DÉTERMINATION D'UN OPÉRATEUR DE MAXIMALISATION POUR LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DE RELATION FLOUE

L. BOUR[*] - *G. HIRSCH*[*] - *M. LAMOTTE*[*]

1. INTRODUCTION

Soient X et Y deux ensembles finis non vides, $F(X) = \{A : X \to [0,1]\}$ et $F(Y) = \{B : Y \to [0,1]\}$ les familles d'ensembles flous sur X et Y respectivement, et $F(Y \times X)$ l'ensemble des relations floues sur Y x X.

On considère l'équation de relation floue :

$$R \circ A = B \qquad (1)$$

où "$\circ$" désigne une composition sup-norme triangulaire, $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$, R étant une relation floue appartenant à $F(Y \times X)$.

Si T désigne une norme triangulaire quelconque, l'équation (1) peut aussi s'écrire :

$$\sup_{x \in X} [T(R(y,x),A(x))] = B(y)$$

où $y \in Y$.

A et B étant donnés, on considère la relation R comme inconnue de l'équation (1) et on désigne par :

$$E = \{R \mid R \circ A = B,\ R \in F(Y,X)\}$$

l'ensemble des solutions de (1).

En supposant E non vide, on veut déterminer l'élément maximal de E, s'il existe, c'est-à-dire déterminer une solution $\check{R}$ de (1) telle que :

$$\forall (y,x) \in Y \times X,\ \forall R \in E,\ R(y,x) \leqslant \check{R}(y,x).$$

* Université de Nancy I - Faculté des Sciences - Centre de Recherche en Automatique de Nancy (U.A. n° 821) - Laboratoire CRAN-LEA - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-lès-NANCY Cédex

Ainsi, dans le cas où T est la norme triangulaire min, c'est-à-dire dans le cas où $\circ$ désigne la composition max-min, on sait [4] que l'opérateur de Sanchez α défini par :

$$a \,\alpha\, b = \begin{cases} 1 \text{ si } a \geqslant b \\ a \text{ si } a < b \end{cases}$$

permet de définir la solution $\check{R}$ de (1) par l'égalité :

$$\check{R} = B \,\alpha\, {}^tA$$

où ${}^tA$ désigne la transposée de A et où $B \,\alpha\, {}^tA$ est défini par :

$$(B \,\alpha\, {}^tA)(y,x) = B(y) \,\alpha\, {}^tA(x) \;.$$

Si on pose $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$, il sera commode, dans les exemples numériques, de représenter R par une p x n-matrice :

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pn} \end{pmatrix}$$

où $r_{ij} = R(y_i, x_j)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

et de représenter A et B à l'aide des matrices-colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

où $a_i = A(x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $b_i = B(y_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

Exemple 1 :

Si $\circ$ = max-min et si $A = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$, alors :

$E \neq \emptyset$ car $R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$ est une solution de $R \circ A = B$ et

$$B \, \alpha \, {}^tA = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} \alpha \, (0.2 \quad 0.4 \quad 0.6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \check{R}.$$

On vérifie que $\check{R}$ appartient à E et est l'élément maximal de E.

Ainsi, l'opérateur de Sanchez α permet d'obtenir la solution maximale de (1) dans le cas où la composition $\circ$ est la composition max-min : α sera dit "opérateur de maximalisation" associé à la composition $\circ$ = max-min.

Dans [2] sont données les propriétés de l'opérateur de maximalisation associé à la composition sup-norme triangulaire, et dans [3] cet opérateur est défini pour $\circ$ = sup-T dans le cas où :

$$T(a,b) = 1-\min\left[1, ((1-a)^p + (1-b)^p)^{1/p}\right] , \quad p \geqslant 1 .$$

On se propose ici, après avoir rappelé les conditions suffisantes que doit vérifier l'opérateur de maximalisation, de généraliser ce résultat et de définir un opérateur de maximalisation, qui sera noté τ, associé à la composition sup-T, où T est une norme triangulaire quelconque.

2. CONDITIONS SUFFISANTES PERMETTANT DE DEFINIR UN OPERATEUR DE MAXIMALISATION

Soit $\tau : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ un opérateur : on veut déterminer des conditions suffisantes pour que :

$$B \, \tau \, {}^tA = \check{R} ,$$

c'est-à-dire pour que :

$$\forall R \in E, \; \forall (y,x) \in Y \times X, \; R(y,x) \leqslant \check{R}(y,x) = B(y) \;\tau\; {}^tA(x) .$$

$$(R \circ A) \, \tau \, ({}^tA)(y,x) = (R \circ A)(y) \;\tau\; ({}^tA)(x)$$

$$= \sup_{z \in X} [T(R(y,z), A(z))] \;\tau\; {}^tA(x)$$

donc, si l'opérateur τ vérifie la condition :

$$\boxed{a \,\tau\, b \geqslant c \,\tau\, b \text{ si } a \geqslant c} \qquad (2)$$

alors, puisque pour tout $x \in X$:

$$\sup_{z \in X} [T(R(y,z),A(z))] \geqslant T[R(y,x),A(x)] ,$$

$$\sup_{z \in X} [T(R(y,z),A(z))] \,\tau\, {}^tA(x) \geqslant T(R(y,x),A(x)) \,\tau\, {}^tA(x) .$$

De plus, pour que

$$T(R(y,x),A(x)) \,\tau\, {}^tA(x) \geqslant R(y,x) ,$$

il suffit que l'opérateur τ vérifie la condition :

$$\boxed{T(a,b) \,\tau\, b \geqslant a} \qquad (3)$$

car ${}^tA(x) = A(x)$.

On obtient ainsi :

$$(R \circ A) \,\tau\, ({}^tA)(y,x) = (B \,\tau\, {}^tA)(y,x) \geqslant R(y,x)$$

donc, pour que $B \,\tau\, {}^t\check{A}$ définisse une relation $\check{R}$ telle que, quel que soit $R \in E$, $R \leqslant \check{R}$, il suffit que τ vérifie les conditions (2) et (3).

Il reste à préciser à quelle condition $\check{R}$ appartient à E.

Soit $R \in E$, E étant supposé non vide ;

puisque :

$$\forall (y,x) \in Y \times X , \; R(y,x) \leqslant \check{R}(y,x)$$

$$T(R(y,x),A(x)) \leqslant T(\check{R}(y,x),A(x))$$

donc : $\sup_{x \in X} [T(R(y,x),A(x))] \leqslant \sup_{x \in X} [T(\check{R}(y,x),A(x))]$

c'est-à-dire :

$$B(y) \leqslant \sup_{x \in X} [T(\check{R}(y,x),A(x))] .$$

Pour que $\check{R}$ appartienne à E, il suffit que :

$$\boxed{\forall (a,b) \in [0,1] \times [0,1] , \ T(a \ \tau \ b, b) \leqslant a} \qquad (4)$$

car alors :

$$T(\check{R}(y,x), A(x)) = T[B(y) \ \tau \ {}^{t}A(x), A(x)] \leqslant B(y)$$

puisque ${}^{t}A(x) = A(x)$, et donc :

$$\sup_{x \in X} [T(\check{R}(y,x), A(x))] = (\check{R} \circ A)(y) \leqslant B(y) \ .$$

Finalement, $B(y) \leqslant (\check{R} \circ A)(y) \leqslant B(y)$, donc $\check{R} \in E$ et l'on a ainsi établi la proposition suivante :

Proposition :

Si l'opérateur $\tau : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ vérifie les conditions (2), (3), (4) et si $E \neq \emptyset$, alors $B \textcircled{\tau} {}^{t}A = \check{R}$ définit l'élément maximal de E.

3. DETERMINATION DE L'OPERATEUR DE MAXIMALISATION ASSOCIE A UNE NORME TRIANGULAIRE ARCHIMEDIENNE

On rappelle [1] qu'une norme triangulaire archimédienne T peut être définie par :

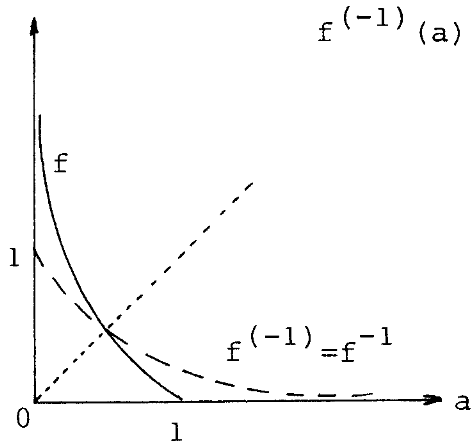
$$T(a,b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b))$$

où f est la fonction génératrice de T et $f^{(-1)}$ la pseudo-inverse de f.

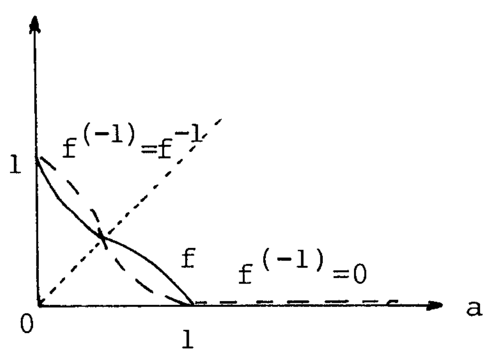
T est dite stricte si f est une application continue strictement décroissante de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$ et, dans ce cas, $f^{(-1)} = f^{-1}$.

T est dite non stricte si f est une application continue strictement décroissante de $[0,1]$ sur $[0,1]$. Dans ce cas :

$$f^{(-1)}(a) = \begin{cases} f^{-1}(a) & \text{si } a \in [0,1] \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$$



T stricte



T non stricte

a) Condition pour que (4) soit vérifiée :

On a :

$$\forall(a,b) \in [0,1] \times [0,1],\ T(a \tau b, b) \leqslant b\ ;$$

donc, si $b \leqslant a$, l'inégalité (4) est vérifiée quel que soit l'opérateur τ.

On peut donc supposer $a < b$. L'inégalité (4) s'écrit aussi :

$$f^{(-1)}\left[f(a \tau b) + f(b)\right] \leqslant a \qquad (4')$$

Si $f^{(-1)}\left[f(a\tau b) + f(b)\right] = 0$ (dans le cas où T n'est pas stricte et où $f(a\tau b) + f(b) \geqslant 1$), alors (4') est vérifiée.

Sinon, on a $f^{(-1)} = f^{-1}$ et, puisque f^{-1} est décroissante, (4') peut aussi s'écrire :

$$f(a \tau b) + f(b) \geqslant f(a)$$

c'est-à-dire :

$$f(a \tau b) \geqslant f(a) - f(b)$$

et puisque $\quad f(a) - f(b) \geqslant 0$,

$$a \tau b \leqslant f^{-1}(f(a) - f(b)).$$

En conclusion, pour que :

$$\forall(a,b) \in [0,1]\times[0,1],\ T(a \tau b, b) \leqslant a \qquad (4)$$

il suffit que :

$$\forall(a,b) \in [0,1]\times[0,1],\ a < b \Longrightarrow a \tau b \leqslant f^{-1}(f(a)-f(b)) \qquad (5)$$

b) Condition pour que :

$$\forall(a,b) \in [0,1]\times[0,1],\ T(a \tau b, b) \leqslant a \qquad (4)$$

$$\forall(a,b) \in [0,1]\times[0,1],\ T(a,b)\ \tau\ b \geqslant a \qquad (3)$$

soient vérifiées simultanément :

On suppose la condition (5) vérifiée ; alors (4) l'est également.

Pour $b = 1$, la relation (5) donne, pour $a < 1$:

$$a \tau 1 \leqslant f^{-1}(f(a)) = a ,$$

tandis que (3) donne :

$$T(a,1) \tau 1 = a \tau 1 \geqslant a$$

Les relations (3) et (5) ne sont donc compatibles que si l'on a, pour $a < 1$, $a \tau 1 = f^{-1}(f(a) - f(1))$.

Plus généralement, posons, pour $a \leqslant b$:

$$a \tau b = f^{-1}(f(a) - f(b))$$

et vérifions qu'alors la condition (3) est satisfaite :

$\forall(a,b) \in [0,1]\times[0,1]$, $T(a,b) \leqslant b$

et $T(a,b) \tau b = f^{-1}[f(T(a,b)) - f(b)]$

$= f^{-1}[f(f^{(-1)}(f(a) + f(b))) - f(b)]$.

Si T n'est pas stricte et si $f(a) + f(b) > 1$, alors :

$$f^{(-1)}(f(a) + f(b)) = 0$$

et $T(a,b) \tau b = f^{-1}[f(0) - f(b)] = f^{-1}[1 - f(b)] \geqslant a$,

car : $f(a) > 1 - f(b) \Rightarrow a < f^{-1}[1 - f(b)]$,

donc (3) est vérifiée.

Si $f(a) + f(b) \leqslant 1$, ou si T est stricte, $f^{(-1)} = f^{-1}$ et :

$$T(a,b) \tau b = f^{-1}(f(a)) = a ,$$

donc (3) est vérifiée.

En conclusion, si on pose :

$$a \tau b = f^{-1}(f(a) - f(b)) \text{ pour } a \leqslant b \qquad (6)$$

les relations (3) et (4) sont vérifiées.

c) Recherche de τ : $[0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ pour que

$\forall(a,b) \in [0,1]\times[0,1]$, $T(a\tau b,b) \leqslant a$ (4)

$\forall(a,b) \in [0,1]\times[0,1]$, $T(a,b)\tau b \geqslant a$ (3)

$\forall(a,b,c) \in [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, $a \geqslant c \Rightarrow a\tau b > c\tau b$ (2)

soient vérifiées simultanément :

On suppose la relation (6) vérifiée ; alors (4) et (3) sont vérifiées et, d'après (6), $b \tau b = f^{-1}(0) = 1$.

Pour que (2) soit vérifiée, il faut en particulier que :

$$a \geqslant b \Rightarrow a \tau b \geqslant b \tau b = 1 .$$

On est donc amené à compléter la définition en posant :

$$a \tau b = 1 \text{ si } a > b .$$

Il est immédiat de vérifier qu'alors, la condition (2) est satisfaite car :

si $c \leqslant a \leqslant b$, $f(c) - f(b) \geqslant f(a) - f(b)$

et $f^{-1}(f(c) - f(b)) \leqslant f^{-1}(f(a) - f(b))$

c'est-à-dire : $c \tau b \leqslant a \tau b$

si $c \leqslant b \leqslant a$, $c \tau b \leqslant 1 = a \tau b$

si $b \leqslant c \leqslant a$, $c \tau b = 1 = c \tau a$.

Remarque 1 :

On a posé, pour $a = b$, $a\tau b = f^{-1}(f(a)-f(b)) = f^{-1}(0) = 1$. En particulier, si T est archimédienne non stricte, $0 \tau 0 = f^{-1}(f(0)-f(0)) = 1$; mais si T est une t-norme archimédienne stricte, $f(0)$ n'est pas défini.

On convient de poser encore dans ce cas, $0 \tau 0 = 1$, et par conséquent :

$$\forall a \in [0,1] , a \tau a = 1 .$$

En tenant compte des résultats des paragraphes 2 et 3, on a donc établi le résultat suivant :

Proposition :

Soit T une norme triangulaire archimédienne de fonction génératrice f.
L'opérateur $\tau : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, défini par :

$$a \tau b = \begin{cases} f^{-1}(f(a) - f(b)) & \text{si } a < b \\ 1 & \text{si } a \geqslant b \end{cases}$$

est un opérateur de maximalisation associé à T (au sens donné par la définition du paragraphe 1).

Exemple 2 :

Reprenons les données de l'exemple 1, avec :

$T(x,y) = xy$, $f(x) = -\ell n\, x$ et $f^{-1}(x) = e^{-x}$

$$a \,\tau\, b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geqslant b \\ \frac{a}{b} & \text{si } a < b \end{cases}$$

et soit : $A = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$.

E n'est pas vide car : $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$, et

$$B \,\tau\, {}^tA = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} \tau\, (0.2 \quad 0.4 \quad 0.6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \check{R}.$$

On vérifie que $\check{R}$ appartient à E.

4. OPERATEUR DE MAXIMALISATION ASSOCIE A CERTAINES t-NORMES NON ARCHIMEDIENNES

Si une norme triangulaire T est continue mais non archimédienne, ou si elle est discontinue, il est possible, dans certains cas, en utilisant les relations (2), (3) et (4), de construire un opérateur de maximalisation τ associé à cette t-norme.

Ainsi, $T(a,b) = \min(a,b)$ est une t-norme continue, mais non archimédienne, n'admettant pas de générateur additif mais qui admet, ainsi qu'il a été vu au paragraphe 1, l'opérateur de Sanchez comme opérateur de maximalisation.

On a obtenu de cette manière les résultats qui sont résumés dans le tableau ci-après.

Remarque 2 :

Soit R une solution de $R \circ A = B$ dans le cas où $\circ = \sup - T_4$.
Alors l'opérateur ν : $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ défini par :

$$a \,\nu\, b = \begin{cases} 1 \text{ si } a \geqslant b \\ a \text{ si } b = 1 \\ \alpha \text{ où } \alpha \in [0,1[\text{ , si } a < b \end{cases}$$

permet d'obtenir une solution majorant R : pour cela, si on pose $R_\alpha = B \,\nu\, {}^tA$ et si $R_\alpha(b_i,a_j) = \alpha$, il suffit de choisir $\alpha \geqslant R(b_i,a_j)$.

Mais l'ensemble E des solutions n'admet pas d'élément maximal.

TABLEAU DES RESULTATS

NORMES TRIANGULAIRES T	PROPRIETES DE T	GENERATEUR ADDITIF f	$f^{-1}(x)$	$a \tau b$ (pour $a < b$)
$T_1(a,b) = \min(a,b)$	Continue	-	-	a (opérateur de Sanchez)
$T_2(a,b) = ab$	Archiméd. stricte	$-\ell n\, x$	e^{-x}	$\frac{a}{b}$
$T_3(a,b) = \max(0,a+b-1)$	Archiméd. non stricte	$1-x$	$1-x$	$1 + a - b$
$T_4(a,b) = \begin{array}{l} a \text{ si } b=1 \\ b \text{ si } a=1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}$	Discontinue	-	-	N'existe pas (cf. remarque 2)
$T_5(a,b) = \begin{array}{ll} 0 & \text{si } a+b-1 \leqslant 0 \\ \min(a,b) & \text{si } a+b-1 > 0 \end{array}$	Discontinue	-	-	a si $1-b \leqslant a < b$ $1-b$ si $a < \min(b,1-b)$
$T_6(a,b) = Y_p(a,b) = 1-\min\left[1, ((1-a)^p+(1-b)^p)^{\frac{1}{p}}\right]$ (Yager) $p \geqslant 0$, $Y_o = T_4$	Archiméd. non stricte	$(1-x)^p$	$1-x^{\frac{1}{p}}$	$1-\left[(1-a)^p-(1-b)^p\right]^{\frac{1}{p}}$
$T_7(a,b) = H_\gamma(a,b) = \frac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a+b-ab)}$ (Hamacher) $\gamma \geqslant 0$, $H_1 = T_2$, $H_\infty = T_4$	Archiméd. stricte	$\frac{1}{\gamma}\, \ell n \frac{\gamma+(1-\gamma)x}{x}$	$\frac{\gamma}{e^{\gamma x}+\gamma-1}$	$1 + \frac{a-b}{b-a(1-b)(1-\gamma)}$
$T_8(a,b) = D_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+\left[(\frac{1}{a}-1)^\lambda+(\frac{1}{b}-1)^\lambda\right]^{\frac{1}{\lambda}}}$ (Dombi) $\lambda > 0$, $D_1 = H_o$, $D_\infty = T_1$	Archiméd. stricte	$(\frac{1}{x}-1)^\lambda$	$\frac{1}{1+x^{\frac{1}{\lambda}}}$	$\frac{1}{1+\left[(\frac{1}{a}-1)^\lambda-(\frac{1}{b}-1)^\lambda\right]^{\frac{1}{\lambda}}}$

$T_9(a,b) = S_\lambda(a,b) = \max(0,(\lambda+1)(a+b-1-\lambda ab))$ (Sugeno) $\lambda > -1$	Archiméd. non stricte	$\frac{\ell n(1+\lambda(1-x))}{\ell n(1+\lambda)}$	$\frac{1}{\lambda}\left[1+\lambda-(1+\lambda)^x\right]$	$1 + \frac{a-b}{1+\lambda(1-b)}$
$T_{10}(a,b) = W_\lambda(a,b) = \max(0, \frac{a+b-1+\lambda ab}{1+\lambda})$ (Weber) $\lambda > -1$	Archiméd. non stricte	$1 - \frac{\ell n(1+\lambda x)}{\ell n(1+\lambda)}$	$\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{1-x}-1\right]$	$1 + \frac{(1+\lambda)(a-b)}{1+\lambda b}$
$T_{11}(a,b) = Sk_p(a,b) = \left[\max(0,a^{-p}+b^{-p}-1)\right]^{-\frac{1}{p}}$ (Schweizer et Sklar) $p \in \mathbb{R}$ $Sk_o = T_2$, $Sk_{-1} = T_3$, $Sk_{+\infty} = T_1$, $Sk_{-\infty} = T_4$	$p > 0$ Archiméd. stricte $p < 0$ Archiméd. non stricte	$p > 0$ $x^{-p} - 1$ $p < 0$ $1 - x^{-p}$	$p > 0$ $(1+x)^{-1/p}$ $p < 0$ $(1-x)^{-1/p}$	$(1 + a^{-p}-b^{-p})^{-1/p}$
$T_{12}(a,b) = F_s(a,b) = \log_s\left[1 + \frac{(s^a-1)(s^b-1)}{s-1}\right]$ (Frank) $s > 0$, $s \neq 1$, $F_\infty = T_3$	Archiméd. stricte	$\log_s \frac{s-1}{s^x-1}$	$\log_s(1+ \frac{s-1}{s^x})$	$\log_s(1+ \frac{(s-1)(s^a-1)}{s^b-1})$
$T_{13}(a,b) = D_\alpha(a,b) = \frac{ab}{\max(a,b,\alpha)}$ (Dubois et Prade) $\alpha \in [0,1]$, $D_o = T_1$, $D_1 = T_2$	Continue	-	-	$\frac{a}{b}\max(b,\alpha)$

Tableau des résultats

Exemple : si ${}^tA = (0.2 \quad 0.5 \quad 0.8)$ et ${}^tB = (0.8 \quad 0)$, alors

$R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$ est solution de $R \circ A = B$ et, quel que soit $\alpha \in \left]0,1\right[$, $R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ est également solution.

Il suffit de choisir $\alpha \geqslant 0.8$ pour que $R_\alpha \geqslant R$.

Mais $\check{R}$ n'existe pas car $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E.

5. DUALITE : OPERATEUR DE MINIMALISATION

On considère l'équation de relation floue :

$$R \,\square\, A = B \tag{7}$$

où " $\square$ " désigne une composition inf-conorme triangulaire et où R est l'inconnue. En désignant par E^* l'ensemble des solutions de (7), on veut déterminer l'élément minimal $\hat{R}$ de E^*, s'il existe.

On est ainsi amené à construire un opérateur de minimalisation σ associé à la conorme triangulaire considérée, tel que $B \,\sigma\, {}^tA = \hat{R}$.

Cette étude fera l'objet d'un prochain article.

REFERENCES

[1] D. Dubois : "Modèles mathématiques de l'imprécis et de l'incertain, en vue d'applications aux techniques d'aide à la décision". Thèse (1983), 402-403.

[2] W. Pedrycz : "Fuzzy relational equations with triangular norms in modelling of decision-making processes". Preprints of International IFAC Symposium on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis, Marseille, France (1983), 269-274.

[3] W. Pedrycz : "Fuzzy relational equations with generalized connectives and their applications". Fuzzy Sets and Systems 10 (1983), 185-201.

[4] E. Sanchez : "Compositions of Fuzzy relations". Advances in Fuzzy Set Theory and Applications (1979), 421-433.