OPÉRATEUR DE MINIMALISATION POUR LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DE RELATION FLOUE AVEC LA COMPOSITION INF-CONORME

L. BOUR[x] - *G. HIRSCH*[x] - *M. LAMOTTE*[x]

-----

1. INTRODUCTION

X et Y étant deux ensembles finis non vides, soient $F(X) = \{A : X \to [0,1]\}$ et $F(Y) = \{B : Y \to [0,1]\}$ les familles d'ensembles flous sur X et Y, et F(Y,X) l'ensemble des relations floues sur Y x X.

Dans un précédent article [1], nous considèrions l'équation de relation floue :

$$R \circ A = B \qquad (1)$$

où "$\circ$" désignait une composition sup-norme triangulaire, A et B étant des élements de F(X) et F(Y) respectivement, et R une relation floue appartenant à F(Y,X).

A et B étant donnés, l'ensemble :

$$E = \{R \mid R \circ A = B,\ R \in F(Y,X),\ A \in F(X),\ B \in F(Y)\}$$

désignait l'ensemble des solutions de l'équation (1) qui peut aussi s'écrire :

$$\sup_{x\ X} T(R(y,x), A(x)) = B(y)$$

où T est une norme triangulaire quelconque.

Dans la suite, I désignera le segment [0,1]. Les deux propositions suivantes avaient été établies.

[x] Université de Nancy I - Faculté des Sciences - Centre de Recherche en Automatique de Nancy (U.A. n° 821) - Laboratoire CRAN-LEA - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-lès-NANCY Cédex

Proposition 1 :

Si τ est un opérateur de I^2 dans I et si $E \neq \emptyset$, alors, pour que $B \; \textcircled{\tau} \; {}^tA$ définisse l'élément maximal $\check{R}$ de E, il suffit que τ vérifie, pour tout $(a,b,c) \in I^3$, les trois conditions suivantes :

$$a \geqslant c \Rightarrow a \,\tau\, b \geqslant c \,\tau\, b \qquad (2)$$

$$T(a,b) \,\tau\, b \geqslant a \qquad (3)$$

$$T(a \,\tau\, b, b) \leqslant a \qquad (4)$$

Un opérateur τ vérifiant les conditions (2), (3) et (4) est appelé opérateur de maximalisation associé à T pour l'équation (1).

Proposition 2 :

Si la norme triangulaire T est archimédienne, de fonction génératrice f, alors l'opérateur τ défini par :

$$a \,\tau\, b = \begin{cases} f^{-1}(f(a)-f(b)) & \text{si } a < b \\ 1 & \text{si } a \geqslant b \end{cases}$$

est un opérateur de maximalisation associé à T pour l'équation (1).

De plus, d'après [3] et en utilisant la proposition 1, on a également le résultat suivant :

Proposition 3 :

Si T est une norme triangulaire vérifiant la condition supplémentaire suivante :

$\forall\, b \in I$, la fonction $x \mapsto T(x,b)$ est continue sur I,

alors l'opérateur α_T défini par :

$$a \,\alpha_T\, b = \sup \{x \mid T(x,b) \leqslant a\}$$

est un opérateur de maximalisation pour l'équation (1).

Le but de cet article est de donner les résultats obtenus de façon analogue pour le problème dual du précédent.

On considère l'équation de relation floue duale de l'équation floue (1) :

$$R \,\square\, A = B \qquad (1')$$

où "$\square$" désigne une composition inf-conorme triangulaire, où A et B sont donnés et où R est une relation floue inconnue. On désignera par :

$$E^{*} = \{R \mid R \,\square\, A = B,\ R \in F(Y,X),\ A \in F(X),\ B \in F(Y)\}$$

l'ensemble des solutions de (1').

En supposant E^{*} non vide, on veut déterminer, s'il existe, l'élément minimal de E^{*}, c'est-à-dire déterminer une solution $\hat{R}$ de (1') telle que :

$$\forall (y,x) \in Y \times X,\ \forall\, R \in E^{*},\ \hat{R}(y,x) \leqslant R(y,x).$$

Si S désigne une conorme triangulaire quelconque, l'équation (1') peut aussi s'écrire :

$$\inf_{x \in X} [S(R(y,x)\ ,\ A(x))] = B(y)$$

Ainsi, dans le cas où S est la conorme triangulaire max, c'est-à-dire dans le cas où $\square$ désigne la composition min-max, on sait que l'opérateur β, dual de l'opérateur de Sanchez α, défini par :

$$a\ \beta\ b = \begin{cases} a \text{ si } a > b \\ 0 \text{ si } a \leqslant b \end{cases}$$

permet de définir la solution $\hat{R}$ de (1') par l'égalité :

$$\hat{R} = B \,\text{Ⓑ}\, {}^{t}A$$

où ${}^{t}A$ désigne la transposée de A et où $B \,\text{Ⓑ}\, {}^{t}A$ est défini par :

$$(B \,\text{Ⓑ}\, {}^{t}A)(y,x) = B(y) \,\text{Ⓑ}\, ({}^{t}A)(x).$$

Exemple 1 :

Si ${}^{t}A = (0.4 \quad 0.2 \quad 0.6)$, ${}^{t}B = (0.5 \quad 0.2)$, alors $E^{*} \neq \emptyset$ car $R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$ est une solution de $R \,\square\, A = B$ où $\square$ = min-max et $B \,\text{Ⓑ}\, {}^{t}A = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} \text{Ⓑ} (0.4 \quad 0.2 \quad 0.6) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{R}$.

On vérifie que $\hat{R}$ appartient à E^{*} et est l'élément minimal de E^{*}.

Définition :

On appellera opérateur de minimalisation pour l'équation (1'), et on notera σ_S, ou plus simplement σ si aucune confusion n'est possible, tout opérateur de I^2 dans I tel que $B \circledcirc {}^tA = \hat{R}$, où $\hat{R}$ est la solution minimale de (1') (si elle existe).

2. CONDITIONS SUFFISANTES PERMETTANT DE DEFINIR UN OPERATEUR DE MINIMALISATION

Proposition 1' :

Pour qu'un opérateur σ de I^2 dans I soit un opérateur de minimalisation pour l'équation (1'), l'ensemble E^* étant supposé non vide, il suffit que σ vérifie, pour tout (a,b,c) appartenant à I^3, les trois conditions suivantes :

$$a \leqslant c \Rightarrow a \,\sigma\, b \leqslant c \,\sigma\, b \qquad (2')$$

$$S(a,b) \,\sigma\, b \leqslant a \qquad (3')$$

$$S(a \,\sigma\, b,b) \geqslant a \qquad (4')$$

Démonstration :

Posons $R_m = B \circledcirc {}^tA$.

a) Puisque $E^* \neq \emptyset$, $B = R \,\square\, A$ et

$$R_m(y,x) = (R \,\square\, A) \circledcirc ({}^tA)(y,x) = (R \,\square\, A)(y) \,\sigma\, ({}^tA)(x)$$

$$= \inf_{z \in X} [S(R(y,z), A(z))] \,\sigma\, ({}^tA)(x)$$

et, puisque $\inf_{z \in X} [S(R(y,z),A(z))] \leqslant S(R(y,x),A(x))$ quel que soit $x \in I$, d'après (2') on a :

$$R_m(y,x) \leqslant S(R(y,x),A(x)) \,\sigma\, ({}^tA)(x).$$

b) D'après (3'), puisque $({}^tA)(x) = A(x)$,

$$S(R(y,x),A(x)) \,\sigma\, ({}^tA)(x) \leqslant R(y,x)$$

et donc, $\forall (y,x) \in Y \times X$, $\forall R \in E^*$, $R_m(y,x) \leqslant R(y,x)$.

c) Par suite, puisque $S(a,b)$ est une fonction croissante de a,

$$S(R_m(y,x),A(x)) = S(B(y)\ \sigma\ ({}^tA)(x),A(x)) \leqslant S(R(y,x),A(x))$$

et, d'après (4'), puisque $({}^tA)(x) = A(x)$,

$$B(y) \leqslant S(B(y)\ \sigma\ ({}^tA)(x),A(x)) \leqslant S(R(y,x),A(x)).$$

Il en résulte :

$$B(y) \leqslant \inf_{x\in X} S(R_m(y,x),A(x)) \leqslant \inf_{x\in X} S(R(y,x),A(x)) = B(y)$$

donc :

$$\inf_{x\in X} S(R_m(y,x),A(x)) = (R_m \,\square\, A)(y) = B(y),$$

c'est-à-dire $R_m \in E^{*}$.

Ainsi, R_m est bien la solution minimale de (1') et $R_m = \hat{R}$.

Remarque 1 :

Soit S la conorme triangulaire duale de la norme triangulaire T définie par :

$$S(a,b) = 1 - T(1-a\ ,\ 1-b)\ ,$$

et soit τ l'opérateur de maximalisation associé à T pour l'équation (1). Alors, l'opérateur σ défini par :

$$a\ \sigma\ b = 1 - (1-a)\ \tau\ (1-b),$$

est un opérateur de minimalisation associé à S pour l'équation (1'), duale de l'équation (1).

En effet : - si $a \leqslant c$ alors, d'après (2),

$$(1-a)\ \tau\ (1-b) \geqslant (1-c)\ \tau\ (1-b)$$

et

$$1 - (1-a)\tau(1-b) \leqslant 1 - (1-c)\ \tau\ (1-b)$$

donc (2') est vérifiée ;

- d'après (3), $T(1-a,1-b)\ \tau\ (1-b) \geqslant 1-a$

donc
$$\begin{aligned} S(a,b)\ \sigma\ b &= 1 - (1-S(a,b))\ \tau\ (1-b) \\ &= 1 - T(1-a,1-b)\ \tau\ (1-b) \leqslant a \end{aligned}$$

donc (3') est vérifiée ;

- d'après (4), $T((1-a)\ \tau\ (1-b),1-b) \leqslant 1-a$

donc
$$\begin{aligned} S(a\ \sigma\ b,b) &= 1 - T(1-a\ \sigma\ b,1-b) \\ &= 1 - T((1-a)\ \tau\ (1-b),1-b) \geqslant a \end{aligned}$$

donc (4') est vérifiée.

3. OPERATEUR DE MINIMALISATION ASSOCIE A UNE CONORME TRIANGULAIRE ARCHIMEDIENNE

On rappelle [2] qu'une conorme triangulaire archimédienne S peut être définie par :

$$S(a,b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b))$$

où g est la fonction génératrice de S et $g^{(-1)}$ la pseudo-inverse de g.

S est dite stricte si g est une application continue strictement croissante de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$ et, dans ce cas, $g^{(-1)} = g^{-1}$.

S est dite non stricte si g est une application continue strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0,1]$. Dans ce cas :

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si f est la fonction génératrice de la norme triangulaire T duale de S, on a :

$$S(a,b) = 1 - T(1-a,1-b) \quad , \quad g(x) = f(1-x)$$

et $$g^{(-1)}(x) = 1 - f^{(-1)}(x).$$

D'après la remarque 1, l'opérateur de minimalisation σ associé à S, est donné par :

$$a \,\sigma\, b = 1 - (1-a) \,\tau\, (1-b)$$

donc, d'après la proposition 2, si $1-a < 1-b$, c'est-à-dire si $a > b$,

$$\begin{aligned} a \,\sigma\, b &= 1 - f^{-1}(f(1-a)-f(1-b)) \\ &= g^{-1}(g(a)-g(b)) \end{aligned}$$

et si $a \leqslant b$, $a \,\sigma\, b = 0$.

Proposition 2' :

Si la conorme triangulaire S est archimédienne, de fonction génératrice g, alors l'opérateur σ défini par :

$$a \,\sigma\, b = \begin{cases} g^{-1}(g(a)-g(b)) & \text{si } a > b \\ 0 & \text{si } a \leqslant b \end{cases}$$

est un opérateur de minimalisation associé à S pour l'équation (1').

Exemple 2 :

Soit $S_2(a,b) = a+b - ab$; alors :

$$g(x) = -\ell n(1-x) \ , \ g^{-1}(x) = 1 - e^{-x}$$

et
$$a \,\sigma\, b = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leqslant b \\ \dfrac{a-b}{1-b} & \text{si } a > b \end{cases}$$

Soit ${}^tA = (0.2 \quad 0.4 \quad 0.6)$, ${}^tB = (0.6 \quad 0.2)$; alors,
$E^* \neq \emptyset$ car $R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \in E^*$ et
$B \, \textcircled{\sigma} \, {}^tA = \begin{pmatrix} 0.5 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{R} \in E^*$.

4. OPERATEUR DE MINIMALISATION ASSOCIE A UNE CONORME TRIANGULAIRE CONTINUE PAR RAPPORT A L'UN DE SES ARGUMENTS

Proposition 3' :

Si S est une conorme triangulaire vérifiant la condition supplémentaire suivante : $\forall\, b \in I$, la fonction $x \mapsto S(x,b)$ est continue sur I ; alors l'opérateur β_S de I^2 dans I défini par :

$$a \,\beta_S\, b = \inf\{x \mid S(x,b) \geqslant a\}$$

est un opérateur de minimalisation pour l'équation (1').

En effet : - (2') est vérifiée car :

$$a \leqslant c \Rightarrow \{x \mid S(x,b) \geqslant a\} \supseteq \{x \mid S(x,b) \geqslant c\}$$

donc :

$$\inf\{x \mid S(x,b) \geqslant a\} \leqslant \inf\{x \mid S(x,b) \geqslant c\}$$

c'est-à-dire :

$$a \,\beta_S\, b \leqslant c \,\beta_S\, b \ ;$$

- (3') est vérifiée car :

$$S(a,b) \,\beta_S\, b = \inf\{x \mid S(x,b) \geqslant S(a,b)\} \leqslant a \ ;$$

- (4') est vérifiée car, puisque la fonction $x \to S(x,b)$ est continue sur I,

$$a \,\beta_S\, b \in \{x \mid S(x,b) \geqslant a\},$$

c'est-à-dire :

$$S(a \,\beta_S\, b \ , \ b) \geqslant a.$$

Remarque 2 :

Si, dans la proposition 3', on supprime l'hypothèse de continuité sur I de la fonction $x \mapsto S(x,b)$, alors l'élément minimal de E^{*} peut ne pas exister, même si $E^{*} \neq \emptyset$.

Ainsi, par exemple, dans le cas où $\square = \inf.S_4$ (cf. tableau des résultats), la fonction $x \to S_4(x,b)$ n'est pas continue sur I et, si R est une solution de $R \square A = B$, l'opérateur μ de I^2 dans I défini par :

$$a \mu b = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \leqslant b \\ a & \text{si} \quad b = 0 \\ m & \text{où} \quad m \in]0,1] \text{ si } a > b \end{cases}$$

permet d'obtenir une solution de (1') minorant R ; pour cela, si on pose $R_m = B \, \mu \, {}^tA$ et si $R_m(y_i,x_j) = m$, il suffit de choisir $m \leqslant R(y_i,x_j)$.

Mais l'ensemble E^{*} des solutions n'admet pas d'élément minimal.

Par exemple, si ${}^tA = (0.2 \quad 0.4 \quad 0.6)$ et ${}^tB = (1 \quad 0.2)$, alors $R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$ est solution de $R \square A = B$ et, quel que soit $m \in]0,1]$,

$$B \, \mu \, {}^tA = R_m = \begin{pmatrix} m & m & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est aussi solution}$$

de (1'). Il suffit de choisir $m \in]0,0.1]$ pour obtenir une solution $R_m \leqslant R$.

Mais $\hat{R}$ n'existe pas car $R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E^{*}.

REFERENCES

[1] L. BOUR, G. HIRSCH, M. LAMOTTE : "Détermination d'un opérateur de maximalisation pour la résolution d'équations de relation floue". Buséfal 25 (1986), 95-106.

[2] D. DUBOIS : "Modèles mathématiques de l'imprécis et de l'incertain, en vue d'applications aux techniques d'aide à la décision". Thèse (1983), 402-403.

[3] M. MIYAKOSHI and M. SHIMBO : "Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms". Fuzzy Sets and Systems 16 (1985), 53-63.

TABLEAU DES RESULTATS

CONORMES TRIANGULAIRES S	PROPRIETES DE S	GENERATEUR ADDITIF g	$g^{-1}(x)$	$a \sigma b$ (pour $a > b$)
$S_1(a,b) = \max(a,b)$	Continue	-	-	a
$S_2(a,b) = a+b-ab$	Archimédienne stricte	$-\ell n(1-x)$	$1 - e^{-x}$	$\frac{a-b}{1-b}$
$S_3(a,b) = \min(1,a+b)$	Archimédienne non stricte	x	x	$a-b$
$S_4(a,b) = \begin{cases} a \text{ si } b=0 \\ b \text{ si } a=0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$	Discontinue	-	-	N'existe pas (cf. remarque 2)
$S_5(a,b) = \begin{cases} 1 \text{ si } a+b-1 \geqslant 0 \\ \max(a,b) \text{ si } a+b-1 < 0 \end{cases}$	Discontinue	-	-	a si $b < a \leqslant 1-b$ b si $a > \max(b,1-b)$
$S_6(a,b) = \min\left[1,(a^p+b^p)^{1/p}\right] = Y'_p(a,b)$ (Yager) $p \geqslant 0$, $Y'_0(a,b) = S_4$	Archimédienne non stricte	x^p	$x^{1/p}$	$(a^p - b^p)^{1/p}$
$S_7(a,b) = H'_\gamma(a,b) = 1 - \frac{(1-a)(1-b)}{\gamma+(1-\gamma)(1-ab)}$ (Hamacher) $\gamma \geqslant 0$, $H'_1 = S_2$, $H'_\infty = S_4$	Archimédienne stricte	$\frac{1}{\gamma} \ell n \frac{1+(\gamma-1)x}{1-x}$	$\frac{e^{\gamma x}-1}{e^{\gamma x}+\gamma-1}$	$\frac{a-b}{1-b-b(1-a)(1-\gamma)}$
$S_8(a,b) = D'_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+\left[(\frac{1}{a}-1)^{-\lambda}+(\frac{1}{b}-1)^{-\lambda}\right]^{-\frac{1}{\lambda}}}$ (Dombi) $\lambda > 0$, $D'_1 = H'_0$, $D'_\infty = S_1$	Archimédienne stricte	$(\frac{1}{x} - 1)^{-\lambda}$	$\frac{1}{1 + x^{-\frac{1}{\lambda}}}$	$\frac{1}{1 + \left[(\frac{1}{a}-1)^{-\lambda}-(\frac{1}{b}-1)^{-\lambda}\right]^{-\frac{1}{\lambda}}}$
$S_9(a,b) = S'_\lambda(a,b) = \min(1,a+b+\lambda ab)$ (Sugeno) $\lambda > -1$	Archimédienne non stricte	$\frac{\ell n(1+\lambda x)}{\ell n(1+\lambda)}$	$\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^x-1\right]$	$\frac{a-b}{1+\lambda b}$

$S_{10}(a,b) = W'_\lambda(a,b) = \min(1, a+b-\frac{\lambda ab}{1+\lambda})$ (Weber) $\lambda > -1$	Archimédienne non stricte	$1-\frac{\ln(1+\lambda(1-x))}{\ln(1+\lambda)}$	$1-\frac{1}{\lambda}[(1+\lambda)^{1-x}-1]$	$\frac{(1+\lambda)}{1+\lambda}\frac{(a-b)}{(1-b)}$
$S_{11}(a,b) = Sk'_p(a,b)$ $= 1-\max[0, (1-a)^{-p}+(1-b)^{-p}-1]^{-\frac{1}{p}}$ (Schweizer et Sklar) $p \in \mathbb{R}$	$p > 0$ Archimédienne stricte $p < 0$ Archimédienne non stricte	$p > 0$ $(1-x)^{-p}-1$ $p < 0$ $1-(1-x)^{-p}$	$p > 0$ $1-(1+x)^{-1/p}$ $p < 0$ $1-(1-x)^{-1/p}$	$1-[1+(1-a)^{-p}-(1-b)^{-p}]^{-\frac{1}{p}}$
$S_{12}(a,b) = F'_s(a,b)$ $= 1-\log_s\left[1+\frac{(s^{1-a}-1)(s^{1-b}-1)}{s-1}\right]$ (Frank) $s > 0,\ s \neq 1$	Archimédienne stricte	$\log_s \frac{s-1}{s^{1-x}-1}$	$1-\log_s(1+\frac{s-1}{s^x})$	$1-\log_s(1+\frac{(s-1)(s^{1-a}-1)}{s^{1-b}-1})$
$S_{13}(a,b) = D'_\alpha(a,b)$ $= 1-\frac{(1-a)(1-b)}{\max(1-a, 1-b, \alpha)}$ (Dubois et Prade) $\alpha \in [0,1]$, $D'_0 = S_1$, $D'_1 = S_2$	Continue	-	-	$1-\frac{1-a}{1-b}\max(1-b,\alpha)$