SYLLOGISMES DIRECT ET INDIRECT, CONDITION POUR QUE LE SYLLOGISME INDIRECT SOIT PARFAIT

L. BOUR[x], *G. HIRSCH*[x], *M. LAMOTTE*[x]

Nous travaillons dans le domaine flou avec les règles de détachement du modus ponens et du modus tollens sur des tableaux hendécadaires, et non plus comme en binaire uniquement aux quatre sommets de ces tableaux.

1. *Syllogisme direct* :

E_1 et E_2 représentent l'univers du discours :

$$F(E_1) = \{A : E_1 \to [0,1]\}$$

$$F(E_2) = \{B : E_2 \to [0,1]\}$$

et R une règle d'inférence caractérisée par un opérateur $\times$ (ou un pseudo-opérateur) d'implication flou. Posons alors $R(A,B) = A \times B$, soit pour les fonctions d'appartenance :

$$\mu_{A \times B}(e_1, e_2) = \mu_A(e_1) \times \mu_B(e_2)$$

x, y, x' et y' sont des noms d'objet.

[x] Faculté des Sciences - Laboratoire CRAN-LEA - Centre de 1er cycle - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE LES NANCY

La règle de détachement du modus ponens est :

Antécédent 1	Si x est A alors y est B
Antécédent 2	x' est A
Conséquence	y' est B

La règle de détachement du modus tollens est :

Antécédent 1	Si x est A alors y est B
Antécédent 2	y' est $\bar{B}$
Conséquence	x' est $\bar{A}$

Les règles de détachement sont strictes en binaire ; elles sont moins franches, en général, dans le domaine flou.

Pour présenter notre travail, nous utiliserons l'exemple suivant.

Exemple 1 :

Considérons A et B hendécadaires et la règle d'inférence caractérisée par l'opérateur de Lukasiewicz :

$$a \times_5 b = \min(1 \ , \ 1-a+b)$$

R(A,B)

b \ a	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.9
.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.9	.8
.7	1	1	1	1	1	1	1	1	.9	.8	.7
.6	1	1	1	1	1	1	1	.9	.8	.7	.6
.5	1	1	1	1	1	1	.9	.8	.7	.6	.5
.4	1	1	1	1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4
.3	1	1	1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3
.2	1	1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2
.1	1	1	.9	.8	.7	.6	.5	4	.3	.2	.1
0	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0

Pour le modus ponens, afin de généraliser les résultats de la logique binaire, il nous faut :

- choisir une entrée a,
- consulter le tableau,
- déduire un résultat b.

En flou, en général, pour un a donné, on déduit du tableau de composition R(A,B) plusieurs valeurs de b différentes. Pour a = 0.6 et une inférence totale correspondant à R(0.6,b) = 1, on obtient b = 0.6 ou 0.7 ou 0.8 ou 0.9 ou 1. Donc en flou, il nous faut imposer une règle supplémentaire afin que pour un a donné, ne lui corresponde qu'un b unique.

On envisage alors, pour un a donné, un seuil d'inférence p. On considère sur la colonne correspondante du tableau R(A,B), la première valeur supérieure ou égale au seuil d'inférence p. Pour a = 0.6 et p = 0.85, on obtient b = 0.5.

On pourrait envisager de prendre sur une colonne donnée a la valeur b la plus grande, mais ce choix conduirait à prendre b = 1 pour toute valeur de a. Ce choix de règle est donc sans intérêt.

Si l'on envisage de prendre une valeur quelconque parmi les solutions possibles, il n'y a plus de règle objective.

Le seuil d'inférence a la signification suivante :

- pour p = 1, on dira que l'inférence est totale, la déduction est complète. Dans ce cas, on vérifie sur l'exemple que b = a ;

- pour 0 < p < 1, plus le seuil d'inférence est faible, plus les valeurs de b sont faibles ;

- pour p = 0, il n'y a plus d'inférence, la déduction est nulle. Dans ce cas, on vérifie sur l'exemple que pour toute valeur de a, alors b = 0.

La règle d'inférence floue qui consiste à prendre, compte tenu du seuil d'inférence p, parmi les valeurs b possibles celle qui est la plus petite, est donc plus riche que la règle d'inférence binaire. On peut en effet modeler le degré d'inférence par le biais du paramètre p.

Pour le modus tollens, nous appliquons le même procédé, en lisant en entrée non b et pour un seuil d'inférence p donné, on déduit non **a**.

2. *Syllogisme indirect* :

E_1, E_2 et E_3 représentent l'univers du discours :

$$F(E_1) = \{A : E_1 \rightarrow [0,1]\}$$
$$F(E_2) = \{B : E_2 \rightarrow [0,1]\}$$
$$F(E_3) = \{C : E_3 \rightarrow [0,1]\}$$

et R une règle d'inférence caractérisée par un opérateur $*$ (ou un pseudo-opérateur) d'implication flous.

Soit P_1, P_2 et P_3 les propositions conditionnelles floues suivantes :

P_1 : Si x est A alors y est B

P_2 : Si y est B alors z est C

P_3 : Si x est A alors z est C

Soit R(A,B), R(B,C) et R(A,C) trois relations floues définies sur $E_1 \times E_2$, $E_2 \times E_3$ et $E_1 \times E_3$ qui sont obtenues respectivement à partir des propositions P_1, P_2 et P_3.

La règle de détachement du modus ponens est la suivante :

Antécédent 1 :	Si x est A alors y est B
Antécédent 2 :	Si y est B alors z est C
Antécédent 3 :	x' est A
Conséquence	z' est C

La règle de détachement du modus tollens est la suivante :

Antécédent 1 : Si x est A alors y est B
Antécédent 2 : Si y est B alors z est C
Antécédent 3 : z' est $\bar{C}$

Conséquence x' est $\bar{A}$

Ces deux règles de détachement correspondent au syllogisme indirect (passage composé de A à B, puis de B à C).

Le syllogisme indirect sera dit parfait si pour toute entrée avec la règle de détachement du modus ponens et du modus tollens, on a la propriété :

$$R(A,B) \circ R(B,C) = R(A,C) \qquad (4)$$

où "$\circ$" représente une composition de relations floues. Kaufmann [KAU-85] et Mizumoto [MIZ-82] envisagent la composition "$\circ$" = MAX-MIN et concluent "on ne rencontre pas en flou des opérateurs ayant les trois propriétés (1), (2) et (4). Chaque opérateur possède un inconvénient".

Nous envisageons une composition "$\circ$" plus générale. On définit [BOU-86] un opérateur de maximalisation τ qui intervient dans la résolution des équations de relations floues (composition "$\circ$" sup t-norm). Cet opérateur τ est également un opérateur d'implication.

Soient $E_1 = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1m}\}$, $E_2 = \{e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2n}\}$ et $E_3 = \{e_{31}, e_{32}, \ldots, e_{3p}\}$ trois ensembles finis non vides, et $F(E_1) = \{A : E_1 \to [0,1]\}$, $F(E_2) = \{B : E_2 \to [0,1]\}$ et $F(E_3) = \{C : E_3 \to [0,1]\}$ les ensembles flous sur E_1, E_2 et E_3 respectivement.

On note $a_i = A(e_{1i})$, $b_j = B(e_{2j})$ et $c_k = C(e_{3k})$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant p$.

Théorème :

Soit T une t-norme archimédienne et τ l'opérateur de maximalisation associé ; les relations floues $R(A,B)$, $R(B,C)$ et $R(A,C)$ appartenant respectivement à $F(E_1 \times E_2)$, $F(E_2 \times E_3)$ et $F(E_1 \times E_3)$ et définies par :

$$R(A,B) = {}^tA \textcircled{\tau} B$$

$$R(B,C) = {}^tB \textcircled{\tau} C$$

$$R(A,C) = {}^tA \textcircled{\tau} C$$

vérifient l'inégalité :

$$R(A,B) \circ R(B,C) \leqslant R(A,C)$$

où "$\circ$" désigne la composition sup-T.

De plus, si pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $\forall k = 1, \ldots, p$, il existe un indice $j_\circ \in \{1,\ldots,n\}$ tel que :

$$a_i \leqslant b_{j_\circ} \leqslant c_k \text{ ou } c_k < b_{j_\circ} < a_i$$

alors : $R(A,B) \circ R(B,C) = R(A,C)$.

Démonstration du théorème

On a :

$$R(A,B)(e_{1i},e_{2j}) = a_i \,\tau\, b_j$$

$$R(B,C)(e_{2j},e_{3k}) = b_j \,\tau\, c_k$$

$$R(A,C)(e_{1i},e_{3k}) = a_i \,\tau\, c_k$$

et l'on veut montrer :

$$\begin{array}{l} \forall i = 1,\ldots,m \\ \forall k = 1,\ldots,p \end{array} \quad \sup_{b_j \in B} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) \leqslant a_i \,\tau\, c_k$$

Premier cas : si $a_i \leq c_k$, donc $a_i \tau c_k = 1$

Posons : $B_1 = \{b_j \in B \mid b_j < a_i\}$

$B_2 = \{b_j \in B \mid a_i \leq b_j \leq c_k\}$

$B_3 = \{b_j \in B \mid b_j > c_k\}$

et soit $T_1 = \sup\limits_{b_j \in B_1} T(a_i \tau b_j \, , \, b_j \tau c_k)$

$T_2 = \sup\limits_{b_j \in B_2} T(a_i \tau b_j \, , \, b_j \tau c_k)$

$T_3 = \sup\limits_{b_j \in B_3} T(a_i \tau b_j \, , \, b_j \tau c_k)$

Puisque $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, on a : $\sup\limits_{b_j \in B} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = \max(T_1, T_2, T_3)$

et si $b_j \in B_1$, c'est-à-dire si $b_j < a_i \leq c_k$:

$$T(a_i \tau b_j \, , \, b_j \tau c_k) = T(a_i \tau b_j \, , \, 1) = a_i \tau b_j$$

et $T_1 = a_i \tau (\max\limits_{b_j \in B_1} b_j)$;

si $b_j \in B_2$, c'est-à-dire si $a_i \leq b_j \leq c_k$:

$$T(a_i \tau b_j \, , \, b_j \tau c_k) = T(1,1) = 1 \text{ et } T_2 = 1 \quad ;$$

si $b_j \in B_3$, c'est-à-dire si $a_i \leq c_k < b_j$:

$$T(a_i \tau b_j \, , \, b_j \tau c_k) = T(1 \, , \, b_j \tau c_k) = b_j \tau c_k$$

et $T_3 = (\min\limits_{b_j \in B_3} b_j) \tau c_k$

En conclusion, pour le premier cas, si $B_2 \neq \emptyset$, c'est-à-dire s'il existe un $j_\circ$ tel que $b_{j_\circ} \in [a_i, c_k]$, alors $\max(T_1, T_2, T_3) = T_2 = 1 = a_i \tau c_k$.

Si $B_2 = \emptyset$, $\max(T_1, T_2, T_3) = \max(T_1, T_3) < 1 = a_i \tau c_k$.

Deuxième cas : si $a_i > c_k$, c'est-à-dire $a_i \tau c_k = f^{-1}(f(c_k)-f(a_i))$

Posons : $B_4 = \{b_j \in B \mid b_j \geqslant a_i\}$

$B_5 = \{b_j \in B \mid a_i > b_j > c_k\}$

$B_6 = \{b_j \in B \mid c_k \geqslant b_j\}$

et soit $T_4 = \sup\limits_{b_j \in B_4} T(a_i \tau b_j , b_j \tau c_k)$

$T_5 = \sup\limits_{b_j \in B_5} T(a_i \tau b_j , b_j \tau c_k)$

$T_6 = \sup\limits_{b_j \in B_6} T(a_i \tau b_j , b_j \tau c_k)$

Puisque $B = B_4 \cup B_5 \cup B_6$, on a : $\sup\limits_{b_j \in B} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = \max(T_4, T_5, T_6)$

et si $b_j \in B_4$, c'est-à-dire $b_j \geqslant a_i > c_k$, alors :

$$T(a_i \tau b_j , b_j \tau c_k) = T(1 , b_j \tau c_k) = b_j \tau c_k$$

et $T_4 = (\min\limits_{b_j \in B_4}) \tau c_k$;

si $b_j \in B_5$, c'est-à-dire si $a_i > b_j > c_k$:

- pour une t-norme archimédienne stricte :

$$T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = f^{-1}[ff^{-1}(f(b_j)-f(a_i))+ff^{-1}(f(c_k)-f(b_j))]$$

$$= f^{-1}[f(b_j)-f(a_i)+f(c_k)-f(b_j)] = a_i \tau c_k$$

et $T_5 = a_i \tau c_k$;

- pour une t-norme archimédienne non stricte :

$$T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = f^{(-1)}\left[f f^{-1}(f(b_j)-f(a_i)) + f f^{-1}(f(c_k)-f(b_j))\right]$$

$$= f^{(-1)}\left[f(c_k)-f(a_i)\right] = f^{-1}\left[f(c_k)-f(a_i)\right]$$

puisque $a_i > c_k$;

si $b_j \in B_6$, c'est-à-dire si $a_i > c_k \geqslant b_j$:

$$T(a_i \tau b_j\ ,\ b_j \tau c_k) = T(a_i \tau b_j\ ,\ 1) = a_i\ \tau\ b_j$$

et $T_6 = a_i\ \tau\ (\max\limits_{b_j \in B_6} b_j)$

En conclusion pour le deuxième cas :

Si $B_5 \neq \emptyset$, c'est-à-dire s'il existe un $j_\circ$ tel que $b_{j_\circ} \in]c_k, a_i[$, on a :

$$T_4 = (\min_{b_j \in B_4} b_j)\ \tau\ c_k \leqslant a_i\ \tau\ c_k = T_5$$

$$T_6 = a_i\ \tau\ (\max_{b_j \in B_6} b_j) \leqslant a_i\ \tau\ c_k = T_5$$

donc : $\max(T_4, T_5, T_6) = T_5 = a_i\ \tau\ c_k$.

Si $B_5 = \emptyset$ et si $\forall j = 1,\ldots,n$, $b_j > a_i$ ou $b_j < c_k$, alors puisque τ est strictement monotone :

$$T_4 < a_i\ \tau\ c_k \text{ et } T_6 < a_i\ \tau\ c_k$$

et donc : $\sup\limits_{b_j \in B} T(a_i \tau b_j\ ,\ b_j \tau c_k) = \max(T_4, T_6) < a_i\ \tau\ c_k$.

Si $B_5 = \emptyset$ et s'il existe un $b_j \in B_4$ tel que $b_j = a_i$ ou s'il existe un $b_j \in B_6$ tel que $b_j = c_k$, on a alors :

$$T_4 = a_i \tau c_k \geq T_6$$

ou $T_6 = a_i \tau c_k \geq T_4$

et $\max(T_4, T_5, T_6) = a_i \tau c_k$.

REFERENCES :

[BOU-86] - L. BOUR, G. HIRSCH, M. LAMOTTE :
Détermination d'un opérateur de maximalisation pour la résolution d'équations de relation floue.
Busefal (1986) n° 25, p. 95-106.

[KAU-85] - A. KAUFMANN :
Construction d'opérateurs d'implication flous.
(1985), note de travail n° 144.

[MIZ-82] - M. MIZUMOTO, H.J. ZIMMERMANN :
Comparaison of fuzzy reasoning methods.
Fuzzy Sets and Systems 8 (1982), p. 253-283.