus maniable et nous avons étudié les propriétés. Essentiellement, JTF^{oo} est isomorphe à la catégorie des préfaisceaux séparés sur J , JTF^{oo} n'est un topos que lorsque J est un anti-ordinal, et est de toute façon un quasi-topos au sens de Pénon (dans un récent Busefal, nous montrons comment classer les morphismes partiels forts).

Nous nous proposons ici de voir ce que donnent dans JTF^{oo} les notions catégoriques rappelées en (A) de relation et de relation forte, afin d'obtenir un concept algébriquement solide de *relation totalement floue*. La texture de quasi topos de JTF^{oo} (et non de topos) nous amène à penser qu'une bonne relation totalement floue procède du concept de relation forte : c'est pourquoi -plutôt que de parler de relations totalement floues et de relations totalement floues fortes, ce qui serait mieux

en accord avec cette introduction- nous choisirons les expressions *pré-
relations totalement floues* et *relations totalement floues*.

N.B. Dans cet article, il s'agit de relations "binaires". On pourrait
1 bien sûr généraliser.

N.B. Dans la suite, les notations utilisées sans rappels sont celles
2 de [3].

§ 2 - PRERELATIONS TOTALEMENT FLOUES. RELATIONS TOTALEMENT FLOUES.

(A). Prérelations totalement floues.

(X, σ) et (Y, τ) désignent deux objets de JTF^{00} .

PROPOSITION 1.

(1). Soit $R \supset \xrightarrow{\rho} (X, \sigma) \times (Y, \tau)$ une prérelation totalement floue de (X, σ) vers (Y, τ) [c'est-à-dire une relation de (X, σ) vers (Y, τ) au sens de l'introduction]. D'après [3], R est à un isomorphisme près une partie totalement floue de $(X, \sigma) \times (Y, \tau)$ déterminée par $(R_i)_{i \in J}$. Pour tout $i \in J$, R_i est une partie de $X_i \times Y_i$ et donc le graphe d'une relation (au sens usuel) de X_i vers Y_i que nous noterons encore R_i . Alors :

fn1. Pour tout $i \in J$, R_i est une relation (usuelle) de X_i	vers Y_i
fn2. Si $x \in X_i$, $y \in Y_i$, $x R_i y$ et $j \leq i : x _j R_j y _j$.	

(2). Inversement, soit $(R_i)_{i \in J}$ une famille telle que fn1. fn2. (nous dirons que c'est une *préfamille naturelle* de relations). Alors il lui correspond de façon évidente une prérelation totalement floue de (X, σ) vers (Y, τ) .

(B). Relations totalement floues.

(X, σ) et (Y, τ) désignent deux objets de JTF^{oo} .

PROPOSITION 2.

(1). Soit $R \supset \xrightarrow{\rho} (X, \sigma) \times (Y, \tau)$ une relation totalement floue de (X, σ) vers (Y, τ) [c'est-à-dire une relation forte de (X, σ) vers (Y, τ) au sens de l'introduction]. La préfamille naturelle $(R_i)_J$ qui lui correspond vérifie en outre :

fn3. Si $K \subset J$, si $k_o = \vee K$, si x et y sont des éléments de X et Y tels que pour tout $k \in K : x|_k R_k y|_k$, alors on a : $x|_{k_o} R_{k_o} y|_{k_o}$.

(2). Inversement, toute famille $(R_i)_J$ telle que fn1., fn2., et fn3. (on dira que c'est une *famille naturelle* de relations) détermine de façon évidente une relation totalement floue de (X, σ) vers (Y, τ) .

THEOREME 1.

(1). Soit R une prérelation totalement floue de (X, σ) vers (Y, τ) .

Définissons une application de $X \times Y$ dans J par :

$$S(x, y) = \vee \{k \in J / x|_k R_k y|_k\}.$$

Alors on a :

$$\left| \begin{array}{l} r1)' \quad S(x, y) \wedge \tau(y, y') \leq S(x, y') \\ r1)'' \quad S(x, y) \wedge \sigma(x, x') \leq S(x', y) \\ r2) \quad S(x, y) \leq \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\tau(y). \end{array} \right.$$

(2). Soit S une application de $X \times Y$ dans J vérifiant r1)', r1)'' et r2).

Définissons, pour tout $i \in J$, une relation R_i de X_i vers Y_i par : si $x \in X_i$ et $y \in Y_i$, $x R_i y \iff S(x, y) \geq i$. Alors $(R_i)_J$ est une

famille naturelle de relations.

(3). Partons d'une application S de $X \times Y$ dans J vérifiant $r1)'$, $r1)''$ et $r2)$. (2) permet de lui associer une relation totalement floue R de (X, σ) vers (Y, τ) . Alors, l'application de $X \times Y$ dans J associée selon (1) à R est précisément S .

(4). Partons d'une prérelation totalement floue R de (X, σ) vers (Y, τ) . Soit S l'application de $X \times Y$ dans J associée selon (1) et \tilde{R} la relation totalement floue de (X, σ) vers (Y, τ) associée à S selon (1).

Alors \tilde{R} est l'enveloppe forte -dans $(X, \sigma) \times (Y, \tau)$ - de R .

Commentaires.

(a). Il y a donc correspondance bijective entre les relations totalement floues de (X, σ) vers (Y, τ) et les applications de $X \times Y$ dans J vérifiant $r1)'$, $r1)''$ et $r2)$. Nous emploierons la même lettre pour désigner la relation totalement floue R et l'application S de $X \times Y$ dans J qui lui correspond. Nous appellerons également relation totalement floue de (X, σ) vers (Y, τ) toute application de $X \times Y$ dans J vérifiant $r1)'$, $r1)''$ et $r2)$. On retrouve la notion de relation utilisée par N.Blanchard et U.Höhle (cf. [5]).

(b). Le fait que JTF^{oo} ne soit qu'un quasi-topos -et pas vraiment un topos- donne qu'une prérelation totalement floue n'est pas déterminée par une relation au sens de N.Blanchard et U.Höhle. Seule, son enveloppe forte est ainsi déterminée. C'est en ce sens que l'on peut dire que le flou lui-même des relations se trouve internalisé dans JTF^{oo} .

§ 3 - RELATIONS TOTALEMENT FLOUES REMARQUABLES.

N.B. Désormais, il s'agit de relations totalement floues de (X, σ) [c'est-à-dire de (X, σ) vers (X, σ)].

THEOREME 2.

Soit R une relation totalement floue sur (X, σ) associée à la famille naturelle $(R_i)_J$.

(a). Il y a équivalence entre :

* le morphisme diagonal $(X, \sigma) \xrightarrow{\Delta} (X, \sigma) \times (X, \sigma)$ se factorise à travers $R \xrightarrow{\rho} (X, \sigma) \times (X, \sigma)$ (dans JTF^{oo}).

* Pour chaque $i \in J$, R_i est une relation réflexive.

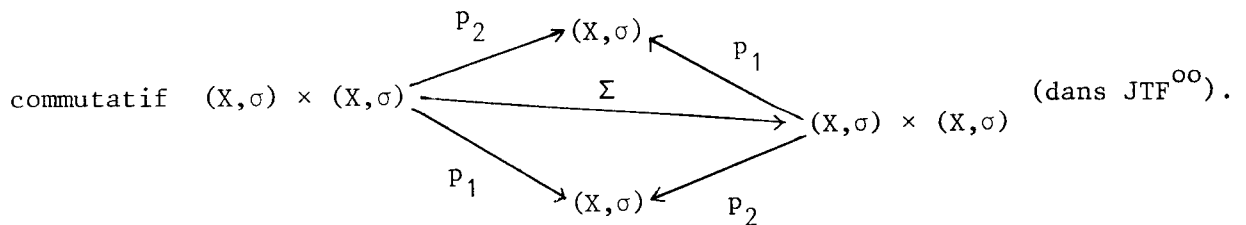
* $\forall x, x' \in X : R(x, x') \geq \sigma(x, x')$

* $\forall x \in X : R(x, x) \geq \alpha_\sigma(x)$

* $\forall x \in X : R(x, x) = \alpha_\sigma(x)$.

(b). Il y a équivalence entre :

* $R \xrightarrow{\rho} (X, \sigma) \times (X, \sigma)$ se factorise à travers le morphisme de symétrie $(X, \sigma) \times (X, \sigma) \xrightarrow{\Sigma} (X, \sigma) \times (X, \sigma)$ défini par le diagramme



* Pour chaque $i \in J$, R_i est une relation symétrique.

* $\forall x, x' \in X : R(x, x') = R(x', x)$.

(c). Il y a équivalence entre :

* Etant donné le pullback $P \xrightarrow{\beta} R$, $p \xrightarrow{\langle p_1^\alpha, p_2^\beta \rangle} (X, \sigma) \times (X, \sigma)$

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\beta} & R \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow p_1^\rho \\
 R & \xrightarrow{p_2^\rho} & (X, \sigma)
 \end{array}$$

se factorise à travers $R \supset \xrightarrow{\rho} (X, \sigma) \times (X, \sigma)$ (dans $(JTF)^{oo}$).

* Pour chaque $i \in J$, R_i est une relation transitive.

* $\forall x, x', x'' \in X : R(x, x') \wedge R(x', x'') \leq R(x, x'')$.

D'où les définitions évidentes de relations totalement floues réflexives, symétriques, transitives, de préordres et d'équivalences totalement flous.

Dans la suite de cet article, nous donnerons quelques résultats théoriques concernant ces notions pour en montrer le caractère ad hoc, ainsi que quelques constructions.

Une curiosité dans $(JTF)^{oo}$.

Parmi les prérelations, il y a les morphismes partiels.

Parmi les relations (fortes), il y a les morphismes partiels forts.

Mais un morphisme partiel peut être une relation (forte) sans être un morphisme partiel fort.

Exemple :

$$\begin{array}{ccc}
 D & \supset \xrightarrow{d} & X, \text{ où} \\
 \downarrow f & & \\
 Y & &
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 X = ([0, 1], \wedge) \\
 Y = D = ([0, 1[, \wedge) \\
 d \text{ et } f \text{ évidents.}
 \end{array} \right.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GOLDBLATT : Topoi : The categorial analysis in logic.
(North-Holland, 1979)
- [2] D. PONASSE : Séminaire de Mathématique Floue.
(Université LYON I, photocopié)
- [3] J. COULON, J.L. COULON :
- Séminaire de Mathématique Floue.
(Université LYON I, 1984-1985 et 1985-1986, photocopié)
 - Remarques sur certaines catégories d'ensembles totalement flous.
(BUSEFAL n° 21,23,24)
 - Classificateur faible de monomorphismes dans la catégorie JTF^{**} .
(BUSEFAL n°26)
 - Classificateur de morphismes partiels dans la catégorie JTF^{**}
d'ensembles totalement flous.
(à paraître dans BUSEFAL)
 - About some categories of totally fuzzy sets.
(Soumis à JMAA)
 - Weak classifier of monomorphisms in the category JTF^{**} .
(A paraître dans Portugaliae Mathematica)
- [4] O. WYLER : Are there topoi in topology ?
(Lecture notes in Math. 540, Springer-Verlag, 1975,
699-719)
- J. PENON : Sur les quasi topos.
(Cahiers de topologie et géométrie différentielle,
vol.XVIII-2, 1977, 181-218)
- [5] N. BLANCHARD, U. HÖHLE : Partial ordering in L-underdeterminate sets
(LUS).