J. COULON, J.L. COULON
Université Claude Bernard - Lyon I
Département de Mathématiques 2° Cycle
Batiment 101
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 - VILLEURBANNE Cedex (France)

CLASSIFICATION DE MORPHISMES PARTIELS DANS LA CATEGORIE JTF^{oo} D'ENSEMBLES TOTALEMENT FLOUS

RESUME.

Nous rappelons comment on peut, dans certaines catégories, classer les morphismes partiels.

C'est le cas dans un topos élémentaire (comme l'ont montré KOCK et WRAITH dans [5]), où cette classification généralise celle des monomorphismes.

D.PONASSE a introduit (cf. [1]) la catégorie JTF d'ensembles totalement flous (ayant les mêmes objets que la catégorie déjà introduite par D.HIGGS, mais des morphismes plus maniables) et nous avons étudié dans [2] une sous-catégorie pleine JTF^{oo} de JTF équivalence à JTF et plus commode car isomorphe à la catégorie des préfaisceaux séparés. Lorsque J n'est pas un anti-ordinal, JTF^{oo} n'est pas un topos ; on peut toutefois classer (cf. BUSEFAL n° 26) certains monomorphismes dits forts (en fait tous les noyaux de paires . La construction de KOCK et WRAITH se généralise et permet de classer dans une telle catégorie certains morphismes partiels. En fait, JTF^{oo} est un quasi-topos au sens de J.PENON [6].

Dans cet article, nous donnons une description précise de la façon dont on peut effectuer cette classification dans JTF^{oo}.

§ 1 - LE PROBLEME DE LA CLASSIFICATION DES MORPHISMES PARTIELS DANS UNE CATEGORIE.

$\boxed{a}$. Soient deux ensembles A et B.

Considérons les applications partielles de A dans B.

A toute application partielle f de A dans B, on peut associer une application $\widehat{f}$ de A dans $B \cup \{\omega\}$ $(\omega \in B)$ ainsi définie :

si $x \in D(f)$ (domaine de définition de f), $\widehat{f}(x) = f(x)$

si $x \in A - D(f)$: $\widehat{f}(x) = \omega$.

Il est clair que l'application $f \longmapsto \widehat{f}$ est une bijection de l'ensemble des applications partielles de A dans B dans celui des applications de A dans $B \cup \{\omega\}$.

Mieux : si f est une application partielle de A dans B, définie sur $D = D(f)$, f est l'unique application de A dans $B = B \cup \{\omega\}$ faisant un pullback du diagramme :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ B \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

$\boxed{b}$. D'où la définition :

Dans une catégorie , on dit que l'on peut classer les morphismes partiels si, pour tout objet b, il existe un objet $\widehat{b}$ et un morphisme η_b de b vers $\widehat{b}$ tels que, pour tout monomorphisme $d \overset{g}{\rightarrowtail} a$ et pour tout morphisme $d \xrightarrow{f} b$, il existe un unique morphisme $\widehat{f}$ de a dans b tel que le diagramme suivant soit un pullback :

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "f"] & a \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ b \arrow[r, tail, "\eta_b"'] & \widehat{b} \end{tikzcd}$$

Remarquons que dans une catégorie ayant un objet final 1 et dans laquelle on peut classer les morphismes partiels, il y a nécessairement un classificateur de monomorphismes ($\Omega = \widehat{1}$, $T = \eta_1$ (morphisme de vérité)).

$\boxed{c}$. KOCK et WRAITH ont montré (dans [5]) que dans un topos élémentaire on peut classer les morphismes partiels :

Soit $\mathbf{C}$ un topos élémentaire, et soit b un objet de $\mathbf{C}$.

Soient $\Delta_b = < 1_b , 1_b > : b \rightarrowtail b \times b$, δ_b son morphisme caractéristique : $b \times b \longrightarrow \Omega$, $\{\}_b : b \longrightarrow \Omega^b$ l'adjoint exponentiel de δ_b, $< \{\}_b , 1_b > : b \rightarrowtail \Omega^b \times b$, h son morphisme caractéristique : $\Omega^b \times b \longrightarrow \Omega$, $\ulcorner h \urcorner : \Omega^b \longrightarrow \Omega^b$ l'adjoint exponentiel de h. b est le $\ulcorner h \urcorner : \Omega^b \longrightarrow \Omega^b$ l'adjoint exponentiel de h. b est le noyau de la paire $\Omega^b \underset{1_{\Omega^b}}{\overset{\ulcorner h \urcorner}{\rightrightarrows}} \Omega^b$ et η_b est l'unique morphisme de b vers $\widehat{b}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widehat{b} \arrow[r, tail] & \Omega^b \arrow[r, shift left, "\ulcorner h \urcorner"] \arrow[r, shift right, "1_{\Omega^b}"'] & \Omega^b \\ b \arrow[u, "\eta_b"] \arrow[ur, "\{\}_b"'] & & \end{tikzcd}$$

La construction précédente donne, dans le cas de la catégorie des ensembles :

$\widehat{B} = \{\{x\} \ / \ x \in B\} \cup \{\emptyset\}$

si $x \in B$, $\eta_\beta(x) = \{x\}$, ce qui revient à un isomorphisme près à ce qui est dit dans $\boxed{a}$.

§ 2 - LE PROBLEME DE LA CLASSIFICATION DES MORPHISMES PARTIELS DANS JTF^{oo}.

$\boxed{a}$. La catégorie JTF^{oo}.

D.PONASSE a introduit (dans [1]) une catégorie JTF d'ensembles totalement flous dont les objets sont ceux qu'utilisait déjà D.HIGGS (il s'agit en gros de parler d'ensembles pour lesquels soient modulées à la fois les notions d'appartenance et d'égalité, et pas seulement la notion d'appartenance comme c'est le cas dans la théorie classique des ensembles flous), mais dont les morphismes sont plus maniables, tout en étant assez naturels.

Dans [2], afin d'étudier plus commodément cette catégorie JTF, nous avons montré qu'elle est équivalente à une de ses sous-catégories pleines : JTF^{oo} dont les morphismes apparaissent comme des être gradués. En fait, JTF^{oo} est isomorphe à la catégorie des préfaisceaux séparés sur J, avec comme morphismes les transformations naturelles.

Dans [2] et [3], nous avons étudié JTF^{oo} : lorsque J est un anti-ordinal, c'est un topos. Sinon, il n'y a pas moyen de classer tous les monomorphismes, mais on peut néamoins classer tous les noyaux de paires. Nous avons montré comment, et caractérisé les monomorphismes forts, c'est-à-dire ceux qui sont des noyaux de paires, à la fois de diverses façons catégoriques (ce sont par exemple les monomorphismes réguliers) et en utilisant le tissu même de JTF^{oo}.

$\boxed{b}$. La classification des morphismes partiels dans JTF^{oo}.

On a la résultat suivant :

THEOREME.

Pour tout objet b de JTF^{oo}, il existe un objet $\widehat{b}$ et un morphisme ${}_b$ de b vers $\widehat{b}$ tels que, pour tout monomorphisme fort $d \supset\!\!\supset\!\xrightarrow{g} a$ et pour tout morphisme $d \xrightarrow{f} b$, il existe un unique morphisme $\widehat{f}$ faisant un pullback du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ b \arrow[r, "\eta_b"'] & \widehat{b} \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que l'on peut classer certains morphismes partiels de a vers b, intuitivement ceux dont le domaine de définition est un sous-objet fort de a.

On pourrait montrer ce théorème en reprenant la construction de KOCK et WRAITH.

Nous allons plutôt donner une preuve directe, dont l'intérêt sera de décrire précisément les choses au sein même de JTF^{oo}.

$\boxed{c}$. Preuve directe du théorème précédent et description précise de cette clasification.

* Notations utilisées.

Le treillis des valeurs d'appartenance J est un treillis de Heyting complet.

Pour la définition exacte de JTF^{oo}, pour les notations utilisées concernant les objets et les morphismes de JTF^{oo}, ainsi que pour la caractérisation dans JTF^{oo} des morphismes forts, nous renvoyons à J.COULON, J.L. COULON, ([3] ; Busefals n° 21, 23, 24).

Si bien que nous allons prouver le théorème suivant :

THEOREME.

Pour tout objet (X,σ) de JTF^{oo}, il existe un objet $(\widehat{X},\widehat{\sigma})$ et un morphisme η de (X,σ) vers $(\widehat{X},\widehat{\sigma})$ tels que, pour toute partie totalement floue forte D de (E,ρ) (objet de JTF^{oo}) et pour tout morphisme R de $(D,\rho|_{D\times D})$ vers (X,σ), il existe un unique morphisme $\widehat{R}$ de (E,ρ) vers $(\widehat{X},\widehat{\sigma})$ faisant un pullback du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} D & \hookrightarrow & (E,\rho) \\ \downarrow R & & \downarrow \widehat{R} \\ (X,\sigma) & \xrightarrow[\eta]{} & (\widehat{X},\widehat{\sigma}) \end{array}$$

* Construction de (X,σ).

Soit (X,σ) un objet de JTF^{oo}.

Rappelons qu'un *point de* (X,σ) est -selon D.SCOTT- une application d de X dans J telle que :

(P_1) $d(x) \wedge \sigma(x,y) \leqq d(y)$

(P_2) $d(x) \wedge d(y) \leqq \sigma(x,y)$.

Soit $\hat{X}$ l'ensemble des points de (X,σ).

Soit $\widehat{X}$ l'ensemble des (i,d) où $i \in J$ et où d est un point de (X,σ) tel que $\forall\, x \in X : d(x) \leqq i$.

Soit $\widehat{\sigma}$ l'application de $\widehat{X} \times \widehat{X}$ dans J définie par :

$$\sigma((i,d),\ (j,\delta)) = i \wedge j \wedge [\ \bigvee_x d(x) \vee \bigvee_x \delta(x) \longrightarrow \bigvee_x (d(x) \wedge \delta(x)) \qquad (1)$$

On peut montrer que $(\widehat{X},\widehat{\sigma})$ est un objet de JTF^{oo}.

L'idée qui a permis d'envisager $(\widehat{X},\widehat{\sigma})$ est celle ci : on définit un objet de JTF $(\hat{X},\lambda)$ en posant $\lambda(d,\delta) = \bigvee_x [d(x) \wedge \delta(x)]$ et un autre $(\hat{X},\wedge)$ en posant $\bigwedge(d,\delta) = \bigvee_x d(x) \vee \bigvee_x \delta(x) \longrightarrow \bigvee_x [d(x) \wedge \delta(x)]$, et d'une façon générale, étant donné un objet (X,σ) de JTF, on définit un autre objet de JTF : (X,Σ) en posant $\Sigma(x,y) = \sigma(x,x) \vee \sigma(y,y) \longrightarrow \sigma(x,y)$. L'intérêt de cette transformation dans le contexte précédent peut être senti en songeant à l'exemple suivant : si A et B sont deux ensembles, si $J = 2^A$, si f et g sont deux applications partielles de A dans B ayant pour domaine de définition respectifs $D(f)$ et $D(g)$, si $\sigma(f,g) = \{a \in A \ / \ a \in D(f),\ a \in D(g),\ f(a) = g(a)\}$, $\Sigma(f,g)$ apparaît comme l'ensemble des points de A en lesquels ou bien ni f ni g ne sont définies, ou bien f et g prennent la même valeur :

$$\Sigma(f,g) = [A - D(f) \cup D(g)] \cup \sigma(f,g).$$

La modification apportée qui consiste à travailler sur des couples (i,d) et non sur des points d a pour but d'obtenir un objet $(\widehat{X},\widehat{\sigma})$ qui soit non seulement dans JTF mais dans JTF^{oo}.

* <u>Construction de η</u> :

Si $i \in J$ et $x \in X_i$: $\eta_i(x) = (i,d_x)$, où $d_x(y) = \sigma(x,y)$.

* <u>Construction de $\widehat{R}$, R étant donné.</u>

$$\text{Si } e \in E_i,\ \widehat{R}_i(e) = (i,\Delta_e), \text{ où } \Delta_e(x) = \bigvee_{d \in D} [\sigma(R_j(d),x) \wedge \rho(e,d)] \quad (\text{avec } j = \rho(d,d)) \tag{2}$$

L'idée est celle-ci :

si $e \in D_i$, on doit avoir (pour que le diagramme envisagé soit commutatif) :

$$\Delta_e(x) = \sigma(R_j(e),\ x)$$

si $e \in E_i - D_i$, on réalise une approche de e par les points de D, points dont on tient d'autant plus compte qu'ils sont "égaux" à e. D'où (2).

On vérifie que $\widehat{R}$ est bien un morphisme et que le diagramme envisagé est un pullback (ce qui utilise le fait que D est un sous-objet <u>fort</u> de (E,ρ)). On montre ensuite que $\widehat{R}$ est l'unique morphisme de (E,ρ) vers $(\widehat{X},\widehat{\sigma})$ donnant un pullback (là encore, grâce au fait que D est un sous-objet <u>fort</u> de (E,ρ)).

Les preuves sont longues et fastidieuses : nous les omettons. Nous en avons rédigé une version polycopiée disponible à l'adresse indiquée en tête de l'exposé.

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. D.PONASSE :

Séminaire de Mathématique floue de l'Université de Lyon I

[2]. J.COULON, J.L.COULON :

Séminaire de Mathématique floue de l'Université de Lyon I
1984-1985 et 1985-1986 (exposés polycopiés).

[3]. J.COULON, J.L.COULON :

* *Remarques sur certaines catégories d'ensembles totalement flous*
(Busefals n° 21, 23, 24) ;
* *Classificateur faible de monomorphismes dans la catégorie* JTF^{oo}
(Busefal n° 26) ;
* *About some categories of totally fuzzy sets*
(submitted to JMAA) ;
* *Weak classifier of monomorphisms in the category* JTF^{oo}
(submitted to Portugaliae mathematica).

[4]. R.I.GOLDBLATT :

Topoï ; the categorical analysis in logic
studies in logic and the foundations of mathematics, Vol.98,
North-Holland publishing company, 1979.

[5]. A.KOCK and G.C.WRAITH :

Elementary toposes
Aarhus Lecture Note Series n° 30, 1971.

[6]. J.PENON :

Sur les quasi-topos ; cahiers de topologie et géométrie différentielle, XVIII-2, 1977.