REMARQUES SUR CERTAINES CATÉGORIES D'ENSEMBLES TOTALEMENT FLOUS (2e partie)

J. et J.L. COULON
Bâtiment de mathématiques (2e cycle)
Université Claude Bernard, LYON 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 - VILLEURBANNE cedex - France

Dans toute la suite J désigne un treillis de Heyting complet.

Dans [8], nous avons présenté plusieurs catégories d'ensembles totalement flous : la catégorie $\mathcal{S}(J)$ de Higgs, la catégorie $\mathcal{F}(J)$ des faisceaux sur J et la catégorie JTF de Ponasse. Nous appellerons $\mathcal{PF}(J)$ la catégorie des préfaisceaux sur J.

Les catégories $\mathcal{S}(J)$ et $\mathcal{F}(J)$ sont équivalentes ([5], [6]). Dans [8], nous avons donné quelques éléments de comparaison entre $\mathcal{F}(J)$ (ou $\mathcal{S}(J)$) et JTF. Nous voulons ici approfondir cette comparaison.

Nous verrons en outre (dans la 3e partie) que JTF n'est un topos que si J est un anti-ordinal.

§1. QUELQUES REMARQUES SUR JTF* :

• Dans [8], nous avons montré (cela résulte de la proposition 1 du §3 et des résultats de Higgs - [5], [6] - rappelés au §4) que la catégorie $\mathcal{F}(J)$ (ou $\mathcal{S}(J)$) est équivalente à la sous-catégorie pleine JTF* de JTF dont les objets sont les ensembles totalement flous (X,σ) tels que :

(i) $\sigma(x,y) = \alpha_\sigma(x) = \alpha_\sigma(y) \longrightarrow x=y$

(ii) $\forall x\in X,\ \forall i < \alpha_\sigma(x),\ \exists y\in X$ tel que $\alpha_\sigma(y) = i$ et $\sigma(y,x) = \alpha_\sigma(y)$

(iii) Pour toute famille $(x_k)_K$ "compatible" d'éléments de X [c'est-à-dire $\forall k',k''$: $\sigma(x_{k'},x_{k''}) = \alpha_\sigma(x_{k'})\wedge\alpha_\sigma(x_{k''})$],
il existe un élément x de X tel que :

$$\left|\begin{array}{l} \forall k\in K : \sigma(x_k,x) = \alpha_\sigma(x_k) \\ [\forall k\in K : \sigma(x_k,z) = \alpha_\sigma(x_k)] \longrightarrow \sigma(x,z) = \alpha_\sigma(x) \end{array}\right.$$

Nous appellerons *préfaisceau totalement flou* tout ensemble flou vérifiant (i) et (ii), et *faisceau totalement flou* tout préfaisceau totalement flou vérifiant (iii).

• DEFINITION. - Soit R un morphisme (au sens de JTF) de (X,σ) vers (Y,τ). Nous dirons que R est un *morphisme fonctionnel* si

$$\forall x \in X,\ \exists! y(x) \in Y,\ xRy(x) \text{ et } \alpha_\sigma(x) = \alpha_\tau(y(x))$$

(c'est-à-dire "tout élément de X est en relation avec un unique élément de Y situé au même niveau que lui).

Exemple : Le morphisme identité $\mathring{i}$ de (X,σ) $[x\mathring{i}x' \leftrightarrow \sigma(x,x') = \alpha_\sigma(x)]$ est fonctionnel si et seulement si (X,σ) vérifie (i).

• PROPOSITION 1. - *Si* R *est un morphisme fonctionnel de* (X,σ) *dans* (Y,τ) :

$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y : \qquad xRy \leftrightarrow \tau(y(x),y) = \alpha_\sigma(x)$$

en effet, $xRy(x)$ et $xRy \rightarrow \alpha_\sigma(x) = \sigma(x,x) \leq \tau(y(x),y) \leq \alpha_\tau(y(x)) = \alpha_\sigma(x)$; et inversement, si $\alpha_\sigma(x) = \tau(y(x),y)$, on a xRy puisque $xRy(x)$.

• PROPOSITION 2. - *Si* $R : (X,\sigma) \rightarrow (Y,\tau)$ *et* $S : (Y,\tau) \rightarrow (Z,\rho)$ *sont des morphismes fonctionnels,* SR *est également fonctionnel (pour la défintion de* SR, *voir* [8]*).*

en effet, $xRy(x)$ et $y(x)Sz(y(x)) \rightarrow xS\circ Rz(y(x)) \rightarrow xSR\ z(y(x))$, et $\alpha_\rho[z(y(x))] = \alpha_\tau[y(x)] = \alpha_\sigma(x)$.

D'autre part, $z(y(x))$ est l'unique élément z de Z tel que xSRz et $\alpha_\sigma(x) = \alpha_\rho(z)$, car si z est un tel élément il existe $y \in Y$ et $z^* \in Z$ tels que

$$\left|\begin{array}{l} xRy \\ ySz^* \\ \alpha_\sigma(x) \leq \rho(z,z^*) \end{array}\right.$$

$y(x)Sz(y(x))$

$\alpha_\tau(y(x)) \leq \rho[z(y(x)),z]$ (on a d'ailleurs en fait l'égalité) : en effet,

$$\rho[z(y(x)),z] \geq \underbrace{\rho[z(y(x)),z(y)]}_{\substack{\geq \tau(y(x),y)=\alpha_\sigma(x) \\ \text{(d'après la prop.1)}}} \wedge \underbrace{\rho[z(y),z^*]}_{\substack{\geq \alpha_\tau(y) \geq \alpha_\sigma(x) \\ \text{(d'après la prop.1)}}} \wedge \rho(z^*,z) \geq \alpha_\sigma(x) = \alpha_\tau[y(x)]$$

de sorte que $y(x)Sz$; mais puisque $\alpha_\rho(z) = \alpha_\sigma(x) = \alpha_\tau(y(x))$, c'est que $z = z(y(x))$ puisque S est fonctionnel.

[Remarque : avec les notations employées, on a donc $z(x) = z(y(x))$].

• L'étude du morphisme identité et la proposition 2 permettent d'envisager certaines sous-catégories de JTF :

JTF° : sous-catégorie de JTF dont les objets sont les ensembles totalement flous vérifiant (i) et dont les morphismes sont les morphismes fonctionnels.

$JTF^{\circ\circ}$: sous-catégorie de JTF dont les objets sont les préfaisceaux totalement flous et dont les morphismes sont les morphismes fonctionnels.

$JTF^{\circ\circ\circ}$: sous-catégorie de JTF dont les objets sont les faisceaux totalement flous et dont les morphismes sont les morphismes fonctionnels.

• PROPOSITION 3. - *Tout morphisme entre des préfaisceaux totalement flous est fonctionnel.*

En effet, soit (X,σ) et (Y,τ) deux préfaisceaux totalement flous, et soit R un morphisme de (X,σ) vers (Y,τ).
Soit $x\in X$. Il existe $y\in Y$ tel que xRy. Alors $\alpha_\sigma(x) \leq \alpha_\tau(y)$. Posons $y_1=y|_{\alpha_\sigma(x)}$
$\tau(y,y_1) = \tau(y,y|_{\alpha_\sigma(x)}) = \alpha_\sigma(x)$ et xRy, de sorte que xRy_1 avec $\alpha_\sigma(x) = \alpha_\tau(y_1)$.
D'autre part, si xRy_1, xRy_2 et $\alpha_\sigma(x) = \alpha_\tau(y_1) = \alpha_\tau(y_2)$:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\sigma(x) \leq \tau(y_1,y_2) \leq \alpha_\tau(y_1) = \alpha_\sigma(x)\\ \alpha_\sigma(x) \leq \tau(y_1,y_2) \leq \alpha_\tau(y_2) = \alpha_\sigma(x)\end{array}\right| \rightarrow \tau(y_1,y_2) = \alpha_\tau(y_1) = \alpha_\tau(y_2) \rightarrow y_1=y_2$$

(remarque : nous avons seulement utilisé le fait que (Y,τ) était un préfaisceau totalement flou).

• COROLLAIRE 1. -

$JTF^{\circ\circ}$ *est donc la sous-catégorie pleine de* JTF *dont les objets sont les préfaisceaux totalement flous.*
$JTF^{\circ\circ\circ}$ *est la sous-catégorie pleine de* JTF *dont les objets sont les faisceaux totalement flous : c'est* JTF^{*}.

. PROPOSITION 4. -

a) *La catégorie* $\mathcal{F}(J)$ *des faisceaux sur* J *est équivalente à la catégorie* JTF^{*} *des faisceaux totalement flous.*

b) *La catégorie* $JTF^{\circ\circ}$ *des préfaisceaux totalement flous est équivalente à une sous-catégorie de la catégorie* $\mathcal{PF}(J)$ *des préfaisceaux sur* J.

PREUVE. - Nous avons déjà prouvé a) dans [8] .

Preuve de b) :

* Remarquons d'abord que si G est un préfaisceau sur J, (X_G, σ_G),

où
$$\begin{cases} X_G = \coprod_{i\in J} G(i) \\ \sigma_G(x,x') = \vee\{k\in J / x|_k = x'|_k\} \end{cases}$$

est un ensemble totalement flou qui vérifie (ii) (Si $x\in G(j)$ et si $i\leq j$, il est clair que $\sigma_G(x|_i, x) = i$ et que $\alpha_{\sigma_G}(x|_i) = i$), mais peut être pas (i), comme le montre ce contre-exemple :

Soit $J = [0,1]$.

On définit un préfaisceau G par

$G(i)$ = l'ensemble des section initiales contenues dans $[0,i]$

Si $i\leq j$: $G(j) \longrightarrow G(i)$ est définie comme $S \to S \cap [0,i]$

$S \longrightarrow S|_i$

Alors $X_G = \coprod_{i\in J} G(i) = \bigcup_{i\in J} \{i\} \times G(i)$,

et si $S\in G(i)$ et $S'\in G(i')$: $\sigma_G((i,S),(i',S')) = \vee\{k\in J / S\cap[0,k]\} = S'\cap[0,k]\}$.

Soient alors $S = [0,1]$ et $S' = [0,1[$:

$$\begin{cases} \sigma_G((1,S),(1,S')) = \vee\{k\in J / S\cap[0,k] = S'\cap[0,k]\} = 1, \\ \alpha_{\sigma_G}((1,S)) = \alpha_{\sigma_G}((1,S')) = 1 \end{cases}$$

et pourtant $S \neq S'$.

* On définit un foncteur γ de $JTF^{\circ\circ}$ dans $\mathcal{PF}(J)$ de la façon suivante :

Si (X,σ) est un préfaisceau totalement flou, $\gamma(X,\sigma) = \phi$ défini par

$\phi(i) = \{x\in X / \alpha_\sigma(x) = i\}$

Si $i\leq j$: $\phi(j) \longrightarrow \phi(i)$

$x \longrightarrow x|_i$ est définie par : $x|_i$ est l'unique élément de $\phi(i)$ tel que $\sigma(x|_i, x) = i$

Si R est un morphisme de (X,σ) vers (Y,τ), si $\phi = \gamma(X,\sigma)$ et $\psi = \gamma(Y,\tau)$, $\gamma(R)$ est la transformation naturelle telle que

$$\gamma(R)_i : \left| \begin{array}{l} \phi(i) \to \psi(i) \\ x \longrightarrow \text{l'unique } y \in \psi(i) \text{ tel que } xRy \end{array} \right.$$

pour voir que $\gamma(R)$ est bien une transformation naturelle, on utilise cette importante remarque :

REMARQUE (LEMME 1). - Soient (X,σ) et (Y,τ) deux préfaisceaux totalement flous et soit R un morphisme de (X,σ) vers (Y,τ).
Si xRy et si $\ell \leq \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(y)$: $x_{|\ell} \, R y_{|\ell}$

[en effet, si xRy et si $\ell \leq \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(y)$, il existe un unique u de Y tel que $x_{|\ell} R u$ et $\alpha_\tau(u) = \ell$; xRy et $x_{|\ell} R u \to \sigma(x, x_{|\ell}) \leq \tau(y,u)$ et $\ell \leq \tau(y,u) \leq \alpha_\tau(u) = \ell$; d'où $\tau(u,y) = \alpha_\tau(u) = \ell$ et par conséquent $u = y_{|\ell}$; de sorte que $x_{|\ell} \, R y_{|\ell}$] .

* Soit $\mathcal{PF}(J)^{(S)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{PF}(J)$ dont les objets sont les préfaisceaux sur J vérifiant (S) :

(S) : Si $x \in \phi(i)$, $x' \in \phi(i')$; si $K \subset [0, i \lambda i']$, $k_o = \vee K$; si $\forall k \in K$: $x_{|k} = x'_{|k}$, alors $x_{|k_o} = x'_{|k_o}$ [on parlera de *(S)-préfaisceau sur J*]

(on a vu -dans [8] - que par exemple tout faisceau sur J est un (S)-préfaisceau sur J).

* Alors γ est un foncteur de JTF^{oo} dans $\mathcal{PF}(J)^{(S)}$. En effet, si $\phi = \gamma(X,\sigma)$:
Supposons que pour $k \in K$: $x_{|k} = x'_{|k}$
Soit $y = x_{|k_o}$ et $y' = x'_{|k_o}$
y est caractérisé par $\sigma(y,x) = \alpha_\sigma(y) = k_o$
or $\sigma(y',x) \geq \sigma(y',x') \wedge \sigma(x',x) \geq k_o$,
$k_o \geq k_o$

car $\forall k \in K$: $\sigma(x',x) \geq \sigma(x', x'_{|k}) \wedge \sigma(x'_{|k}, x_{|k}) \wedge \sigma(x_{|k}, x) = k$
d'où $\sigma(x',x) \geq \vee K = k_o$

d'où $\sigma(y',x) = \alpha_\sigma(y') = k_o$, et $y' = y$.

* On définit un foncteur δ de $\mathcal{PF}(J)^{(S)}$ dans JTF^{oo} de la façon suivante :

Si ϕ est un (S)-préfaisceau sur J, $\delta(\phi) = (X_\phi, \sigma_\phi)$ défini par

$$X_\phi = \coprod_{i \in J} \phi(i)$$

Si $x \in \phi(i)$, $x' \in \phi(i')$: $\sigma_\phi(x,x') = \vee\{k \in J / \; x_{|k} = x'_{|k}\}$

Si τ est une transformation naturelle du (S)-préfaisceau ϕ dans le (S)-préfaisceau ψ , $\delta(\tau) = R$ est définie par :

$$\text{Si } x\in\phi(i) \text{ et si } y\in\psi(j) : xRy \leftrightarrow i \leq j, \text{ et } \tau_i(x) = y_{|i}$$

On sait déjà que (X_ϕ,σ_ϕ) est un ensemble totalement flou qui vérifie (ii). Par ailleurs si $\sigma_\phi(x,x') = \alpha_{\sigma_\phi}(x) = \alpha_{\sigma_\phi}(x')$, c'est que $x\in\phi(i)$, $x'\in\phi(i)$ et $i = \vee\{k\in J \ / \ x_{|k} = x'_{|k}\}$. Comme ϕ est un (S)-préfaisceau sur J, $x = x_{|i} = x'_{|i} = x'$.

Pour montrer que R est un morphisme de JTF de $(X,\sigma) = \delta(\phi)$ dans $(Y,\tau) = \delta(\psi)$, on reproduit la preuve de a) développée dans [8] à ceci près :
Si xRy et $\alpha_\sigma(x) \leq \tau(y,y')$: on a $x\in\phi(i)$, $y\in\psi(j)$, $i \leq j$ et $\tau_i(x) = y_{|i}$. Comme $\vee\{k\in J \ / \ y_{|k} = y'_{|k}\} \geq i$, $y_{|i} = y'_{|i}$ (puisque ψ est un (S)-préfaisceau sur J) de sorte que $i \leq j$ et $\tau_i(x) = y'_{|i}$, d'où xRy'.

Quant au fait que $\delta(\lambda\tau) = \delta(\lambda)\delta(\tau)$ si τ est une transformation naturelle de ϕ dans ψ et λ une transformation naturelle de ψ dans Λ , il résulte aisément de la proposition 2 et de la proposition 3.

* Grâce à (γ,δ), on voit aisément que les catégories $JTF^{\circ\circ}$ et $\mathcal{PF}(J)^{(S)}$ sont équivalentes.
Remarquons en particulier que si $\phi = \gamma(X,\sigma)$: $\sigma_\phi(x,x') = \vee\{k\in J \ / \ x_{|k} = x'_{|k}\}$.
or $x_{|\sigma(x,x')} = x'_{|\sigma(x,x')}$ car $y = x_{|\sigma(x,x')}$ est caractérisé par $\sigma(y,x) = \sigma(x,x') = \alpha_\sigma(y)$ alors que si $y' = x'_{|\sigma(x,x')}$: $\sigma(y',x')=\sigma(x,x')=\alpha_\sigma(y')$, de sorte que $\sigma(y',x) \geq \sigma(y',x') \wedge \sigma(x',x) = \sigma(x,x')$ et $\sigma(y',x) = \sigma(x,x') = \alpha_\sigma(y')$ d'où $y = y'$. De sorte que $\sigma(x,x') \leq \sigma_\phi(x,x')$. Par ailleurs, dès que $x_{|k} = x'_{|k}$, on a $\sigma(x,x') \geq \sigma(x,x_{|k}) \wedge \sigma(x_{|k},x'_{|k}) \wedge \sigma(x'_{|k},x') = k$. Or puisque ϕ est un (S)-préfaisceau sur J, $x_{|\sigma_\phi(x,x')} = x'_{|\sigma_\phi(x,x')}$, de sorte que $\sigma(x,x') \geq \sigma_\phi(x,x')$. D'où $\sigma_\phi(x,x') = \sigma(x,x')$.

§2. A PROPOS DES MORPHISMES FONCTIONNELS :

• PROPOSITION 5. - *Soient* (X,σ) *et* (Y,τ) *deux ensembles totalement flous.*

1) *Si* R *est un morphisme fonctionnel de* (X,σ) *vers* (Y,τ) *; si, pour tout* $i\in J$, R_i *désigne l'application de* $X_i = \alpha_\sigma^{-1}(i)$ *dans* $Y_i = \alpha_\tau^{-1}(i)$

définie par $x \to y(x)$, *on a :*

$$\text{(u)} \qquad \forall x \in X,\ \forall x' \in X : \sigma(x,x') \leq \tau(R_{\alpha_\sigma(x)}(x), R_{\alpha_\sigma(x')}(x'))$$

on dit que $(R_i)_J$ *est la* famille naturelle *associée à* R.

2) On suppose de plus que (Y,τ) vérifie (i) :
Si $(R_i)_J$ *est une famille telle que* $\left| \begin{array}{l} \forall i \in J,\ R_i \text{ est une application de} \\ X_i \text{ dans } Y_i \ ;\ \text{(u)} \end{array} \right.$
il existe un unique morphisme de (X,σ) *vers* (Y,τ) *fonctionnel dont* $(R_i)_J$ *est la famille naturelle associée :*
il s'agit de $xRy \leftrightarrow \tau(R_{\alpha_\sigma(x)}(x),y) = \alpha_\sigma(x)$

PREUVE. -

1) puisque $x\ R\ R_{\alpha_\sigma(x)}(x)$ et $x'\ R\ R_{\alpha_\sigma(x')}(x')$, il est clair qu'on a (u).

2) Posons pour $x \in X_i$, $y \in Y_j$: $xRy \leftrightarrow \tau(R_i(x),y) = i$

Si $\left. \begin{array}{l} xRy \\ x'Ry' \end{array} \right|$: $\tau(y,y') \geq \tau(y,R_i(x)) \wedge \tau(R_i(x),R_{i'}(x')) \wedge \tau(R_{i'}(x'),y')$
$\geq \tau(R_i(x),R_{i'}(x')) \geq \sigma(x,x')$

Si $\left. \begin{array}{l} xRy \\ i=\alpha_\sigma(x) \leq \tau(y,y') \end{array} \right|$: $\begin{array}{l} \tau(R_i(x),y') \leq i \\ \tau(R_i(x),y') \geq \tau(R_i(x),y) \wedge \tau(y,y') = i \ ; \end{array}$

d'où $\tau(R_i(x),y') = i$ et xRy'

De plus, on a $x\ R\ R_i(x)$, et si xRy, xRy', $\alpha_\tau(y) = \alpha_\tau(y') = \alpha_\sigma(x)$, on a alors $\tau(R_i(x),y) = \alpha_\tau(R_i(x)) = \alpha_\tau(y)$, d'où $y = R_i(x)$ puisque (Y,τ) vérifie par hypothèse (i).

• COROLLAIRE 2. - *Si* (Y,τ) *vérifie (i), tout morphisme fonctionnel de* (X,σ) *vers* (Y,τ) *est déterminé par sa famille naturelle.*

• PROPOSITION 6. - *Si* (X,σ) *et* (Y,τ) *sont des* préfaisceaux totalement flous, *alors :*

$$\text{(u)} \leftrightarrow \text{(v)} + \text{(w)}, \text{ où} \qquad \begin{array}{l} \text{(v) : si } x,x' \in X_i : \sigma(x,x') \leq \tau(R_i(x),R_i(x')) \\ \text{(w) : si } x \in X_j, y=R_j(x) \text{ et } i \leq j : y_{|i} = R_i(x_{|i}) \end{array}$$

en effet, soient (X,σ) et (Y,τ) des préfaisceaux totalement flous.
Si on a (u), on a a fortiori (v). D'autre part (w) résulte du lemme 1.

Inversement, supposons (v) + (w) :

Soient $x \in X_i$, $x' \in X_{i'}$:

$$\tau[R_i(x), R_{i'}(x')] \geq \tau[R_i(x), R_{i\wedge i'}(x|_{i\wedge i'})] \wedge \tau[R_{i\wedge i'}(x|_{i\wedge i'}), R_{i\wedge i'}(x'|_{i\wedge i'})] \wedge \tau[R_{i\wedge i'}(x'|_{i\wedge i'}), R_{i'}(x')]$$

or $\quad \tau[R_i(x), R_{i\wedge i'}(x|_{i\wedge i'})] \underset{(w)}{=} \tau[R_i(x), R_i(x)|_{i\wedge i'}] = i\wedge i'$

de même $\quad \tau[R_{i\wedge i'}(x'|_{i\wedge i'}), R_{i'}(x')] = i\wedge i'$

alors que $\quad \tau[R_{i\wedge i'}(x|_{i\wedge i'}), R_{i\wedge i'}(x'|_{i\wedge i'})] \underset{(v)}{\geq} \sigma(x|_{i\wedge i'}, x'|_{i\wedge i'})$

$$\geq \sigma(x|_{i\wedge i'}, x) \wedge \sigma(x,x') \wedge \sigma(x', x'|_{i\wedge i'}) \geq i\wedge i' \wedge \sigma(x,x') \wedge i\wedge i'$$
$$= \sigma(x,x')$$

d'où $\quad \tau[R_i(x), R_{i'}(x')] \geq \sigma(x,x')$.

• PROPOSITION 7. - *Soient* (X,σ), (Y,τ), *et* (Z,ρ) *des ensembles totalement flous,* R *un morphisme fonctionnel de* (X,σ) *vers* (Y,τ) *ayant* $(R_i)_J$ *pour famille naturelle associée et* S *un morphisme fonctionnel de* (Y,τ) *vers* (Z,ρ) *ayant* $(S_i)_J$ *pour famille associée. Alors* $(S_iR_i)_J$ *est la famille naturelle associée à* SR.

(évident).

• PROPOSITION 8. - *Soient* (X,σ) *et* (Y,τ) *deux ensembles totalement flous.*

On suppose que (X,σ) vérifie (i).

Soit R *un morphisme fonctionnel de* (X,σ) *vers* (Y,τ), *de famille naturelle* $(R_i)_J$

Alors il y a équivalence entre :

a) R *est un monomorphisme de* JTF.

b) *chaque* R_i *est une injection.*

PREUVE. -

a) → b) : Si $x \in X_i$, $x' \in X_i$ et $R_i(x) = R_i(x') = y_o$,

Comme xRy_o, $x'Ry_o$ et R monomorphisme : on a (cf [2]) :

$\sigma(x,x') = \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(x') \wedge \alpha_\tau(y_o) = i$, de sorte que $\sigma(x,x') = \alpha_\sigma(x) = \alpha_\sigma(x')$

et - puisque (X,σ) vérifie (i) - $x = x'$.

b) → a) : Supposons avoir la situation

$$(Z,\rho) \underset{V}{\overset{U}{\rightrightarrows}} (X,\sigma) \xrightarrow{R} (Y,\tau) \quad \text{avec} \quad RU = RV = S$$

Pour chaque $i \in J$: $R_i U_i = R_i V_i$ (d'après la proposition 7).
Comme R_i est une injection, donc un monomorphisme de **Ens**, c'est que $U_i = V_i$.
D'où $U = V$ d'après le corollaire 1 de la proposition 5.

Nous donnerons sans démonstration :

• PROPOSITION 9. - *Soient* (X,σ) *et* (Y,τ) *deux ensembles totalement flous.*

On suppose que (X,σ) vérifie (i).
Soit R *un morphisme fonctionnel de* (X,σ) *vers* (Y,τ), *de famille naturelle* $(R_i)_J$.
Alors il y a équivalence entre :

a) R *est un isomorphisme de* JTF

b) *chaque* R_i *est une bijection de* X_i *sur* Y_i
si $x \in X_i, x' \in X_{i'}$: $\sigma(x,x') = \tau(R_i(x), R_{i'}(x'))$ (E)

• PROPOSITION 10. - *Soient* (X,σ) *et* (Y,τ) *deux* préfaisceaux totalement flous.

Soit R *un morphisme de* (X,σ) *vers* (Y,τ) , *de famille naturelle* $(R_i)_J$
Alors il y a équivalence entre :

a) R *est un isomorphisme de* JTF

c) *chaque* R_i *est une bijection de* X_i *sur* Y_i *telle que*
$\forall x,x' \in X_i$: $\tau(R_i(x), R_i(x')) = \sigma(x,x')$

• PROPOSITION 11. - *Soient* (X,σ) *et* (Y,τ) *deux* préfaisceaux totalement flous.

Soit R *un morphisme de* (X,σ) *vers* (Y,τ) , *de famille naturelle* $(R_i)_J$.
Alors il y a équivalence entre :

a) R *est un épimorphisme de* JTF

b) $\forall y \in Y$: $\bigvee_{i \leq \alpha_\tau(y)} \tau(y_{|i}, \operatorname{Im} R_i) = \alpha_\tau(y)$ (EPI)
(*où* $\tau(z,A)$ *désigne* $\bigvee_{a \in A} \tau(z,a)$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLANC G.,- "Préfaisceaux et ensembles flous" (non publié)

[2] PONASSE D., - "Remarques sur les ensembles totalement flous" (séminaire de mathématique floue de l'Université LYON I - 1982-83).

[3] MYCEK G.,-"Deux topos isomorphes d'ensembles totalement flous". (Thèse de Doctorat de 3e cycle, présentée devant l'Université de LYON I - 1983).

[4] GOLDBLATT R.,- "Topoï ; the categorical analysis of logic ; studies in logic and the foundations of mathematics". Vol. 98, North Holland publishing company, 1979.

[5] HIGGS D.,- "A category approach to boolean valued set theory" (Preprint ; University of Waterloo, Waterloo, Ontario - Canada ; 1973).

[6] HIGGS D.,- "Injectivity in the topos of complete Heyting algebra valued sets". (Canadian journal of mathematics, vol. XXXVI, n°3, juin 1984, 550 → 568).

[7] WU TAO,- "Etude détaillée du topos JTF".(Thèse de Doctorat de 3e cycle, présentée devant l'Université LYON I).

[8] COULON J., COULON J.L.,- "Remarques sur certaines catégories d'ensembles totalement flous". (BUSEFAL).