

## REMARQUES SUR CERTAINES CATÉGORIES D'ENSEMBLES

TOTALEMENT FLOUS (3e partie)

J. et J.L. COULON  
 Bâtiment de mathématiques (2e cycle)  
 Université Claude Bernard, LYON 1  
 43, boulevard du 11 novembre 1918  
 69622 - VILLEURBANNE cedex - France

§3. ETUDE DE LA CATEGORIE  $JTF^{\circ\circ}$  DES PREFAISCEAUX TOTALEMENT FLOUS  
(EQUIVALENTE à JTF) :

Les catégories  $\mathcal{PF}(J)$ ,  $\mathcal{F}(J)$  ont été étudiées (cf [4] par exemple), ainsi que la catégorie  $\mathcal{S}(J)$  ([5],[6]).

JTF a été étudiée dans [2], [3], [7] surtout lorsque J est un antiordinal. Etudions, pour un treillis de Heyting quelconque,  $JTF^{\circ\circ}$  [qui est équivalente à JTF].

• PROPOSITION 12. -  $JTF^{\circ\circ}$  a un objet final.

Désignons par  $\wedge$  l'application  $J^2 \longrightarrow J$ .  $(J, \wedge)$  est un ensemble totalement flou.

$$(i, j) \mapsto i \wedge j$$

Notons que  $\wedge(i, j) = i \leftrightarrow i \leq j$

$(J, \wedge)$  est visiblement un préfaisceau totalement flou. C'est l'objet final de  $JTF^{\circ\circ}$  : pour tout préfaisceau totalement flou  $(X, \sigma)$ , l'unique morphisme  $R$  de  $(X, \sigma)$  dans  $(J, \wedge)$  est déterminé par  $(R_i)_J$  où  $R_i(x) = i$  pour tout  $x \in X_i$ .

• PROPOSITION 13. -  $JTF^{\circ\circ}$  a des produits finis.

Soient  $(X, \sigma)$  et  $(Y, \tau)$  deux préfaisceaux totalement flous.

Posons :

$$P = \bigcup_{i \in J} X_i \times Y_i$$

$$\sigma \times \tau : (P \times P \longrightarrow J) \\ ((x, y), (x', y')) \longmapsto \sigma(x, x') \wedge \tau(y, y')$$

\*  $(P, \sigma \times \tau)$  est un préfaisceau totalement flou :

en effet, c'est d'abord un ensemble totalement flou, tel que  $P_i = X_i \times Y_i$  il est évident que  $(P, \sigma \times \tau)$  vérifie (i) et (ii) : en particulier, si  $(x, y) \in X_j \times Y_j$  et  $i \leq j : (x, y)|_i = (x|_i, y|_i)$ .

\*il est évident qu'il existe un unique morphisme  $p_1$  de  $(P, \sigma \times \tau)$  dans  $(X, \sigma)$  tel que  $p_{1,i}(x, y) = x$  et un unique morphisme  $p_2$  de  $(P, \sigma \times \tau)$  dans  $(Y, \tau)$  tel que  $p_{2,i}(x, y) = y$ .

\*Alors  $[(P, \sigma \times \tau) ; p_1, p_2]$  est le produit de  $(X, \sigma)$  et  $(Y, \tau)$ .

En effet, étant donné  $(Z, \rho)$

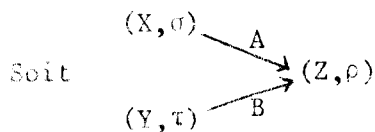
$$\begin{array}{ccc} & & (X, \sigma) \\ & \nearrow U & \nwarrow P_1 \\ (Z, \rho) & & (P, \sigma \times \tau) \\ & \searrow V & \swarrow P_2 \\ & & (Y, \tau) \end{array}$$

$Z_i$   $\begin{array}{ccc} \nearrow U_i & & X_i \\ & \nwarrow P_{1i} & \\ \searrow V_i & & Y_i \end{array}$   $X_i \times Y_i$ , d'où une application  $S_i : Z_i \rightarrow X_i \times Y_i$  telle

que  $p_{1,i} S_i = U_i$  et  $p_{2,i} S_i = V_i$ . Les  $(S_i)_J$  déterminent un morphisme de JTF :

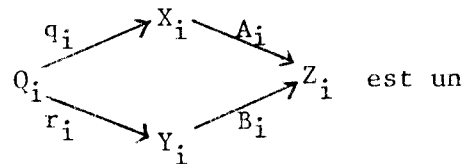
$(Z, \rho) \xrightarrow{S} (P, \sigma \times \tau)$  puisque si  $z \in Z_i$  et  $z' \in Z_{i'}$  :  $S_i(z) = (U_i(z), V_i(z))$ ,  $S_{i'}(z') = (U_{i'}(z'), V_{i'}(z'))$ , et  $(\sigma \times \tau)(S_i(z), S_{i'}(z')) = \sigma(U_i(z), U_{i'}(z')) \wedge \tau(V_i(z), V_{i'}(z')) \geq \rho(z, z')$  et  $p_1 S = U$ ,  $p_2 S = V$  d'après la proposition 7. D'après ce même résultat, il est évident que  $S$  est l'unique morphisme de JTF tel que  $p_1 S = U$  et  $p_2 S = V$ .

• PROPOSITION 14. - JTF<sup>oo</sup> a des pullbacks.



Posons  $\left\{ \begin{array}{l} Q = \{(x, y) \in P / \text{si } (x, y) \in X_i \times Y_i : A_i(x) = B_i(y)\} \\ \lambda = \sigma \times \tau|_{Q \times Q} \end{array} \right.$

$(Q, \lambda)$  est un ensemble totalement flou et



est un pullback (si  $q_i = p_{1,i}|_{Q_i}$  et  $r_i = p_{2,i}|_{Q_i}$ ) dans  $\mathbb{I}ens$ .  $(Q, \lambda)$  vérifie (i) a fortiori ; d'autre part si  $(x, y) \in Q_j$  et si  $i < j$ , il est facile de voir que  $(x|_i, y|_i) \in Q_i$  du fait que  $A_i(x|_i) = A_j(x)|_i = B_j(y)|_i = B_i(y|_i)$  : de sorte que  $(Q, \lambda)$  est un préfaisceau totalement flou.

D'où un diagramme commutatif  $(Q, \lambda) \begin{array}{c} \xrightarrow{q} (X, \sigma) \\ \xrightarrow{r} (Y, \tau) \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{A} (Z, \rho) \\ \xrightarrow{B} (Z, \rho) \end{array}$  dont il est facile de voir (par des arguments analogues à ceux de la proposition 13) que c'est un pullback dans  $JTF^{\circ\circ}$ .

• PROPOSITION 15. -  $JTF^{\circ\circ}$  a des égalisateurs.

Soit  $(X, \sigma) \begin{array}{c} \xrightarrow{R} \\ \xrightarrow{S} \end{array} (Y, \tau)$   
 Pour tout  $i \in J$ , considérons  $Z_i \xrightarrow{E_i} X_i \begin{array}{c} \xrightarrow{R_i} \\ \xrightarrow{S_i} \end{array} Y_i$ , où  $\left\{ \begin{array}{l} Z_i = \{x \in X_i / R_i(x) = S_i(x)\} \\ E_i = \text{injection canonique} \\ \text{de } Z_i \text{ dans } X_i. \end{array} \right.$

$(Z_i, E_i)$  est l'égalisateur de  $\{R_i, S_i\}$  dans  $\text{Ens}$ .

Soit  $Z = \bigcup_{i \in J} Z_i$  et  $\rho = \sigma|_{Z \times Z}$

$(Z, \rho)$  est un ensemble totalement flou qui vérifie (i) a fortiori; d'autre part si  $z \in Z_j$ ,  $z|_i$  (au sens de  $(X, \sigma)$ ) est un élément de  $Z_i$  pour tout  $i < j$  car  $R_i(z|_i) = R_j(z)|_i = S_j(z)|_i = S_i(z|_i)$  de sorte que  $(Z, \rho)$  est un préfaisceau totalement flou.

La famille  $(E_i)_J$  détermine visiblement un morphisme  $E$  de  $(Z, \rho)$  dans  $(X, \sigma)$  tel que  $RE = SE$ .

Enfin  $[(Z, \rho), E]$  est l'égalisateur dans  $JTF^{\circ\circ}$  de  $\{R, S\}$  car étant

donné  $(Z, \rho) \begin{array}{c} \xrightarrow{E} (X, \sigma) \\ \nearrow F \\ (U, \mu) \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{R} \\ \xrightarrow{S} \end{array} (Y, \tau)$  tel que  $RF = SF$ , il existe - pour tout

$i \in J$  - une application  $G_i: U_i \rightarrow Z_i$  telle que  $E_i G_i = F_i$ .

Mais alors  $G_i = F_i$  puisque  $E_i$  est l'injection canonique - ce qui montre que  $(G_i)_J$  détermine un morphisme  $G$  de  $(U, \mu)$  dans  $(Z, \rho)$  tel que  $EG = F$ ; et il est clair que  $G$  est l'unique morphisme de  $(U, \mu)$  dans  $(Z, \rho)$  tel que  $EG = F$  puisque si  $EH = F$  on a nécessairement pour tout  $i \in J$ :  $E_i H_i = F_i$  et donc  $H_i = F_i = G_i$ .

• PROPOSITION 16. -  $JTF^{\circ\circ}$  a des exponentielles.

Soient  $(X, \sigma)$  et  $(Y, \tau)$  deux objets de  $JTF^{\circ\circ}$ .

Nous allons construire un objet  $(Z, \rho)$  de  $JTF^{\circ\circ}$ , un morphisme  $E$  de

$(X, \sigma) \times (Z, \rho)$  vers  $(Y, \tau)$ , tels que pour tout objet  $(U, \mu)$  de  $JTF^{oo}$  et pour tout morphisme  $F$  de  $(X, \sigma) \times (U, \mu)$  dans  $(Y, \tau)$ , il existe un unique morphisme  $\Gamma F$  de  $(U, \mu)$  dans  $(Z, \rho)$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (X, \sigma) \times (Z, \rho) & \xrightarrow{E} & (Y, \tau) \\ \uparrow \Gamma F & \nearrow F & \\ (X, \sigma) \times (U, \mu) & & \end{array}$$

a. Construction de  $(Z, \rho)$  :

- \* Soit  $Z$  l'ensemble des  $[i, (f_j)_{j \leq i}]$ , où  $i \in J$   
 $\forall j \leq i$ :  $f_j$  est une application de  $X_j$   
dans  $Y_j$  de sorte que  
 $\forall x, x' \in X_j$  :  $\sigma(x, x') \leq \tau(f_j(x), f_j(x'))$  et si  $k \leq j$  et  $x \in X_j$  :  $f_j(x)|_k = f_k(x|_k)$ .

Soit  $\rho$  l'application de  $Z^2$  dans  $J$  définie par :

$$\rho([i, (f_j)_{j \leq i}], [i', (g_j)_{j \leq i'}]) = \bigvee \{k \leq i \wedge i' / (f_r)_{r \leq k} = (g_r)_{r \leq k}\}$$

- \* Il est clair que  $(Z, \rho)$  est un ensemble totalement flou.

D'autre part,  $\alpha_\rho([i, (f_j)_{j \leq i}]) = i$

- \*  $(Z, \rho)$  vérifie (i) :

En effet, si  $f = [i, (f_j)_{j \leq i}]$  et  $g = [i', (g_j)_{j \leq i'}]$ , et si  $\rho(f, g) = \alpha_\rho(f) = \alpha_\rho(g)$ , c'est que  $i = i'$  et que  $\bigvee \{k \in J / k \leq i \text{ et } (f_r)_{r \leq k} = (g_r)_{r \leq k}\} = i$ .

Soit  $K = \{k \in J / k \leq i \text{ et } (f_r)_{r \leq k} = (g_r)_{r \leq k}\}$ .

Mais alors si  $j \leq i$  :  $\bigvee \{k \wedge j / k \in K\} = (VK) \wedge j = i \wedge j = j$  et si  $x \in X_j$  :

$\forall k \in K$  :  $f_j(x)|_{k \wedge j} = f_{k \wedge j}(x|_{k \wedge j}) = g_{k \wedge j}(x|_{k \wedge j}) = g_j(x)|_{k \wedge j}$  et on sait que

-  $(Y, \tau)$  étant un préfaisceau totalement flou - cela entraîne :

$f_j(x)|_{\bigvee \{k \wedge j\}} = g_j(x)|_{\bigvee \{k \wedge j\}}$  , soit  $f_j(x) = g_j(x)$ .

D'où  $f = g$ .

- \*  $(Z, \rho)$  vérifie (ii), et il est évident que si  $i_1 \leq i$  :

$$[i, (f_j)_{j \leq i}]|_{i_1} = [i_1, (f_j)_{j \leq i_1}]$$

- \*  $(Z, \rho)$  est donc un objet de  $JTF^{oo}$

b. Construction de E :

Pour tout  $i \in J$ , on définit  $E_i : X_i \times Z_i \longrightarrow Y_i$  par  
 si  $x \in X_i$ , si  $f = [i, (f_j)_{j \leq i}] \in Z_i : E_i(x, f) = f_i(x)$

Reste à montrer que  $(E_j)_J$  détermine un morphisme E de  $(X, \sigma) \times (Z, \rho)$  vers  $(Y, \tau)$  :

\*  $\forall x, x' \in X_i ; \forall f, f' \in Z_i : (\sigma \times \rho) [(x, f), (x', f')] \leq \tau(E_i(x, f), E_i(x', f'))$

En effet, soient  $x, x' \in X_i ; f = [i, (f_j)_{j \leq i}]$  et  $f' = [i, (f'_j)_{j \leq i}]$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma \times \rho) [(x, f), (x', f')] = \sigma(x, x') \wedge \rho(f, f') \\ \tau(E_i(x, f), E_i(x', f')) = \tau(f_i(x), f'_i(x')) \end{array} \right.$$

or par hypothèse  $\sigma(x, x') \leq \tau(f_i(x), f'_i(x'))$  (a)

D'autre part si  $r \leq i$  est tel que  $f_r = f'_r$  :

$$r = \tau[f_r(x')|_r, f'_r(x')|_r] = \tau[f_i(x')|_r, f'_i(x')|_r] \leq \tau[f_i(x'), f'_i(x')] ,$$

puisque dans le préfaisceau totalement flou  $(Y, \tau)$  on a toujours

$$\tau(y|_r, y'|_r) = r \wedge \tau(y, y') \leq \tau(y, y')$$

de sorte que  $\rho(f, f') = \bigvee \{k \in J / \begin{array}{l} k \leq i \\ (f_r)_{r \leq k} = (f'_r)_{r \leq k} \end{array} \}$

$$\leq \bigvee \{r \in J / \begin{array}{l} r \leq i \\ f_r = f'_r \end{array} \} \leq \tau[f_i(x'), f'_i(x')] \quad (\beta)$$

De (a) et (b) résulte :

$$\sigma(x, x') \wedge \rho(f, f') \leq \tau[f_i(x), f_i(x')] \wedge \tau[f_i(x'), f'_i(x')] \leq \tau[f_i(x), f'_i(x')]$$

\* Si  $x \in X_j$ , si  $f = [j, (f_k)_{k \leq j}] \in Z_j$ , si  $i \leq j$ , on a :  $E_i[(x, f)|_i] = E_j(x, f)|_i$

En effet,  $E_j(x, f)|_i = f_j(x)|_i = f_i(x|_i) = E_i(x|_i, f|_i) = E_i[(x, f)|_i]$

c. Soit  $(U, \mu)$  un préfaisceau totalement flou, et soit F (de famille naturelle associée  $(F_i)_J$ ) un morphisme de  $(X, \sigma) \times (U, \mu)$  dans  $(Y, \tau)$ .

Construction d'un morphisme  $\lceil F \rceil$  de  $(U, \mu)$  dans  $(Z, \rho)$ .

\* Pour tout  $i \in J$ , définissons une application  $\lceil F \rceil_i$  sur  $U_i$  par :

si  $u \in U_i$ ,  $\lceil F \rceil_i(u) = [i, (f_j)_{j \leq i}]$  où  $f_j$  est l'application de  $X_j$  dans  $Y_j$

définie par  $f_j(x) = F_j[x, u|_j]$  pour tout  $x \in X_j$  (ce pour tout  $j \leq i$ ).

\*  $\lceil F \rceil_i$  est en fait une application de  $U_i$  dans  $Z_i$  :

En effet,

$$\begin{aligned} \text{si } x, x' \in X_j : \sigma(x, x') &= \sigma(x, x') \wedge \mu(u|_j, u|_j) = (\sigma \times \mu)[(x, u|_j), (x', u|_j)] \\ &\leq \tau[F_j(x, u|_j), F_j(x', u|_j)] = \tau[f_j(x), f_j(x')] \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} \text{si } x \in X_j \text{ et si } k \leq j : \Gamma F_i^{-1}(u)(x|_k) &= F_k(x|_k, u|_k) = F_k[(x, u)|_k] = F_j(x, u)|_k \\ &= \Gamma F_i^{-1}(u)(x)|_k \end{aligned}$$

\*  $\left\{ (\Gamma F_i^{-1})_J \right\}$  définit un morphisme de  $(U, \mu)$  dans  $(Z, \rho)$  :

En effet,

$$\text{d'abord si } u, u' \in U_i : \mu(u, u') \leq \rho(\Gamma F_i^{-1}(u), \Gamma F_i^{-1}(u')) :$$

car si  $\Gamma F_i^{-1}(u) = [i, (f_j)_{j \leq i}]$  et  $\Gamma F_i^{-1}(u') = [i, (f'_j)_{j \leq i}]$ , on a :

$$\rho(\Gamma F_i^{-1}(u), \Gamma F_i^{-1}(u')) = \rho([i, (f_j)_{j \leq i}], [i, (f'_j)_{j \leq i}]) = V\{k \in J \mid \begin{matrix} k \leq i \\ (f_r)_{r \leq k} = (f'_r)_{r \leq k} \end{matrix}\}$$

mais  $u|_k = u'|_k \rightarrow f_k(x) = F_k(x, u|_k) = F_k(x, u'|_k) = f'_k(x)$  pour tout  $x \in X_k \rightarrow f_k = f'_k$ ,

de sorte que  $u|_k = u'|_k \rightarrow \forall r \leq k : u|_r = u'|_r \rightarrow \forall r \leq k : f_r = f'_r$  ;

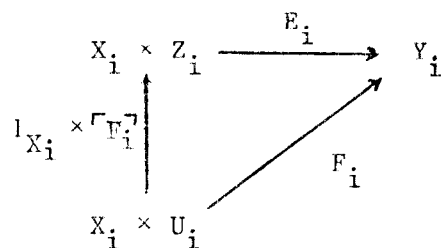
d'où  $\mu(u, u') = V\{k \in J \mid u|_k = u'|_k\} \leq \rho(\Gamma F_i^{-1}(u), \Gamma F_i^{-1}(u'))$ .

D'autre part si  $u \in U_j$  et si  $i \leq j : \Gamma F_j^{-1}(u)|_i = \Gamma F_i^{-1}(u|_i)$

car  $\Gamma F_j^{-1}(u)|_i = [j, (f_k)_{k \leq j}]|_i = [i, (f_k)_{k \leq i}]$ , où  $f_k(x) = F_k(x, u|_k)$  pour tout  $x \in X_k$ ,

tandis que  $\Gamma F_i^{-1}(u|_i) = [i, (g_k)_{k \leq i}]$ , où  $g_k(x) = F_k(x, u|_i|_k) = F_k(x, u|_k) = f_k(x)$  pour tout  $x \in X_k$ .

d. Pour tout  $i \in J$ , le diagramme  $(D_i)$



est commutatif :

En effet, si  $x \in X_i$  et si  $u \in U_i$  :

$$l_{X_i} \times \Gamma F_i^{-1}(x, u) = (x, \Gamma F_i^{-1}(u)), \text{ d'où :}$$

$$E_i \circ l_{X_i} \times \Gamma F_i^{-1}(x, u) = E_i[x, \Gamma F_i^{-1}(u)] = \Gamma F_i^{-1}(u)(x) = F_i(x, u|_i) = F_i(x, u)$$

De sorte que le diagramme (D)  $(X, \sigma) \times (Z, \rho) \xrightarrow{E} (Y, \tau)$  est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} (X, \sigma) \times (Z, \rho) & \xrightarrow{E} & (Y, \tau) \\ \uparrow \text{ } l_{(X, \sigma)} \times \ulcorner F \urcorner & & \nearrow F \\ (X, \sigma) \times (U, \mu) & & \end{array}$$

e.  $\ulcorner F \urcorner$  est l'unique morphisme de  $(U, \mu)$  dans  $(Z, \rho)$  tel que le diagramme (D) soit commutatif.

En effet, si  $G$  est un tel morphisme,  $G_i$  rend nécessairement commutatif le

diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i \times Z_i & \xrightarrow{E_i} & Y_i \\ \uparrow \text{ } l_{X_i} \times G_i & & \nearrow F_i \\ X_i \times U_i & & \end{array}$$

de sorte que si  $u \in U_i$  et si  $G_i(u) = [i, (g_j)_{j \leq i}]$ .

on a pour tout  $x \in X_j$  ( $j \leq i$ ) :

$$\begin{aligned} E_j \circ l_{X_j} \times G_j(x, u|_j) &= F_j(x, u|_j) \\ E_j[x, G_j(u|_j)] &= F_j(x, u|_j) \\ E_j[x, G_i(u)|_j] &= f_j(x, u|_j) \\ \text{soit } g_j(x) &= f_j(x), \end{aligned}$$

d'où  $G_i(u) = [i, (g_j)_{j \leq i}] = [i, (f_j)_{j \leq i}] = \ulcorner F_i \urcorner(u)$ .

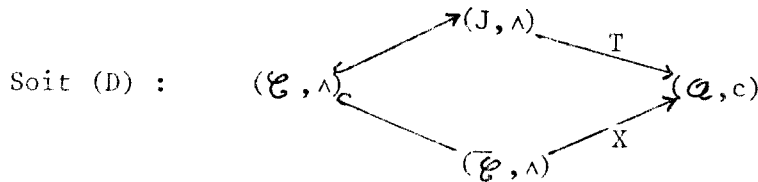
. PROPOSITION 17. - Si  $J$  n'est pas un anti-ordinal,  $JTF^{\circ\circ}$  n'a pas de classificateur de monomorphismes.

Soit  $J$  un treillis de Heyting complet qui n'est pas un anti-ordinal: Il existe donc une suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  strictement croissante d'éléments de  $J$ ; soit  $i = \bigvee_{n \geq 1} \alpha_n$ .

Supposons qu'il existe un classificateur de monomorphismes  $(\mathcal{A}, c)$  dans  $JTF^{\circ\circ}$  et désignons alors par  $T$  le morphisme de vérité associé.

Posons pour tout  $n \geq 1$   $\mathcal{E}_n = [0, \alpha_n]$ . Soit  $\mathcal{E} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{E}_n$  et  $\bar{\mathcal{E}} = [0, i]$

Considérons les objets de  $JTF^{\circ\circ}$   $(\mathcal{E}, \wedge)$  et  $(\bar{\mathcal{E}}, \wedge)$  et le monomorphisme canonique d'injection de  $(\mathcal{E}, \wedge)$  dans  $(\bar{\mathcal{E}}, \wedge)$ , dont  $\chi$  désigne le morphisme caractéristique de  $(\bar{\mathcal{E}}, \wedge)$  dans  $(\mathcal{A}, c)$



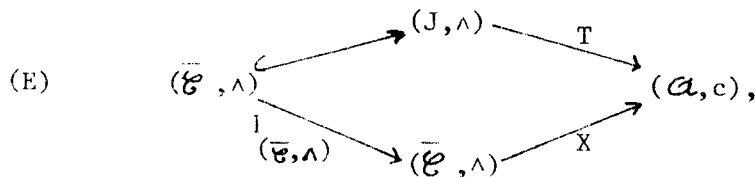
(D) est commutatif : donc pour tout  $n \geq 1$  :  $\chi_{\alpha_n}(\alpha_n) = T_{\alpha_n}(\alpha_n)$   
 posons  $\chi_i(i) = c_i$

Pour tout  $n \geq 1$  :  $c_i |_{\alpha_n} = \chi_i(i) |_{\alpha_n} = \chi_{\alpha_n}(i |_{\alpha_n}) = \chi_{\alpha_n}(\alpha_n) = T_n(\alpha_n) = T_i(i) |_{\alpha_n}$

donc  $c_i = c_i |_{\bigvee_{n \geq 1} \alpha_n} = T_i(i) |_{\bigvee_{n \geq 1} \alpha_n} = T_i(i)$  de sorte que  $\chi_i(i) = T_i(i)$

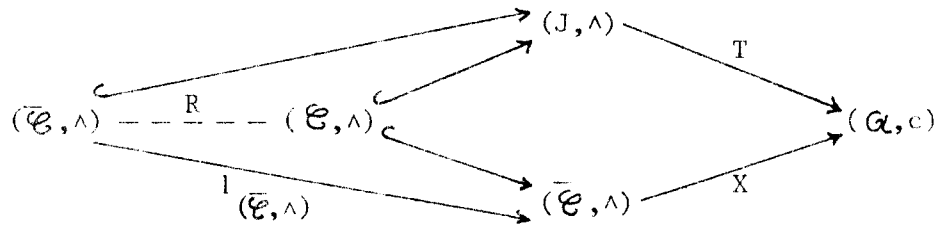
Alors, pour tout  $j \in \bar{\mathcal{E}}$  :  $\chi_j(j) = \chi_j(i |_j) = \chi_i(i) |_j = T_i(i) |_j = T_j(i |_j) = T_j(j)$

Le diagramme (E) suivant est commutatif :



donc - puisque (D) est un pullback - il existe un morphisme  $R$  de  $(\bar{\mathcal{E}}, \wedge)$  dans  $(\mathcal{E}, \wedge)$  rendant commutatif le diagramme





Mais l'existence de  $R$  est absurde puisque  $\bar{\mathcal{E}}_i = \{i\} \neq \emptyset$  alors que  $\mathcal{E}_i = \emptyset$ .

### CONCLUSION.

I. ou bien  $J$  est un anti-ordinal :

alors les catégories  $\mathcal{S}(J)$ ,  $\mathcal{F}(J)$ ,  $\mathcal{PF}(J)$ ,  $\mathcal{PF}(J)^{(S)}$ ,  $JTF$ ,  $JTF^*$ ,  $JTF^{\circ\circ}$  sont équivalentes - ce sont des topoï.

II. ou bien  $J$  n'est pas un anti-ordinal :

Alors :

A.  $\mathcal{F}(J)$ ,  $\mathcal{S}(J)$ ,  $JTF^*$  sont équivalentes - ce sont des topoï.

B.  $JTF$ ,  $JTF^{\circ\circ}$ ,  $\mathcal{PF}(J)^{(S)}$  sont équivalentes. Elles n'ont pas de classificateur de monomorphismes, mais ce sont des catégories cartésienement closes.

C.  $\mathcal{PF}(J)$  est un topos.

avec ces précisions :

1. Toute catégorie du groupe  $\underline{A}$  est équivalente à une sous-catégorie pleine de toute catégorie du groupe  $\underline{B}$ .

2. Toute catégorie du groupe  $\underline{B}$  est équivalente à une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{PF}(J)$ .

BIBLIOGRAPHIE. voir 2ème partie. BUSEFAL n°23, 4-13, 1985