J. et J.L. COULON
Université Claude Bernard (Lyon I)
Département de Mathématiques 2° Cycle
Batiment 101
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex - FRANCE

CLASSIFICATEUR FAIBLE DE MONOMORPHISMES DANS LA CATEGORIE JTF^{oo}

Nous avons vu dans [3] que la catégorie JTF^{oo} *introduite dans [1] et [2] n'était pas un topos car, sauf dans le cas où* J *est un anti-ordinal, elle n'a pas de classificateur de monomorphismes. Le but de ce papier est d'introduire une classe de monomorphismes pouvant être "classés" et de décrire comment cette classification se fait. Il pourra être bon pour le lecteur de comparer les résultats obtenus avec ceux que l'on peut trouver dans [4].*

I - CLASSIFICATEUR FAIBLE DE MONOMORPHISMES DANS JTF^{oo}.

Dans toute la suite J est un treillis de Heyting complet mais n'est pas un anti-ordinal.

1 - Problème.

On se propose de trouver une classe $\mathfrak{M}$ de monomorphismes de JTF^{oo}, un objet (Ω,ω) de JTF^{oo} et un morphisme $T : 1 = (J,\wedge) \longrightarrow (\Omega,\omega)$ tels que :

(1). quel que soit $R : (Y,\tau) \rightarrowtail (X,\sigma)$ élément de $\mathfrak{M}$ il existe $\chi : (X,\sigma) \longrightarrow (\Omega,\omega)$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "T"] & \\
(Y,\tau) \arrow[ur, "!"] \arrow[dr, tail, "R"'] & & (\Omega,\omega) \\
 & (X,\sigma) \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

soit un pullback.

(2). Si R est un monomorphisme de (Y,τ) dans (X,σ) tel qu'il existe $\chi : (X,\sigma) \longrightarrow (\Omega,\omega)$ faisant du diagramme ci-dessus un pullback, alors $R \in \mathfrak{M}$.

2 - Construction de l'objet (Ω,ω) et du morphisme de vérité T.

Sur J^2, on introduit l'équivalence suivante :

$(i,\alpha) \sim (j,\beta) \Longleftrightarrow i = j \prec \alpha \leftrightarrow \beta$.

On pose alors :

$\Omega = \{(\widetilde{i,\alpha}) \ / \ (i,\alpha) \in J^2\}$

$\omega((\widetilde{i,\alpha}), (\widetilde{j,\beta}))$ que l'on note $(\widetilde{i,\alpha}) \leftrightarrow (\widetilde{j,\beta}) = i \wedge j \wedge (\alpha \leftrightarrow \beta)$.

Remarque.

Il existe un seul représentant (i,β) de $(\widetilde{i,\alpha})$ tel que $\beta \prec i$. On l'appelle *représentant canonique de* $(\widetilde{i,\alpha})$.

On définit alors un morphisme T de $(J,\wedge)$ dans $(\Omega , \leftrightarrow)$ par $T_i(i) = (\widetilde{i,1})$ (dont le représentant canonique est (i,i)).

3 - Soit alors $(Y,\tau) \overset{R}{\rightarrowtail} (X,\sigma)$ un monomorphisme.

Supposons qu'il existe $\chi : (X,\sigma) \longrightarrow (\Omega , \leftrightarrow)$ tel que le diagramme :

$$\mathcal{P} : \quad \begin{tikzcd} & (J,\wedge) \arrow[dr, "T"] & \\ (Y,\tau) \arrow[ur, "!"] \arrow[dr, hook, "R"'] & & (\Omega , \leftrightarrow) \\ & (X,\sigma) \arrow[ur, "\chi"'] & \end{tikzcd}$$

soit un pullback.

Posons : $\operatorname{Im} R = \bigcup_{i \in J} R_i Y_i$.

$(\operatorname{Im} R , \sigma/_{\operatorname{Im} R \times \operatorname{Im} R})$ est un sous-objet de (X,σ).

* Si $x \in \mathrm{Im}\, R$ alors $x \in \mathrm{Im}\, R_i$ et :

$$\chi_i(x) = \chi_i R_i(y) = T_i(i) = \widetilde{(i,1)}$$

* Si $x \notin \mathrm{Im}\, R$ et si $x \in X_i$, $\chi_i(x) = \widetilde{(i\,,\alpha_i(x))}$ avec $\alpha_i(x) \prec i$.

D'autre part, pour tout $x^* \in \mathrm{Im}\, R$,

$$\sigma(x,x^*) \prec \widetilde{(i\,,\alpha_i(x))} \leftrightarrow \widetilde{(\alpha_\sigma(x^*)}\,,1) = i \wedge \alpha_\sigma(x^*) \wedge \alpha_i(x)$$

donc $\sigma(x,x^*) \prec \alpha_i(x)$

et $\sigma(x\,,\mathrm{Im}\, R) = \bigvee\limits_{x^* \in \mathrm{Im}\, R} \sigma(x,x^*) \prec \alpha_i(x)$.

* On peut alors voir que :

$$\chi_i(x) = \widetilde{(i,1)} \Rightarrow x \in \mathrm{Im}\, R.$$

En effet si $x \in \mathrm{Im}\, R$, soit $Z = \{z \in X \,/\, \sigma(z,x) = \alpha_\sigma(z)\}$.

Z est une section initiale de X pour l'ordre $\prec_\sigma$ donc $(Z\,,\sigma/_{Z\times Z})$ est un objet de JTF^{oo}.

Le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & (J,\wedge) \arrow[dr, "T"] & \\
(Z\,,\sigma/_{Z\times Z}) \arrow[ur] \arrow[dr, "\mathcal{I}"'] & & (\Omega\,,\leftrightarrow) \\
 & (X,\sigma) \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{I}$ est défini par $\mathcal{I}_i(x) = x$ est commutatif donc il existe $S : (Z\,,\sigma/_{Z\times Z}) \longrightarrow (Y,\tau)$ tel que $RS = \mathcal{I}$ et par suite $x = R_i S_i(x) \in \mathrm{Im}\, R$ ce qui est absurde.

donc si $\left[\begin{array}{l} x \in \mathrm{Im}\, R \\ x \in X_i \end{array}\right.$ $(i,1) \nprec (i\,,\alpha_i(x))$ donc $i \nprec \alpha_i(x)$.

Puisque $\alpha_i(x) \prec i$ et que $i \nprec \alpha_i(x)$ c'est que $\alpha_i(x) < i$.

et donc : $\underline{\sigma(x\,,\mathrm{Im}\, R) < i}$.

4 - Soit alors $(Y,\tau) \overset{R}{\rightarrowtail} (X,\sigma)$ un monomorphisme tel que : si $x \notin \mathrm{Im}\, R$, $\sigma(x, \mathrm{Im}\, R) < \alpha_\sigma(x)$.

Il est alors facile de vérifier que le morphisme $(X,\sigma) \xrightarrow{\chi} (\Omega, \leftrightarrow)$ défini par :

$$\text{si } x \in X_i : \chi_i(x) = \widetilde{(i, \sigma(x, \mathrm{Im}\, R))}$$

est tel que le diagramme $\mathfrak{P}$ est un pullback.

5 - Définition.

On dit que $(Y,\tau) \overset{R}{\rightarrowtail} (X,\sigma)$ est un monomorphisme fort si :

(1). c'est un monomorphisme

(2). $\forall\, x \in X - \mathrm{Im}\, R \quad \sigma(x, \mathrm{Im}\, R) < \alpha_\sigma(x)$.

II - UNICITE DU MORPHISME CARACTERISTIQUE D'UN MONOMORPHISME FORT.

Nous avons vu dans la première partie que si R est un monomorphisme fort, le morphisme $\chi : (X,\sigma) \longrightarrow (\Omega, \leftrightarrow)$ défini par : $\chi_i(x) = \widetilde{(i, \sigma(x, \mathrm{Im}\, R))}$ faisait du diagramme $\mathfrak{P}$ un pullback. On dit que χ est un *morphisme caractéristique de* R. On va voir dans cette partie que χ est le seul morphisme caractéristique de R.

1 - Representation d'un morphisme allant vers $(\Omega, \leftrightarrow)$.

* Soit $(X,\sigma) \xrightarrow{\eta} (\Omega, \leftrightarrow)$ un morphisme allant vers $(\Omega, \leftrightarrow)$. On dit que $\gamma : X \longrightarrow J$ est un représentant de η si : $\eta_i(x) = \widetilde{(i, \gamma(x))}$ $(x \in X_i)$.

On a vu que $\widetilde{(i, \gamma(x))}$ avait un unique élément $(i, \gamma_o(x))$ tel que $\gamma_o(x) \prec i$. γ_o est dit *représentant canonique de* η.

* Réciproquement si $\gamma : X \longrightarrow J$ vérifie $\sigma(x,x') \prec \gamma(x) \leftrightarrow \gamma(x')$ alors $(\chi_i)_{i \in J}$ définie par $\chi_i(x) = \widetilde{(i, \gamma(x))}$ $(x \in X_i)$ est la famille naturelle d'un morphisme $(X,\sigma) \xrightarrow{\chi} (\Omega, \leftrightarrow)$.

* Si R est un monomorphisme fort, $x \longmapsto \sigma(x\,,\mathrm{Im}\,R)$ est le représentant canonique de χ.

$\underline{\underline{2}}$ - Notion de point dans JTF^{oo}.

* Définition.

On appelle point de (X,σ) tout monomorphisme fort d'un sous-objet de $1 = (J,\wedge)$ dans (X,σ).

On peut remarquer que cette définition n'est pas la définition classique d'un point dans une catégorie mais dans JTF^{oo} la notion classique de point ne présentant pas d'intérêt, c'est celle-là que nous retiendrons.

* Soit alors $(\Sigma,\wedge) \overset{P}{\rightarrowtail} (X,\sigma)$ un point de (X,σ).

(Σ est une section initiale de J pour l'ordre habituel). Puisque P est un monomorphisme fort, il admet un morphisme caractéristique χ^P défini par :

$$\chi^P_i(x) = \widetilde{(i\,,\sigma(x\,,\mathrm{Im}\,P))} \quad \text{si} \quad x \in X_i.$$

Posons $d(x) = \sigma(x\,,\mathrm{Im}\,P)$. d est le représentant canonique de χ^P. On sait déjà que :

$$(1).\ \sigma(x,x') \prec d(x) \leftrightarrow d(x')$$

et on montre facilement que :

$$(2).\ d(x) \wedge d(x') \prec \sigma(x,x').$$

Réciproquement, si $d : X \longrightarrow J$ vérifie (1) et (2), d représente un morphisme η de $(X,\sigma) \longrightarrow (\Omega\,,\leftrightarrow)$. En construisant le pullback

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "T"] & \\ & (\Omega\,,\leftrightarrow) \\ (X,\sigma) \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

On trouve un objet (Y,τ) de JTF^{oo} sous-objet de (X,σ) tel que :

$Y_i = \{x \in X_i \ / \ \eta_i(x) = \widetilde{(i,1)}\} = \{x \in X_i \ / \ \eta_i(x) = \widetilde{(i\ ,\ d(x))} = \widetilde{(i,1)}\}$.

Or, si x et x' sont dans X_i et si $d(x) = d(x') = i$,

$i = d(x) \wedge d(x') \prec \sigma(x,x') \prec i$ donc $x = x'$.

Si $\Sigma = \{j \in J \ / \ Y_j \neq \emptyset\}$, $(\Sigma,\wedge)$ et (Y,τ) sont isomorphes et d est le représentant canonique d'un morphisme caractéristique d'un point de (X,σ)

d'où :

Définition.

On appelle *point* de (X,σ) toute application $d : X \longrightarrow J$ vérifiant :

(1). $\sigma(x,x') \prec d(x) \leftrightarrow d(x')$

(2). $d(x) \wedge d(x') \prec \sigma(x,x')$.

On retrouve la notion de point utilisée par U.HÖHLE dans LUS.

Exemple.

Soit $x_o \in X$. L'application $d_{x_o} : X \longrightarrow J$ définie par $d_{x_o}(x) = \sigma(x,x_o)$ est un point de (X,σ) appelé *point principal*.

3 - Points d'un morphisme allant vers $(\Omega\ ,\leftrightarrow)$.

Définition.

Soit $(X,\sigma) \xrightarrow{\eta} (\Omega\ ,\leftrightarrow)$ un morphisme allant vers $(\Omega\ ,\leftrightarrow)$ de représentant canonique γ. On appellera *point de* η tout point d de (X,σ) tel que $d \prec \gamma$.

On notera $\mathfrak{D}_\eta$ l'ensemble des points de η.

THEOREME.

$$\gamma = \bigvee_{d \in \mathcal{D}_\eta} d$$

qui résulte du lemme suivant :

Si $x_o \in X$ il existe $d \in \mathcal{D}_\eta$ tel que $d(x_o) = \gamma(x_o)$.

(ce point d est défini par : $d(x) = \sigma(x,x_o) \wedge \gamma(x_o)$. La preuve est très simple).

4 - Unicité du morphisme caractéristique d'un monomorphisme fort.

THEOREME.

Soit $(Y,\tau) \overset{R}{\rightarrowtail} (X,\sigma)$ un monomorphisme fort de moprhisme caractéristique η. Alors, si $x \in X_i$:

$\eta_i(x) = \chi_i(x) = \widetilde{(i\ ,\ \sigma(x\ ,\ \mathrm{Im}\ R))}$.

Démonstration.

Soit γ le représentant canonique de η, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\eta$ l'ensemble des points de η. Nous allons montrer que :

$$\forall\ x \in X \quad \bigvee_{d \in \mathcal{D}} d(x) = \sigma(x\ ,\ \mathrm{Im}\ R)$$

* Soit $z \in \mathrm{Im}\ R$, $j = \alpha_\sigma(z)$.

Puisque $z \in \mathrm{Im}\ R$, $\widetilde{(j\ ,\ \gamma(z))} = (\tilde{j},1)$ donc $j \preccurlyeq \gamma(z) \preccurlyeq j$

et par suite $j = \gamma(z)$

$\sigma(x,z) \preccurlyeq j = \gamma(z)$

donc $\sigma(x,z) \preccurlyeq \sigma(x,z) \wedge \gamma(z)$.

Or : $x \longmapsto \sigma(x,z) \wedge \gamma(z)$ est un point de $\mathcal{D}$ donc :

$$\forall\ z \in \mathrm{Im}\ R \quad \sigma(x,z) \preccurlyeq \bigvee_{d \in \mathcal{D}} d(x)$$

et donc : $\sigma(x\ ,\ \mathrm{Im}\ R) \preccurlyeq \bigvee_{d \in \mathcal{D}} d(x)$.

* Réciproquement, montrons que si $d \in \mathfrak{D}$, $d(x) \prec \sigma(x\,,\operatorname{Im} R)$. Définissons $\rho : X^2 \longrightarrow J$ par : $\rho(x,x') = d(x) \wedge d(x')$.

Il est facile de voir que (X,ρ) est un objet de JTF qui vérifie (ii) mais qui ne vérifie pas (i).

Posons alors $Z = {}^{X}/_{\equiv}$ (où $x \equiv x' \iff d(x) = d(x')$).

Si $\bar{x}$ désigne la classe de x et si $\bar{\rho}(\bar{x},\bar{x}') = \rho(x,x')$ $(Z,\bar{\rho})$ est un objet de JTF^{oo}.

Définissons alors $S : (Z,\bar{\rho}) \longrightarrow (X,\sigma)$ par : $S_i(\bar{x}) = x/_i$. (cela a un sens car si $\bar{x} = \bar{y}$ alors $d(x) = d(y) = i$ donc : $i = d(x) \wedge d(y) \prec \sigma(x,y)$ et $x/_i = y/_i$).

Il est facile de voir que $(S_i)_{i \in J}$ détermine un morphisme et que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{I} \arrow[rrd, "T"] & & \\
(Z,\bar{\rho}) \arrow[ur] \arrow[drr, "S"'] & (Y,\tau) \arrow[u] \arrow[dr, "R"] & & (\Omega\,,\leftrightarrow) \\
 & & (X,\rho) \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Puisque η est un morphisme caractéristique de R, il existe $\theta : (Z,\bar{\rho}) \longrightarrow (Y,\tau)$ fermant le diagramme (c'est-à-dire tel que $R\theta = S$). alors si $d(x) = i$:

$$S_i(\bar{x}) = x/_i = R_i\theta_i(\bar{x}) \in \operatorname{Im} R$$
$$d(x) = i = \sigma(x\,,x/_i) \prec \sigma(x\,,\operatorname{Im} R)$$

ce qui achève la démonstration.

REFERENCES.

[1], [2], [3]. J. et J.L. COULON :
"Remarques sur certaines catégories d'ensembles totalement flous",
BUSEFAL 1985.

[4]. U. HÖHLE and U. CERRUTI :
"Categorial foundations of fuzzy set theory with applications to algebra and topology",
(Preprint).