REMARQUES SUR CERTAINES CATÉGORIES D'ENSEMBLES TOTALEMENT FLOUS (3e partie)

J. et J.L. COULON
Bâtiment de mathématiques (2e cycle)
Université Claude Bernard, LYON 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 - VILLEURBANNE cedex - France

§3. ETUDE DE LA CATEGORIE $JTF^{\circ\circ}$ DES PREFAISCEAUX TOTALEMENT FLOUS (EQUIVALENTE à JTF) :

Les catégories $\mathcal{PF}(J)$, $\mathcal{F}(J)$ ont été étudiées (cf [4] par exemple), ainsi que la catégorie $\mathcal{S}(J)$ ([5],[6]).
JTF a été étudiée dans [2], [3], [7] surtout lorsque J est un antiordinal.
Etudions, pour un treillis de Heyting quelconque, $JTF^{\circ\circ}$ [qui est équivalente à JTF].

• PROPOSITION 12. - $JTF^{\circ\circ}$ *a un objet final.*

Désignons par $\wedge$ l'application $\begin{array}{ccc} J^2 & \longrightarrow & J \\ (i,j) & \longmapsto & i\wedge j \end{array}$. $(J,\wedge)$ est un ensemble totalement flou.
Notons que $\wedge(i,j) = i \leftrightarrow i\leq j$
$(J,\wedge)$ est visiblement un préfaisceau totalement flou. C'est l'objet final de $JTF^{\circ\circ}$: pour tout préfaisceau totalement flou (X,σ), l'unique morphisme R de (X,σ) dans $(J,\wedge)$ est déterminé par $(R_i)_J$ où $R_i(x) = i$ pour tout $x\in X_i$.

• PROPOSITION 13. - $JTF^{\circ\circ}$ *a des produits finis.*

Soient (X,σ) et (Y,τ) deux préfaisceaux totalement flous.
Posons :

$$\left| \begin{array}{l} P = \bigcup_{i\in J} X_i \times Y_i \\ \\ \sigma\times\tau : \begin{array}{ccc} P\times P & \longrightarrow & J \\ ((x,y),(x',y')) & \longmapsto & \sigma(x,x')\wedge\tau(y,y') \end{array} \end{array} \right.$$

$\star$ $(P,\sigma\times\tau)$ est un préfaisceau totalement flou :

en effet, c'est d'abord un ensemble totalement flou, tel que $P_i = X_i \times Y_i$ il est évident que $(P,\sigma\times\tau)$ vérifie (i) et (ii) : en particulier, si $(x,y)\in X_j\times Y_j$ et $i\leq j$: $(x,y)|_i = (x|_i, y|_i)$.

$*$il est évident qu'il existe un unique morphisme p_1 de $(P,\sigma\times\tau)$ dans (X,σ) tel que $p_{1_i}(x,y) = x$ et un unique morphisme p_2 de $(P,\sigma\times\tau)$ dans (Y,τ) tel que $p_{2_i}(x,y) = y$.

$*$Alors $[(P,\sigma\times\tau)\ ;\ p_1, p_2]$ est le produit de (X,σ) et (Y,τ).

En effet, étant donné
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & (X,\sigma) & \\ (Z,\rho) \arrow[ur, "U"] \arrow[dr, "V"'] & & (P,\sigma\times\tau) \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\ & (Y,\sigma) & \end{tikzcd}$$
, on a pour tout $i\in J$:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X_i & \\ Z_i \arrow[ur, "U_i"] \arrow[dr, "V_i"'] & & X_i\times Y_i \arrow[ul, "p_{1_i}"'] \arrow[dl, "p_{2_i}"] \\ & Y_i & \end{tikzcd}$$
, d'où une application $S_i : Z_i \to X_i\times Y_i$ telle que $p_{1_i} S_i = U_i$ et $p_{2_i} S_i = V_i$. Les $(S_i)_J$ déterminant un morphisme de JTF : $(Z,\rho) \xrightarrow{S} (P,\sigma\times\tau)$ puisque si $z\in Z_i$ et $z'\in Z_{i'}$: $S_i(z) = (U_i(z), V_i(z))$, $S_{i'}(z') = (U_{i'}(z'), V_{i'}(z'))$, et
$(\sigma\times\tau)(S_i(z), S_{i'}(z')) = \sigma(U_i(z), U_{i'}(z'))\wedge\tau(V_i(z), V_{i'}(z')) \geq \rho(z,z')$ et $p_1 S = U$, $p_2 S = V$ d'après la proposition 7. D'après ce même résultat, il est évident que S est l'unique morphisme de JTF tel que $p_1 S = U$ et $p_2 S = V$.

• PROPOSITION 14. - JTF°° *a des pullbacks.*

Soit
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] (X,\sigma) \arrow[dr, "A"] & \\ & (Z,\rho) \\ (Y,\tau) \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

Posons $\left|\begin{array}{l} Q = \{(x,y)\in P\ /\ \text{si } (x,y)\in X_i\times Y_i : A_i(x) = B_i(y)\} \\ \lambda = \sigma\times\tau|_{Q\times Q} \end{array}\right.$

(Q,λ) est un ensemble totalement flou et
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X_i \arrow[dr, "A_i"] & \\ Q_i \arrow[ur, "q_i"] \arrow[dr, "r_i"'] & & Z_i \\ & Y_i \arrow[ur, "B_i"'] & \end{tikzcd}$$
est un pullback (si $q_i = p_{1_i}|_{Q_i}$ et $r_i = p_{2_i}|_{Q_i}$) dans $\mathbb{E}$ns. (Q,λ) vérifie (i) a fortiori ; d'autre part si $(x,y)\in Q_j$ et si $i<j$, il est facile de voir que $(x|_i, y|_i)\in Q_i$ du fait que $A_i(x|_i) = A_j(x)|_i = B_j(y)|_i = B_i(x|_i)$: de sorte que (Q,λ) est un préfaisceau totalement flou.

D'où un diagramme commutatif $\begin{tikzcd}[row sep=small] & (X,\sigma) \arrow[dr, "A"] & \\ (Q,\lambda) \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "r"'] & & (Z,\rho) \\ & (Y,\tau) \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$ dont il est facile de voir (par des arguments analogues à ceux de la proposition 13) que c'est un pullback dans JTF°°.

• PROPOSITION 15. - JTF°° *a des égalisateurs.*

Soit $(X,\sigma) \overset{R}{\underset{S}{\rightrightarrows}} (Y,\tau)$

Pour tout $i \in J$, considérons $Z_i \overset{E_i}{\hookrightarrow} X_i \overset{R_i}{\underset{S_i}{\rightrightarrows}} Y_i$, où $Z_i = \{x \in X_i / R_i(x) = S_i(x)\}$, E_i = injection canonique de Z_i dans X_i.

(Z_i, E_i) est l'égalisateur de $\{R_i, S_i\}$ dans **Ens**.

Soit $Z = \underset{i\in J}{\cup} Z_i$ et $\rho = \sigma_{|Z\times Z}$

(Z,ρ) est un ensemble totalement flou qui vérifie (i) a fortiori; d'autre part si $z \in Z_j$, $z_{|i}$ (au sens de (X,σ)) est un élément de Z_i pour tout $i<j$ car $R_i(z_{|i}) = R_j(z)_{|i} = S_j(z)_{|i} = S_i(z_{|i})$ de sorte que (Z,ρ) est un préfaisceau totalement flou.

La famille $(E_i)_J$ détermine visiblement un morphisme E de (Z,ρ) dans (X,σ) tel que $RE = SE$.

Enfin $[(Z,\rho),E]$ est l'égalisateur dans JTF°° de $\{R,S\}$ car étant donné $\begin{tikzcd} (Z,\rho) \arrow[r, "E"] & (X,\sigma) \arrow[r, shift left, "R"] \arrow[r, shift right, "S"'] & (Y,\tau) \\ (U,\mu) \arrow[ur, "F"'] & & \end{tikzcd}$ tel que $RF = SF$, il exite - pour tout i ! - une application $G_i : U_i \longrightarrow Z_i$ telle que $E_i G_i = F_i$.

Mais alors $G_i = F_i$ puisque E_i est l'injection canonique - ce qui montre que $(G_i)_J$ détermine un morphisme G de (U,μ) dans (Z,ρ) tel que $EG = F$; et il est clair que G est l'unique morphisme de (U,μ) dans (Z,ρ) tel que $EG = F$ puisque si $EH = F$ on a nécessairement pour tout $i\in J$: $E_i H_i = F_i$ et donc $H_i = F_i = G_i$.

• PROPOSITION 16. - JTF°° *a des exponentielles.*

Soient (X,σ) et (Y,τ) deux objets de JTF°°.

Nous allons construire un objet (Z,ρ) de JTF°°, un morphisme E de

$(X,\sigma) \times (Z,\rho)$ vers (Y,τ), tels que pour tout objet (U,μ) de JTF°° et pour tout morphisme F de $(X,\sigma) \times (U,\mu)$ dans (Y,τ), il existe un unique morphisme $\ulcorner F \urcorner$ de (U,μ) dans (Z,ρ) tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} (X,\sigma) \times (Z,\rho) \arrow[r, "E"] & (Y,\tau) \\ (X,\sigma) \times (U,\mu) \arrow[u, dashed, "1_{(X,\sigma)} \times \ulcorner F \urcorner"] \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

a. Construction de (Z,ρ) :

* Soit Z l'ensemble des $[i,(f_j)_{j\le i}]$, où $i \in J$

$\forall j \le i$: f_j est une application de X_j dans Y_j de sorte que

$\forall x,x' \in X_j$: $\sigma(x,x') \le \tau(f_j(x),f_j(x'))$ et si $k \le j$ et $x \in X_j$: $f_j(x)|_k = f_k(x|_k)$.

Soit ρ l'application de Z^2 dans J définie par :

$$\rho([i,(f_j)_{j\le i}], [i',(g_j)_{j\le i'}]) = \vee\{k \le i \wedge i' \ / (f_r)_{r\le k} = (g_r)_{r\le k}\}$$

* Il est clair que (Z,ρ) est un ensemble totalement flou.

D'autre part, $\alpha_\rho([i,(f_j)_{j\le i}]) = i$

* (Z,ρ) vérifie (i) :

En effet, si $f = [i,(f_j)_{j\le i}]$ et $g = [i',(g_j)_{j\le i'}]$, et si $\rho(f,g) = \alpha_\rho(f) = \alpha_\rho(g)$, c'est que $i = i'$ et que $\vee\{k \in J \ / \ k \le i$ et $(f_r)_{r\le k} = (g_r)_{r\le k}\} = i$.

Soit $K = \{k \in J \ / \ k \le i$ et $(f_r)_{r\le k} = (g_r)_{r\le k}\}$.

Mais alors si $j \le i$: $\vee\{k \wedge j \ / \ k \in K\} = (\vee K) \wedge j = i \wedge j = j$ et si $x \in X_j$:

$\forall k \in K$: $f_j(x)|_{k\wedge j} = f_{k\wedge j}(x|_{k\wedge j}) = g_{k\wedge j}(x|_{k\wedge j}) = g_j(x)|_{k\wedge j}$ et on sait que

- (Y,τ) étant un préfaisceau totalement flou - cela entraîne :

$f_j(x)|_{\vee\{k\wedge j\}} = g_j(x)|_{\vee\{k\wedge j\}}$, soit $f_j(x) = g_j(x)$.

D'où $f = g$.

* (Z,ρ) vérifie (ii), et il est évident que si $i_1 \le i$:

$$[i,(f_j)_{j\le i}]|_{i_1} = [i_1, (f_j)_{j\le i_1}]$$

* (Z,ρ) est donc un objet de JTF°°

b. Construction de E :

Pour tout $i\in J$, on définit $E_i : X_i\times Z_i \longrightarrow Y_i$ par
si $x\in X_i$, si $f = [i,(f_j)_{j\leq i}]\in Z_i$: $E_i(x,f) = f_i(x)$

Reste à montrer que $(E_j)_J$ détermine un morphisme E de $(X,\sigma)\times(Z,\rho)$ vers (Y,τ) :

* $\forall x,x'\in X_i$; $\forall f, f'\in Z_i$: $(\sigma\times\rho)[(x,f),(x',f')] \leq \tau(E_i(x,f), E_i(x',f'))$

En effet, soient $x,x'\in X_i$; $f = [i,(f_j)_{j\leq i}]$ et $f' = [i, (f'_j)_{j\leq i}]$:

$$(\sigma\times\rho)[(x,f),(x',f')] = \sigma(x,x')\wedge\rho(f,f')$$
$$\tau(E_i(x,f), E_i(x',f')) = \tau(f_i(x), f'_i(x'))$$

or par hypothèse $\sigma(x,x')\leq \tau(f_i(x), f_i(x'))$ (α)

D'autre part si $r\leq i$ est tel que $f_r = f'_r$:

$r = \tau[f_r(x'_{|r}), f'_r(x'_{|r})] = \tau[f_i(x')_{|r}, f'_i(x')_{|r}] \leq \tau[f_i(x'), f'_i(x')]$,

puisque dans le préfaisceau totalement flou (Y,τ) on a toujours
$\tau(y_{|r}, y'_{|r}) = r\wedge\tau(y,y') \leq\tau(y,y')$

de sorte que $\rho(f,f') = \vee\{k\in J \,/ {}^{k\leq i}_{(f_r)_{r\leq k} = (f'_r)_{r\leq k}}\}$

$$\leq \vee\{r\in J \,/ {}^{r\leq i}_{f_r=f'_r}\} \leq\tau[f_i(x'),f'_i(x')] \qquad (\beta)$$

De (α) et (β) résulte :

$\sigma(x,x')\wedge\rho(f,f')\leq\tau[f_i(x),f_i(x')]\wedge\tau[f_i(x'),f'_i(x')]\leq\tau[f_i(x),f'_i(x')]$

* Si $x\in X_j$, si $f = [j,(f_k)_{k\leq j}]\in Z_j$, si $i\leq j$, on a : $E_i[(x,f)_{|i}] = E_j(x,f)_{|i}$

En effet, $E_j(x,f)_{|i} = f_j(x)_{|i} = f_i(x_{|i}) = E_i(x_{|i},f_{|i}) = E_i[(x,f)_{|i}]$

c. Soit (U,μ) un préfaisceau totalement flou, et soit F (de famille naturelle associée $(F_i)_J$) un morphisme de $(X,\sigma)\times(U,\mu)$ dans (Y,τ).
Construction d'un morphisme $\ulcorner F\urcorner$ de (U,μ) dans (Z,ρ).

* Pour tout $i\in J$, définissons une application $\ulcorner F\urcorner_i$ sur U_i par :
si $u\in U_i$, $\ulcorner F\urcorner_i(u) = [i,(f_j)_{j\leq i}]$ où f_j est l'application de X_j dans Y_j
définie par $f_j(x) = F_j[x,u_{|j}]$ pour tout $x\in X_j$ (ce pour tout $j\leq i$).

* $\ulcorner F\urcorner_i$ est en fait une application de U_i dans Z_i :

En effet,

si $x,x'\in X_j$: $\sigma(x,x') = \sigma(x,x')\wedge\mu(u_{|j},u_{|j}) = (\sigma\times\mu)[(x,u_{|j}),(x',u_{|j})]$

$\leq \tau[F_j(x,u_{|j}),F_j(x',u_{|j})] \qquad = \tau[f_j(x),f_j(x')]$

Et d'autre part :

si $x\in X_j$ et si $k\leq j$: $\ulcorner F\urcorner_i(u)(x_{|k}) = F_k(x_{|k},u_{|k}) = F_k[(x,u)_{|k}] = F_j(x,u)_{|k}$

$= \ulcorner F_i\urcorner(u)(x)_{|k}$

* $|(\ulcorner F_i\urcorner)_J$ définit un morphisme de (U,μ) dans (Z,ρ) :

En effet,

d'abord si $u,u'\in U_i$: $\mu(u,u')\leq\rho(\ulcorner F_i\urcorner(u),\ulcorner F_i\urcorner(u'))$:

car si $\ulcorner F_i\urcorner(u) = [i,(f_j)_{j\leq i}]$ et $\ulcorner F_i\urcorner(u') = [i,(f'_j)_{j\leq i}]$, on a :

$$\rho(\ulcorner F_i\urcorner(u),\ulcorner F_i\urcorner(u')) = \rho[[i,(f_j)_{j\leq i}],[i,(f'_j)_{j\leq i}]] = \vee\{k\in J \,/\, {}^{k\leq i}_{(f_r)_{r\leq k}=(f'_r)_{r\leq k}}\}$$

mais $u_{|k}=u'_{|k} \rightarrow f_k(x) = F_k(x,u_{|k}) = F_k(x,u'_{|k}) = f'_k(x)$ pour tout $x\in X_k \rightarrow f_k=f'_k$,

de sorte que $u_{|k}=u'_{|k} \rightarrow \forall r\leq k : u_{|r}=u'_{|r} \rightarrow \forall r\leq k : f_r=f'_r$;

d'où $\mu(u,u') = \vee\{k\in J \,/\, u_{|k}=u'_{|k}\} \leq \rho(\ulcorner F_i\urcorner(u),\ulcorner F_i\urcorner(u'))$.

D'autre part si $u\in U_j$ et si $i\leq j$: $\ulcorner F_j\urcorner(u)_{|i} = \ulcorner F_i\urcorner(u_{|i})$

car $\ulcorner F_j\urcorner(u)_{|i} = [j,(f_k)_{k\leq j}]_{|i} = [i,(f_k)_{k\leq i}]$, où $f_k(x) = F_k(x,u_{|k})$ pour tout $x\in X_k$,

tandis que $\ulcorner F_i\urcorner(u_{|i}) = [i,(g_k)_{k\leq i}]$, où $g_k(x) = F_k(x,u_{|i}{}_{|k}) = F_k(x,u_{|k}) = f_k(x)$

pour tout $x\in X_k$.

d. Pour tout $i\in J$, le diagramme (D_i)

$$\begin{tikzcd} X_i\times Z_i \arrow[r, "E_i"] & Y_i \\ X_i\times U_i \arrow[u, "1_{X_i}\times\ulcorner F_i\urcorner"] \arrow[ur, "F_i"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif :

En effet, si $x\in X_i$ et si $u\in U_i$:

$1_{X_i}\times\ulcorner F_i\urcorner(x,u) = (x,\ulcorner F_i\urcorner(u))$, d'où :

$E_i\circ 1_{X_i}\times\ulcorner F_i\urcorner(x,u) = E_i[x,\ulcorner F_i\urcorner(u)] = \ulcorner F_i\urcorner(u)(x) = F_i(x,u_{|i}) = F_i(x,u)$

De sorte que le diagramme (D)

$$\begin{tikzcd}
(X,\sigma) \times (Z,\rho) \arrow[r, "E"] & (Y,\tau) \\
(X,\sigma) \times (U,\mu) \arrow[u, "1_{(X,\sigma)} \times \ulcorner F \urcorner"] \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

e. $\ulcorner F \urcorner$ est l'unique morphisme de (U,μ) dans (Z,ρ) tel que le diagramme (D) soit commutatif.

En effet, si G est un tel morphisme, G_i rend nécessairement commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X_i \times Z_i \arrow[r, "E_i"] & Y_i \\
X_i \times U_i \arrow[u, "1_{X_i} \times G_i"] \arrow[ur, "F_i"'] &
\end{tikzcd}$$

de sorte que si $u \in U_i$ et si $G_i(u) = [i,(g_j)_{j \leq i}]$.

on a pour tout $x \in X_j$ $(j \leq i)$:

$$E_j \circ 1_{X_j} \times G_j \; (x,u|_j) = F_j(x,u|_j)$$

$$E_j[x,G_j(u|_j)] = F_j(x,u|_j)$$

$$E_j[x,G_i(u)|_j] = f_j(x,u|_j)$$

$$\text{soit} \quad g_j(x) = f_j(x),$$

d'où $G_i(u) = [i,(g_j)_{j \leq i}] = [i,(f_j)_{j \leq i}] = \ulcorner F_i \urcorner(u)$.

. PROPOSITION 17. - *Si J n'est pas un anti-ordinal,* JTF°° *n'a pas de classificateur de monomorphismes.*

Soit J un treillis de Heyting complet qui n'est pas un anti-ordinal: Il existe donc une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante d'éléments de J ; soit $i = \bigvee_{n\geq 1} \alpha_n$.

Supposons qu'il existe un classificateur de monomorphismes $(\mathcal{A},c)$ dans JTF°° et désignons alors par T le morphisme de vérité associé.

Posons pour tout $n\geq 1$ $\mathcal{C}_n = [0,\alpha_n]$. Soit $\mathcal{C} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{C}_n$ et $\overline{\mathcal{C}} = [0,i]$

Considérons les objets de JTF°° $(\mathcal{C},\wedge)$ et $(\overline{\mathcal{C}},\wedge)$ et le monomorphisme canonique d'injection de $(\mathcal{C},\wedge)$ dans $(\overline{\mathcal{C}},\wedge)$, dont χ désigne le morphisme caractéristique de $(\overline{\mathcal{C}},\wedge)$ dans $(\mathcal{A},c)$

Soit (D) :
$$\begin{tikzcd}
 & (J,\wedge) \arrow[dr, "T"] & \\
(\mathcal{C},\wedge) \arrow[ur] \arrow[dr, hook] & & (\mathcal{A},c) \\
 & (\overline{\mathcal{C}},\wedge) \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

(D) est commutatif : donc pour tout $n\geq 1$: $\chi_{\alpha_n}(\alpha_n) = T_{\alpha_n}(\alpha_n)$

posons $\chi_i(i) = c_i$

Pour tout $n\geq 1$: $c_i|_{\alpha_n} = \chi_i(i)|_{\alpha_n} = \chi_{\alpha_n}(i|_{\alpha_n}) = \chi_{\alpha_n}(\alpha_n) = T_n(\alpha_n) = T_i(i)|_{\alpha_n}$

donc $c_i = c_i|_{\bigvee_{n\geq 1}\alpha_n} = T_i(i)|_{\bigvee_{n\geq 1}\alpha_n} = T_i(i)$ de sorte que $\chi_i(i) = T_i(i)$

Alors, pour tout $j\in\overline{\mathcal{C}}$: $\chi_j(j) = \chi_j(i|_j) = \chi_i(i)|_j = T_i(i)|_j = T_j(i|_j) = T_j(j)$

Le diagramme (E) suivant est commutatif :

(E)
$$\begin{tikzcd}
 & (J,\wedge) \arrow[dr, "T"] & \\
(\overline{\mathcal{C}},\wedge) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, "1_{(\overline{\mathcal{C}},\wedge)}"'] & & (\mathcal{A},c), \\
 & (\overline{\mathcal{C}},\wedge) \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

donc - puisque (D) est un pullback - il existe un morphisme R de $(\overline{\mathcal{C}},\wedge)$ dans $(\mathcal{C},\wedge)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & (J,\wedge) \arrow[dr, "T"] & \\
(\bar{\mathscr{C}},\wedge) \arrow[r, dashed, "R"] \arrow[urr, hook] \arrow[drr, "1_{(\bar{\mathscr{C}},\wedge)}"'] & (\mathscr{C},\wedge) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & (\mathfrak{A},\subset) \\
 & & (\bar{\mathscr{C}},\wedge) \arrow[ur, "X"'] &
\end{tikzcd}$$

Mais l'existence de R est absurde puisque $\bar{\mathscr{C}}_i = \{i\} \neq \emptyset$ alors que $\mathscr{C}_i = \emptyset$.

CONCLUSION.

I. *ou bien* J *est un anti-ordinal :*
alors les catégories $\mathscr{S}(J)$, $\mathscr{F}(J)$, $\mathscr{PF}(J)$, $\mathscr{PF}(J)^{(S)}$, JTF, JTF^*, JTF°° sont équivalentes - ce sont des topoï.

II. *ou bien* J *n'est pas un anti-ordinal :*
Alors :

A. $\mathscr{F}(J)$, $\mathscr{S}(J)$, JTF^* sont équivalentes - ce sont des topoï.

B. JTF, JTF°°, $\mathscr{PF}(J)^{(S)}$ sont équivalentes. Elles n'ont pas de classificateur de monomorphismes, mais ce sont des catégories cartésiennement closes.

C. $\mathscr{PF}(J)$ est un topos.

avec ces précisions :

1. Toute catégorie du groupe A est équivalente à une sous-catégorie pleine de toute catégorie du groupe B.

2. Toute catégorie du groupe B est équivalente à une sous-catégorie pleine de $\mathscr{PF}(J)$.

BIBLIOGRAPHIE. voir 2ème partie. BUSEFAL n°23, 4-13, 1985