REMARQUES SUR CERTAINES CATEGORIES D'ENSEMBLES TOTALEMENT FLOUS

J.COULON - J.L.COULON

§ 1 - DIFFERENTES CATEGORIES D'ENSEMBLES TOTALEMENT FLOUS.

Dans toute la suite, J désigne un treillis de Heyting complet.

(1). Catégorie $\mathcal{S}(J)$ de Higgs (cf. par exemple [5]).

* Un objet est un (X,σ), où X est un ensemble non vide et σ une application de X^2 dans J telle que :

$$\begin{cases} \sigma(x,y) = \sigma(y,x) \\ \sigma(x,y) \wedge \sigma(y,z) \leqslant \sigma(x,z). \end{cases}$$

Il détermine également une application α_σ de X dans J définie par $\alpha_\sigma(x) = \sigma(x,x)$.

* Un morphisme de (X,σ) dans (Y,τ) est une application f de $X \times Y$ dans J telle que :

$$\begin{cases} f(x,y) \wedge \sigma(x,x') \leqslant f(x',y) \\ f(x,y) \wedge \tau(y,y') \leqslant f(x,y') \\ f(x,y) \wedge f(x,y') \leqslant \tau(y,y') \\ \bigvee_{y \in Y} f(x,y) = \alpha_\sigma(x). \end{cases}$$

* La composition des morphismes est donnée par :

$$(gf)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} [f(x,y) \wedge g(y,z)].$$

(2). Catégorie $\mathcal{F}(J)$ des faisceaux sur J (cf. par exemple [4], ou [5]).

* Un objet est une foncteur contravariant F de la catégorie J (dont les objets sont les éléments de J, n'ayant de morphisme de i dans j que si $i \leqslant j$ et n'ayant alors qu'un seul morphisme de i dans j que l'on notera $i \leqslant j$) dans la catégorie $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ des ensembles tel que : si pour $i \leqslant j$ l'application $F(i \leqslant j) : f(j) \longrightarrow f(i)$ est notée $x \longmapsto x|_i$, on ait la propriété suivante : pour toute famille $(x_k)_{k \in K}$ telle que $\forall\, k \in K : x_k \in F(i_k)$ et $\forall\, k',k'' \in K : x_{k'}|_{i_{k'} \wedge i_{k''}} = x_{k''}|_{i_{k'} \wedge i_{k''}}$,

il existe un unique élément x de $F(\bigvee_{k \in K} i_k)$ tel que :

$$\forall k \in K : x_{i_k} = x_k .$$

* un morphisme de F dans G est une transformation naturelle τ de F dans G.

Pour tout $i \in J$, on notera τ_i l'application de $F(i)$ dans $G(i)$ déterminée par τ.

* La composition des morphismes se définit naturellement.

(3). <u>Catégorie JTF de Ponasse</u> (cf. par exemple [2]) (définie pour tout treillis complet J).

* Elle a les mêmes objets que $\mathcal{S}(J)$.

* Un morphisme de (X,σ) dans (Y,τ) est une relation de X vers Y telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} Rx = \{y \in Y \;/\; x R y\} \neq \emptyset \\ \left.\begin{array}{l} x R y \\ x' R y' \end{array}\right\} \longrightarrow \sigma(x,x') \leqslant \tau(y,y') \\ \left.\begin{array}{l} x R y \\ \alpha_\sigma(x) \leqslant \tau(y,y') \end{array}\right\} \longrightarrow x R y' \end{array}\right.$$

* La composition des morphismes est donnée par :

Etant donné $(X,\sigma) \xrightarrow{R} (Y,\tau) \xrightarrow{S} (Z,\rho)$:

$$x \; SR \; z \leftrightarrow \exists\, y \in Y,\ \exists\, z' \in Z, \left\{\begin{array}{l} x R y \\ y S z' \\ \alpha_\sigma(x) \leqslant \rho(z,z') \end{array}\right.$$

* <u>Remarques</u>.

a). Le morphisme identité de (X,σ) est la relation i définie par $x \; i \; x' \leftrightarrow \sigma(x,x') = \alpha_\sigma(x)$.

b). i est un préordre sur X.

En effet,

$\sigma(x,x) = \alpha_\sigma(x)$

Si $\sigma(x,y) = \alpha_\sigma(x)$ et $\sigma(y,z) = \alpha_\sigma(y)$,

$\sigma(x,z) \geqslant \sigma(x,y) \wedge \sigma(y,z) = \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(y)$,

mais puisque $\alpha_\sigma(x) = \sigma(x,y) \leqslant \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(y)$,

$\sigma(x,z) \geqslant \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(y) = \alpha_\sigma(x)$ et $\sigma(x,z) = \alpha_\sigma(x)$.

(4). Catégorie JTF_e (cf. Ponasse [2], cf. Blanc).

* C'est la sous-catégorie pleine de JTF dont les objets sont les ensembles totalement flous "égalitaires", c'est-à-dire les (X,σ) tels que :

$\sigma(x,y) = \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_\sigma(y) \longrightarrow x = y.$

§ 2 - RAPPEL DE RESULTATS CONNUS.

* Les catégories $\mathcal{S}(J)$ et $\mathcal{F}(J)$ sont équivalentes (cf. [5]). Ce sont des Topoï.

* Si J est un anti-ordinal, les catégories $\mathcal{S}(J)$ et JTF sont équivalentes (cf. [3]). JTF est donc également un topos lorsque J est un anti-ordinal.

§ 3 -

PROPOSITION 1.

Pour tout treillis de Heyting J, la catégorie $\mathcal{F}(J)$ est équivalente à une sous-catégorie pleine de la catégorie JTF.

Preuve. a). On définit un foncteur A de $\mathcal{F}(J)$ dans JTF par :

$$A(F) = (X_F, \sigma_F), \text{ où } \begin{cases} X_F = \coprod_{i \in J} F(i) \quad \text{(réunion disjointe)} \\ \sigma_F(x,x') = \bigvee\{k \in J \ / \ x|_k = x'|_k\} \end{cases} \tag{1}$$

Si τ est une transformation naturelle de F dans G : $A(\tau)$ est la relation de X_F vers X_G définie par :

si $x \in F(i)$ et $y \in G(j)$: $x\, A(\tau)\, y \leftrightarrow i \leqslant j$ et $\tau_i(x) = y|_i$ (2)

* En effet, $A(F)$ est un ensemble totalement flou, comme le montre Higgs dans [5] (les objets de JTF et de $\mathcal{S}(J)$ sont les mêmes).

* Montrons que la relation $A(\tau)$ définie par (2) est un morphisme de (X_F, σ_F) dans (X_G, σ_G).

Si $x \in X_F$, $A(\tau)\, x \neq \emptyset$, car si $x \in F(i)$ on a $x\, A(x)\ \tau_i(x)$.

Si $x\, A(\tau)\, y$ et $x'\, A(\tau)\, y'$: supposons que $x \in F(i)$, $y \in G(j)$, $x' \in F(i')$, $y' \in G(j')$; on a $i \leqslant j$, $\tau_i(x) = y|_i$, $i' \leqslant j'$, $\tau_{i'}(x') = y'|_{i'}$. Alors, si $x|_k = x'|_k$: $y|_k = (y|_i)|_k = \tau_i(x)|_k = \tau_k(x|_k) = \tau_k(x'|_k) =$

$$= \tau_{i'}(x')|_k = (y'|_{i'})|_k = y'|_k,$$

de sorte que :

$$\sigma_F(x,x') = \bigvee\{k \in J \ /\ x|_k = x'|_k\} \leqslant \bigvee\{\ell \in J \ /\ y|_\ell = y'|_\ell\} = \sigma_G(y,y').$$

D'autre part, rappelons que si F est un faisceau, si $y \in F(i)$, $y' \in F(i')$, si K est une partie de J (formée d'éléments inférieurs à $i \wedge i'$) telle que $y|_k = y'|_k$ pour tout $k \in K$, et si $k_o = \bigvee K$, alors $y|_{k_o} = y'|_{k_o}$: en effet, pour tout $k \in K$: $y_k = y|_k = y'|_k$; puisque pour tout $\ell \in K$ on a $y_k|_{k\wedge\ell} = (y|_k)|_{k\wedge\ell} = y|_{k\wedge\ell} = (y|_\ell)|_{k\wedge\ell} = y_\ell|_{k\wedge\ell}$, il existe un unique $y_o \in F(k_o)$ tel que $\forall\, k \in K$: $y_o|_k = y_k$, d'où il résulte que $y|_{k_o} = y'|_{k_o}$ $(= y_o)$. [Cette remarque sera évoquée comme remarque $\mathcal{R}$].

Supposons alors que $x\, A(\tau)\, y$ et $\alpha_{\sigma_F}(x) \leqslant \sigma_G(y,y')$; supposons que $x \in F(i)$, $y \in G(j)$, $y' \in G(j')$, et donc $i \leqslant j$, $\tau_i(x) = y|_i$, $i \leqslant \bigvee\{k \in J \ /\ y|_k = y'|_k\} = k_o$. Il est clair que $i \leqslant j'$, que -d'après la remarque $\mathcal{R}$- $y|_{k_o} = y'|_{k_o}$, d'où $y|_i = (y|_{k_o})|_i = (y'|_{k_o})|_i = y'|_i$, mais alors $\tau_i(x) = y|_i = y'|_i$, et par suite $x\, A(\tau)\, y'$.

* Montrons que $A(1_p) = 1_{(X_F\,,\,\sigma_F)}$:

Si $x \in F(i)$ et $x' \in F(i')$, $x\, A(1_F)\, x' \leftrightarrow i \leqslant i'$ et $x = x'|_i$

or $x\, 1_{(X_F\,,\,\sigma_F)}\, x' \leftrightarrow \sigma_F(x,x') = \alpha_{\sigma_F}(x) \leftrightarrow i = \bigvee\{k \in J\ /\ x|_k = x'|_k\}$

$\leftrightarrow x = x'|_i$ (d'après la remarque $\mathfrak{R}$).

* Montrons que si τ est une transformation naturelle de F dans G et λ une transformation naturelle de G dans H, $A(\lambda\tau) = A(\lambda)\, A(\tau)$.

Si $x \in F(i)$ et $z \in H(k)$:

$x\, A(\lambda\tau)\, z \leftrightarrow i \leqslant k$, et $(\lambda\tau)_i(x) = z|_i \leftrightarrow i \leqslant k$, et $\lambda_i\, \tau_i(x) = z|_i$

$x\, A(\lambda)\, A(\tau)\, z \leftrightarrow \exists\, y \in X_G$ (c'est-à-dire

$\exists\, j \in J$, $\exists\, y \in G(j)$), $\exists\, z' \in H(k')$, $\left|\begin{array}{l} i \leqslant j,\ \tau_i(x) = y|_i \\ j \leqslant k',\ \lambda_j(y) = z'|_j \\ i \leqslant \bigvee\{\ell \in J\ /\ z|_\ell = z'|_\ell\} = \ell_o \end{array}\right.$

Il est clair que si $x\, A(\lambda\tau)\, z$, alors $x\, A(\lambda)\, A(\tau)\, z$ (on prend $y = \tau_i(x)$ et $z' = z$).

Inversement, supposons que $x\, A(\lambda)\, A(\tau)\, z$. D'après la remarque $\mathfrak{R}$, $z|_{\ell_o} = z'|_{\ell_o}$; d'où a fortiori $z|_i = z'|_i$.
Alors $\lambda_i\, \tau_i(x) = \lambda_i(y|_i) = \lambda_j(y)|_i = (z'|_j)|_i = z'|_i = z|_i$, et d'autre part $i \leqslant k$. D'où $x\, A(\lambda\tau)\, z$.

b). Ainsi A est-il un foncteur de $\mathcal{F}(J)$ dans la sous-catégorie pleine JTF^* de JTF dont les objets sont les $(X_F\,,\,\sigma_F)$.

On définit d'une part un foncteur B de JTF^* dans $\mathcal{F}(J)$ par :

$B(X,\sigma) = F$ défini par $F(i) = \{x \in X\ /\ \alpha_{\sigma_F}(x) = i\}$ (3)

Si R est un morphisme de (X,σ) dans (Y,τ), $B(R)$ est la transformation naturelle de $B(X,\sigma)$ dans $B(Y,\tau)$ définie par : "$\forall\, i \in J$, $B(R)_i$ est l'application de $B(X,\sigma)(i)$ dans $B(Y,\tau)(i)$ définie par : $B(R)_i(x) = y|_i$, où y est un élément quelconque de Y tel que $x\,R\,y$". (4)

* En effet, comme le remarque Higgs dans [5], F est un faisceau, $x|_i$ (pour $i \leqslant \alpha_\sigma(x)$) est l'unique élément y de X tel que $\sigma(x,y) = \alpha_\sigma(y) = i$; et par ailleurs $\sigma(x,x') = \bigvee \{k \in J \,/\, x|_k = x'|_k$.

* Alors $B(R)_i$ est bien définie par (4), car si $x R y$ et $x R y'$ ($x \in B(X,\sigma)(i)$), on a :

$i \leqslant \tau(y,y') = \bigvee \{k \in J \,/\, y|_k = y'|_k\}$ et il résulte de la remarque $\mathcal{R}$ que $y|_i = y'|_i$.

D'autre part les $(B(R)_i)_{i \in J}$ déterminent une transformation naturelle $B(R)$ de $F = B(X,\sigma)$ dans $G = B(Y,\tau)$, comme cela résulte aisément des remarques suivantes :

Si R est un morphisme de (X,σ) (objet de JTF^* auquel on associe le faisceau F par (3)) dans (Y,τ) (objet de JTF^* auquel on associe G par (3)) :

a). Si $x \in F(i)$, $x R y$, $y \in G(j)$, alors $i \leqslant j$

b). dans les conditions de a), $x R y|_i$, car $\alpha_\sigma(x) = i \leqslant \tau(y\,,\, y|_i)$

De sorte que si $x \in F(i)$, il existe un élément $y \in G(i)$ tel que $x R y$.

c). Si $x \in F(i)$, il existe un unique $y \in G(i)$ tel que $x R y$ (car $x R y$, $x R y'$, $x \in F(i)$, $y \in G(i)$, $y' \in G(i) \longrightarrow i \leqslant \tau(y,y') =$

$$= \bigvee \{k \in J \,/\, y|_k = y'|_k\},$$

ce qui entraîne -d'après la remarque $\mathcal{R}$- que $y|_i = y'|_i$, donc que $y = y'$).

Alors $B(R)_i(x)$ est cet unique y.

d). Si $x \in F(i)$, $y \in G(i)$, $x R y$, et si $i_1 \leqslant i$: alors $x|_{i_1} R\, y|_{i_1}$ (car si z est l'unique élément de $G(i_1)$ tel que $x|_{i_1} R\, z$, $i_1 = \sigma(x,x|_{i_1}) \leqslant \tau(y,z) = \bigvee \{k \in J \,/\, y|_k = z|_k\}$, et -d'après la remarque $\mathcal{R}$- $z = z|_{i_1} = y|_{i_1}$).

Cela montre que si $i_1 \leqslant i$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] & F(i) \arrow[r, "B(R)_i"] \arrow[d] & G(i) \arrow[d] & y \arrow[d, mapsto] \\ x|_{i_1} & F(i_1) \arrow[r, "B(R)_j"] & G(i_1) & y|_{i_1} \end{tikzcd}$$

commute.

* Il est évident que $B(1_{(X,\sigma)})_i = 1_{F(i)}$ pour tout $i \in J$.

* Soit la situation suivante : $(X,\sigma) \xrightarrow{R} (Y,\tau) \xrightarrow{S} (Z,\rho)$, où (X,σ), (Y,τ) et (Z,ρ) sont des objets de JTF^* auxquels sont respectivement associés -par (3)- les faisceaux F,G,H.

Soit $i \in J$:

d'après c), $(B(S)\ B(R))_i = B(S)_i\ B(R)_i$ est l'application composée de
$$F(i) \longrightarrow G(i)$$
$$x \longmapsto \text{l'unique } y \text{ de } G(i) \text{ tel que } xRy,$$
avec
$$G(i) \longrightarrow H(i)$$
$$y \longmapsto \text{l'unique } z \in H(i) \text{ tel que } ySz\ ;$$
tandis que $B(SR)_i$ est l'application
$$F(i) \longrightarrow H(i)$$
$$x \longmapsto \text{l'unique } t \in H(i) \text{ tel que } x\,sR\,t$$

mais xRy et $ySz \longrightarrow x\ S\circ R\ z \longrightarrow x\ SR\ z$

tandis que, d'après c),

$$\left.\begin{array}{l} x\ SR\ z \\ x\ SR\ t \\ x \in F(i),\ z \in H(i),\ t \in H(i) \end{array}\right\} \longrightarrow z = t. \text{ D'où } B(SR) = B(S)\ B(R).$$

c). Les foncteurs (A,B) définissent une équivalence entre les catégories $\mathcal{F}(J)$ et JTF^* :

* Soit F un faisceau sur J ; soit $(X,\sigma) = A(F)$ et soit $G = B\,A(F) = B(X,\sigma)$. Il est facile de remarquer qu'il existe un isomorphisme naturel de F dans G (F et G ne sont pas nécessairement égaux dans la mesure où les ensembles $(F(i))_{i \in J}$ ne sont pas nécessairement 2 à 2 disjoints).

* Soit (X,σ) un objet de JTF^* ; soit $F = B(X,\sigma)$ et soit $(Y,\tau) = (A(F)$. Il est clair que $(Y,\tau) = (X,\sigma)$.

§ 4 - <u>RAPPEL DE RESULTATS OBTENUS</u> (cf. Higgs [5]).

Soit (X,σ) un ensemble totalement flou. On a déjà introduit le préordre $x\ i\ y \leftrightarrow \sigma(x,y) = \alpha(x)$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un faisceau F sur J tel que $(X,\sigma) = (X_F , \sigma_F)$ est que :

(i). i est un ordre sur X [c'est-à-dire,
$\sigma(x,y) = \alpha_\sigma(x) = \alpha_\sigma(y) \longrightarrow x = y$]

(ii). Pour tout $x \in X$, pour tout $i < \alpha_\sigma(x)$, il existe un élément de X tel que $y\ i\ x$ et $\alpha_\sigma(y) = i$

(iii). Pour toute famille $(x_k)_{k \in K}$ d'éléments de X "compatible" [c'est-à-dire $\forall\, k' , k'' \in K : \sigma(x_{k'} , x_{k''}) = \alpha_\sigma(x_{k'}) \wedge \alpha_\sigma(x_{k''})$], il existe un élément x de X tel que :

$$\left|\begin{array}{l} \forall\, k \in K : x_k\ i\ x \\ (\forall\, k \in K : x_k\ i\ z) \longrightarrow (x\ i\ z) \end{array}\right.$$

[c'est-à-dire $x = \bigvee_{k \in K} x_k$, au sens du préordre i).

<u>Remarques</u>.

* Intuitivement, si on a (i), (ii) et (iii), l'élément y évoqué en (ii) est unique (à cause de (i)) et peut être conçu comme $x|_i$, ce qui permet d'envisager (X,σ) comme un préfaisceau, et en fait -grâce à (iii)- comme un faisceau.

* Tout objet de JTF_e vérifie trivialement (iii).

§ 5 - QUELQUES RESULTATS.

PROPOSITION 2.

Pour tout treillis complet J,

tout objet de JTF est isomorphe à un objet de JTF vérifiant (i).

Preuve. Soit (X,σ) un objet de JTF.

* On introduit sur X l'équivalence

$x \equiv y \leftrightarrow x\ i\ y$ et $y\ i\ x \leftrightarrow \sigma(x,y) = \alpha_\sigma(x) = \alpha_\sigma(y)$.

Soit $\tilde{X} = X_{/\equiv}$. Soit $\tilde{x}$ la classe d'équivalence de x.

On remarque que $x \equiv y$ et $x' \equiv y' \longrightarrow \sigma(x,x') = \sigma(y,y')$: on pose donc :

$\tilde{\sigma}(\tilde{x},\tilde{x}') = \sigma(x,x')$.

On vérifie aisément que $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$ est un objet de JTF qui vérifie (i).

* On définit une relation R de X vers $\tilde{X}$ par $x R \tilde{y} \leftrightarrow x\ i\ y$: on vérifie aisément que c'est un morphisme de (X,σ) dans $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$.

* On définit une relation S de $\tilde{X}$ vers X par $\tilde{x} S y \leftrightarrow x\ i\ y$: on vérifie aisément que c'est un morphisme de $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$ dans (X,σ) et que :

$$\begin{cases} x\ SR\ x' \leftrightarrow x\ i\ x' \\ \tilde{x}\ RS\ \tilde{x}' \leftrightarrow \tilde{x}\ \tilde{i}\ \tilde{x}' \end{cases}$$

Ainsi R est un isomorphisme de (X,σ) sur $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$.

PROPOSITION 3.

Pour tout treillis complet J,

tout objet de JTF est isomorphe à un objet de JTF vérifiant (ii)

Preuve. Soit (X,σ) un objet de JTF.

* Soit $U = \{(i,x) \in J \times X \,/\, i < \alpha_\sigma(x)\}$. Pour chaque $(i,x) \in U$, on adjoint

à X un nouvel élément x_i (les $(x_i)_{(x,i)\in U}$ étant supposés 2 à 2 distincts) : on obtient ainsi un surensemble $\hat{X}$ de X.

* On prolonge σ à $\hat{X}\times\hat{X}$ en posant :

$$\left|\begin{array}{l}\hat{\sigma}(x\,,\,y_j) = \hat{\sigma}(y_j\,,\,x) = j \wedge \sigma(x,y)\\ \hat{\sigma}(x_i\,,\,y_j) = i \wedge j \wedge \sigma(x,y).\end{array}\right.$$

Il est aisé de constater que $(\hat{X},\hat{\sigma})$ est un objet de JTF.

* En particulier : $\alpha_{\hat{\sigma}}(x_i) = i \wedge \alpha_\sigma(x) = i$. Ce qui montre que $(\hat{X},\hat{\sigma})$ vérifie (ii).

* Soit R la relation de X vers $\hat{X}$ définie par :

Si $x \in X$ et si $z \in \hat{X}$, $x R z \leftrightarrow z \in X$ et $\sigma(x,z) = \alpha_\sigma(x)$.

Une démonstration simple montre que R est un morphisme de (X,σ) dans $(\hat{X},\hat{\sigma})$.

* Soit S la relation de $\hat{X}$ vers X définie par :

Si $z \in \hat{X}$ et si $x \in X$, $z S x \leftrightarrow \left|\begin{array}{l} z \in X \text{ et } \sigma(z,x) = \alpha_\sigma(z)\\ \text{ou}\\ z \in \hat{X}-X,\ z = y_i (y \in X\,,\, i < \alpha_\sigma(y)),\\ \text{et } i \leqslant \sigma(x,y).\end{array}\right.$

S est un morphisme de $(\hat{X},\hat{\sigma})$ dans (X,σ). En effet,

$$S_z \neq \emptyset \text{ car } \left|\begin{array}{l}\text{si } z \in X : z S z\\ \text{si } z = x_i \in \hat{X}-X : z S x.\end{array}\right.$$

On remarque alors que $z S x \leftrightarrow \hat{\sigma}(z,x) = \alpha_{\hat{\sigma}}(z)$.

Si $\left|\begin{array}{l} z S t\\ z' S t'\end{array}\right|$ on a de toute façon $\left|\begin{array}{l}\hat{\sigma}(z,t) = \alpha_{\hat{\sigma}}(z)\\ \hat{\sigma}(z'\,,\,t') = \alpha_{\hat{\sigma}}(z')\end{array}\right.$

D'où $\sigma(t,t') = \hat{\sigma}(t,t') \geqslant \hat{\sigma}(z,z')$.

$$\text{Si}\quad \left.\begin{array}{l} z\,S\,t \\ \alpha_{\hat\sigma}(z) \leqslant \sigma(t,\ell) \end{array}\right| \quad \alpha_{\hat\sigma}(z) = \hat\sigma(z,t) \leqslant \sigma(t,\ell)\ ;$$

d'où $\hat\sigma(z,\ell) \geqslant \hat\sigma(z,t) \wedge \sigma(t,\ell) = \alpha_{\hat\sigma}(z)$.

de sorte que $\hat\sigma(z,\ell) = \alpha_{\hat\sigma}(z)$ et $z\,S\,\ell$.

* Si $x, x' \in \hat X$; $x\ SR\ x' \leftrightarrow \sigma(x,x') = \alpha_\sigma(x)$:

En effet,

$$x\ SR\ x' \leftrightarrow \exists\, z \in X,\ \exists\, x'' \in X,\ \left|\begin{array}{l} x\,R\,z \\ z\,S\,x'' \qquad\qquad (0) \\ \alpha_\sigma(x) \leqslant \sigma(x', x'') \end{array}\right.$$

Supposons $\sigma(x,x') = \alpha_\sigma(x)$. On a alors (0) avec $z = x$ et $x'' = x'$.

Inversement, supposons que $x\ SR\ x'$. On a donc (0). Alors :

$\sigma(x,x') \geqslant \hat\sigma(x,z) \wedge \hat\sigma(z,x'') \wedge \sigma(x'', x') = \alpha_\sigma(x) \wedge \alpha_{\hat\sigma}(z) \wedge \sigma(x', x'') = \alpha_\sigma(x)$,

de sorte que $\sigma(x,x') = \alpha_\sigma(x)$.

* Si $z,z' \in \hat X$: $z\ RS\ z' \leftrightarrow \hat\sigma(z,z') = \alpha_{\hat\sigma}(z)$:

En effet,

$$z\ RS\ z' \leftrightarrow \exists\, x \in X,\ \exists\, z'' \in \hat X,\ \left|\begin{array}{l} z\,S\,x \\ x\,R\,z'' \qquad\qquad (00) \\ \alpha_{\hat\sigma}(z) \leqslant \hat\sigma(z', z'') \end{array}\right.$$

Supposons $\hat\sigma(z,z') = \alpha_{\hat\sigma}(z)$.

Si $z \in X$, on a (00) avec $x = z$ et $z'' = z'$.

Si $z = y_i \in \hat X - X$ et $z' \in X$, on a $\hat\sigma(y_i , z') = \alpha_{\hat\sigma}(y_i)$,

$$\text{c'est-à-dire}\ \left|\begin{array}{l} i < \alpha_\sigma(y) \\ i \wedge \sigma(y,z') = i,\ \text{c'est-à-dire}\ \ i \leqslant \sigma(y,z') \end{array}\right.$$

On a alors (00) avec $x = z'$ et $z'' = z'$.

Si $z = y_i \in \hat X - X$ et $z' = y'_{i'} \in \hat X - X$, on a :

$$\left|\begin{array}{l} i < \alpha_\sigma(y),\quad i' < \alpha_\sigma(y') \\ \hat\sigma(y_i , y'_{i'}) = \alpha_{\hat\sigma}(y_i),\ \text{c'est-à-dire}\ \ i \wedge i' \wedge \sigma(y,y') = i. \end{array}\right.$$

On a alors (00) avec $x = y$ et $z' = y$.

Inversement, supposons que $z \, RS \, z'$. On a donc (00). Alors :

$\hat{\sigma}(z,z') \geqslant \hat{\sigma}(z,x) \wedge \hat{\sigma}(x,z'') \wedge \hat{\sigma}(z'',z') \geqslant \hat{\alpha}_{\hat{\sigma}}(z) \wedge \alpha_{\sigma}(x) \wedge \hat{\alpha}_{\hat{\sigma}}(z) = \hat{\alpha}_{\hat{\sigma}}(z)$,

de sorte que $\sigma(z,z') = \hat{\alpha}_{\hat{\sigma}}(z)$.

* Ainsi R est-il un isomorphisme de (X,σ) sur $(\hat{X},\hat{\sigma})$.

<u>Remarque</u>.

Même si (X,σ) vérifie (i), il n'en est peut être plus de même de $(\hat{X},\hat{\sigma})$ [songer au cas où $i < \alpha_{\sigma}(x)$ et où il y a déjà dans X un élément y tel que $\alpha_{\sigma}(y) = i$].

<u>PROPOSITION 4</u>.

Pour tout treillis complet J, tout objet de JTF est isomorphe à un objet de JTF vérifiant (i) et (ii).

<u>Preuve</u>.

* Soit (X,σ) un objet de JTF vérifiant (ii). Alors $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$ vérifie également (ii) (preuve immédiate).

* Ainsi, tout objet (X,σ) de JTF est-il isomorphe à un objet de JTF vérifiant (i) et (ii), à savoir $(\tilde{\hat{X}},\tilde{\hat{\sigma}})$.

<u>Remarque</u>.

Cela ne veut pas dire que JTF soit équivalente à la catégorie des préfaisceaux sur J : pour construire un foncteur qui associe à un préfaisceau F sur J un objet de JTF, on a réellement besoin du fait que F soit un faisceau (voir la remarque $\mathbb{R}$). D'ailleurs, pour J anti-ordinal, JTF est un topos, alors que ce n'est pas le cas de la catégorie des préfaisceaux sur J.

§ 6 - QUELQUES RESULTATS LORSQUE J EST UN ANTI-ORDINAL.

PROPOSITION 5.

Lorsque J est un anti-ordinal, tout objet de JTF est isomorphe à un objet de JTF vérifiant (iii).

Preuve. Soit (X,σ) un objet de JTF (J *étant pour l'instant un treillis de Heyting complet quelconque*).

* Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des familles $(x_k)_k$ d'éléments de X telles que $\forall\ k', k'' : \sigma(x_{k'}, x_{k''}) = \alpha_\sigma(x_{k'}) \wedge \alpha_\sigma(x_{k''})$, c'est-à-dire l'ensemble des familles "compatibles" d'éléments de X.

A chaque $(x_k)_k \in \mathfrak{C}$, on adjoint un nouvel élément à X : x. On écrira $x/_{(x_k)_k}$ pour rappeler que x est l'élément ajouté à X à partir de la famille compatible $(x_k)_k$. On suppose en outre que les éléments adjoints ainsi à ceux de X sont deux à deux distincts. Soit $\check{X}$ l'ensemble ainsi obtenu.

* On prolonge σ à $\check{X}$ en posant :

si $u \in X$, si $x/_{(x_k)_k} \in \check{X}-X : \check{\sigma}(u,x) = \check{\sigma}(x,u) = \sigma(u,x_k)$

si $x/_{(x_k)_k}$ et $y/_{(y_\ell)_\ell}$ sont des éléments de $\check{X}-X : y(x,y) = \bigvee_{k,\ell} \sigma(x_k, y_\ell)$

$(\check{X},\check{\sigma})$ *est un objet de* JTF : en effet,

la symétrie de $\check{\sigma}$ est évidente.

Montrons que si $z,t,\ell \in \check{X} : \check{\sigma}(z,t) \wedge \check{\sigma}(t,\ell) \leqslant \check{\sigma}(z,\ell)$:

si $z,t,\ell \in X$, c'est évident

si par exemple $z/_{(z_k)} \in \check{X}-X,\ t \in X,\ \ell \in X$:

$$\check{\sigma}(z,t) \wedge \check{\sigma}(t,\ell) = \bigvee_k \sigma(z_k,t) \wedge \sigma(t,\ell) = \bigvee_k [\sigma(z_k,t) \wedge \sigma(t,\ell)] \leqslant \bigvee_k \sigma(z_k,\ell) = \check{\sigma}(z,\ell)$$

car J est un treillis de Heyting complet.

si $t/_{(t_h)} \in \check{X}-X$ et si $z \in X,\ \ell \in X$:

$$\check{\sigma}(z,t) \wedge \check{\sigma}(t,\ell) = \bigvee_h \sigma(z,t_h) \wedge \bigvee_h \sigma(t_h,\ell) = \bigvee_{h_1,h_2} [\sigma(z,t_{h_1}) \wedge \sigma(t_{h_2},\ell)] =$$

$$= \bigvee_{h_1,h_2} [\sigma(z,t_{h_1}) \wedge \alpha_\sigma(t_{h_1}) \wedge \alpha_\sigma(t_{h_2}) \wedge \sigma(t_{h_2},\ell)] = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots = \bigvee [\sigma(z,t_{h_1}) \wedge \sigma(t_{h_1},t_{h_2}) \wedge \sigma(t_{h_2},\ell)] \leqslant \sigma(z,\ell)$$

car (t_h) étant compatible : $\sigma(t_{h_1},t_{h_2}) = \alpha_\sigma(t_{h_1}) \wedge \alpha_\sigma(t_{h_2})$.

de même si $z/_{(z_k)} \in \check{X}-X$, $\ell/_{(\ell_h)} \in \check{X}-X$ et $t \in X$.

Enfin, si $z/_{(z_k)} \in \check{X}-X$, $t/_{(t_h)} \in \check{X}-X$ et $\ell/_{(\ell_p)} \in \check{X}-X$, les mêmes arguments (treillis de Heyting complet et définition d'une partie compatible) permettent d'écrire que :

$$\check{\sigma}(z,t) \wedge \check{\sigma}(t,\ell) = \bigvee_{k,h} \sigma(z_k,t_h) \wedge \bigvee_{h,p} \sigma(t_h,\ell_p) = \bigvee_{k,h_1,h_2,p} [\sigma(z_k,t_{h_1}) \wedge \sigma(t_{h_2},\ell_p)] =$$

$$\ldots = \bigvee_{k,h_1,h_2,p} [\sigma(z_k,t_{h_1}) \wedge \alpha_\sigma(t_{h_1}) \wedge \alpha_\sigma(t_{h_2}) \wedge \sigma(t_{h_2},\ell_p)] =$$

$$\ldots = \bigvee_{k,h_1,h_2,p} \sigma(z_k,t_{h_1}) \wedge \sigma(t_{h_1},t_{h_2}) \wedge \sigma(t_{h_2},\ell_p)] \leqslant \bigvee_{k,p} \sigma(z_k,\ell_p) = \check{\sigma}(z,\ell).$$

* En particulier : pour tout $x/_{(x_k)} \in \check{X}-X$: $\alpha_{\check{\sigma}}(x) = \bigvee_k \alpha_\sigma(x_k)$.

* <u>*Si* J *est un anti-ordinal,* $(\check{X},\check{\sigma})$ *vérifie* (iii).</u>

Soit une partie compatible de $(\check{X},\check{\sigma})$ formée

| d'éléments de X : $x_{k'}, x_{k''}, \ldots$
| d'élément de $\check{X}-X$: $y/_{(y_\ell)}, z/_{(z_p)}, \ldots$

<u>Remarque.</u>

Si J est un ordinal, si ℓ_1, p_1 sont tels que

$(y_{\ell_1}, z_{p_1}) = \bigvee_{\ell,p} \sigma(y_\ell, z_p)$, alors $\sigma(y_{\ell_1}, z_{p_1}) = \alpha_\sigma(y_{\ell_1}) \wedge \alpha_\sigma(z_{p_1})$.

En effet,

$$\bigvee_{\ell,p} \sigma(y_\ell,z_p) = \sigma(y_{\ell_1},z_{p_1}) \leqslant \alpha_\sigma(y_{\ell_1}) \wedge \alpha_\sigma(z_{p_1}) \leqslant \bigvee_\ell \alpha_\sigma(y_\ell) \wedge \bigvee_p \alpha_\sigma(z_p) = \ldots$$

$$\ldots = \alpha_{\check{\sigma}}(y) \wedge \alpha_{\check{\sigma}}(z) = \check{\sigma}(y,z) = \bigvee_{\ell,p} \sigma(y_\ell,z_p).$$

Ainsi la famille $x_{k'}, x_{k''}, \ldots, y_{\ell_1}, z_{p_1}, \ldots$ est-elle compatible dans (X,σ) : on lui adjoint $\xi \in \check{X}-X$. Montrons que ξ est la borne supérieure dans $(\check{X},\check{\sigma})$ de la partie compatible de $(\check{X},\check{\sigma})$ donnée : cela résulte tout simplement de ce que y_{ℓ_1} est la borne supérieure des (y_ℓ) lorsque $y/_{(y_\ell)} \in \check{X}-X$.

* *A nouveau, supposons seulement que* J *soit un treillis de Heyting complet :*

On définit une relation R de X vers $\check{X}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } u \in X, \text{ si } v \in X : u\,R\,v \leftrightarrow \sigma(u,v) = \alpha_\sigma(u) \\ \text{si } u \in X, \text{ si } x/_{(x_k)_k} \in \check{X}-X : x\,R\,x \leftrightarrow \bigvee_k \sigma(u,x_k) = \alpha_\sigma(u) \end{cases}$$

R est un morphisme de (X,σ) dans $(\check{X},\check{\sigma})$.

En effet, remarquons que dans tous les cas $u\,R\,z \leftrightarrow \check{\sigma}(u,z) = \alpha_\sigma(u)$.

$Ru \neq \emptyset$ car $u\,R\,u$.

Supposons :

$\left.\begin{array}{l} u\,R\,z \\ u'\,R\,z' \end{array}\right|$. Alors $\check{\sigma}(u,z) = \alpha_\sigma(u)$ et $\check{\sigma}(u',z') = \alpha_\sigma(u')$. D'où $\sigma(u,u') \leqslant \check{\sigma}(z,z')$.

Supposons :

$\left.\begin{array}{l} u\,R\,z \\ \alpha_\sigma(u) \leqslant \check{\sigma}(z,z') \end{array}\right|$. Alors $\check{\sigma}(u,z') \geqslant \check{\sigma}(u,z) \wedge \check{\sigma}(z,z') = \alpha_\sigma(u)$.

D'où $\check{\sigma}(u,z') = \alpha_\sigma(u)$ et $u\,R\,z'$.

On définit une relation S de $\check{X}$ vers X par :

$$\begin{array}{l} \text{si } u \in X \text{ et si } v \in X : u\,S\,v \leftrightarrow \sigma(u,v) = \alpha_\sigma(u) \\ \text{si } x/_{(x_k)_k} \in \check{X}-X \text{ et si } v \in X : x\,S\,v \leftrightarrow \bigvee_k \sigma(x_k,v) = \bigvee_k \alpha_\sigma(x_k). \end{array}$$

S est un morphisme de $(\check{X},\check{\sigma})$ dans (X,σ) *lorsque* J *est un anti-ordinal.*

En effet, remarquons que dans tous les cas $z\,S\,v \leftrightarrow \check{\sigma}(z,v) = \alpha_{\check{\sigma}}(z)$.

$Sx \neq \emptyset$ car J étant un antiordinal, si $\alpha_\sigma(x_{k_1}) = \bigvee_k \alpha_\sigma(x_k)$, on a $x\,S\,x_{k_1}$.

Supposons :

$\left.\begin{array}{l} z\,S\,v \\ z'\,S\,v' \end{array}\right|$. Alors $\check{\sigma}(z,v) = \alpha_{\check{\sigma}}(z)$ et $\check{\sigma}(z',v') = \alpha_{\check{\sigma}}(z')$. De sorte que $\check{\sigma}(z,z') \leqslant \sigma(v,v')$

Supposons :

$\left.\begin{array}{l} z\,S\,v \\ \alpha_{\overset{\vee}{\sigma}}(z) \leqslant \sigma(v,v') \end{array}\right|$. Alors $\overset{\vee}{\sigma}(z,v') \geqslant \overset{\vee}{\sigma}(z,v) \wedge \sigma(v,v') = \alpha_{\overset{\vee}{\sigma}}(z) \wedge \sigma(v,v') = \alpha_{\overset{\vee}{\sigma}}(z)$,

de sorte que $\overset{\vee}{\sigma}(z,v') = \alpha_{\overset{\vee}{\sigma}}(z)$ et $z\,S\,v'$.

PROPOSITION 6.

Lorsque J *est un anti-ordinal,* tout objet de JTF est isomorphe à un objet de JTF vérifiant (i), (ii), (iii).

Preuve. 1). *Lorsque* J *est une chaîne complète*, si (X,σ) vérifie (ii), il en est de même de $(\overset{\vee}{X},\overset{\vee}{\sigma})$.

En effet, soit $z \in \overset{\vee}{X}$ et $i < \alpha_{\overset{\wedge}{\sigma}}(z)$:

ou bien $z \in X$. Alors il existe $u \in X$ tel que $\alpha_\sigma(u) = i$ et $\sigma(u,z) = \alpha_\sigma(u)$

ou bien $z = x/_{(x_k)_k} \in \overset{\vee}{X}-X$. Alors il existe $k \in K$ tel que $i < \alpha_\sigma(x_k)$ (puisque J est une chaîne).

On sait qu'il existe $u \in X$ tel que $\alpha_\sigma(u) = i$ et $\sigma(u,x_k) = \alpha_\sigma(u)$.

Mais alors $\sigma(u,x_k) = \alpha_\sigma(u)$ et $\overset{\vee}{\sigma}(x_k,x) = \alpha_\sigma(x_k)$, d'où résulte que :

$$\overset{\vee}{\sigma}(u,x) = \alpha_\sigma(u).$$

2). *Lorsque* J *est un anti-ordinal*, tout objet (X,σ) de JTF est isomorphe à l'objet $(\overset{\tilde{\vee}}{\hat{X}},\overset{\tilde{\vee}}{\overset{\wedge}{\sigma}})$ de JTF qui vérifie (i), (ii) et (iii), comme cela résulte aisément de tout ce qui précède.

Remarques.

(1). On retrouve un résultat de Mycek (cf. [3]) : lorsque J est un anti-ordinal, les catégories JTF, $\mathcal{S}(J)$ et $\mathcal{F}(J)$ sont équivalentes [en particulier JTF est un topos].

(2). Les propositions 2,3,4 sont vraies pour n'importe quel treillis complet J.

Les catégories $\mathcal{S}(J)$ et $\mathcal{F}(J)$ sont définies avec un treillis de Heyting complet, la proposition 1 nécessite cette hypothèse.

La définition même de $(\check{X},\check{\sigma})$ nécessite que J soit un treillis de Heyting complet, mais sa bonne utilisation veut que ce soit un anti-ordinal.

§ 7 - ET LORSQUE J N'EST PAS UN ANTI-ORDINAL ?

PROPOSITION 7.

Si le treillis de Heyting complet J n'est pas une chaîne, il existe un objet de JTF qui n'est isomorphe à aucun objet de JTF vérifiant (iii).

Preuve.

* Soit J un treillis de Heyting complet qui n'est pas une chaîne.
Il existe deux éléments incomparables j et k. Soit $i = j \wedge k$ $(i < j,\ i < k)$.

* Soit $X = \{a,b\}$.
On définit un objet de JTF par :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma(a,a) = \alpha_\sigma(a) = j \\ \sigma(b,b) = \alpha_\sigma(b) = k \\ \sigma(a,b) = \sigma(b,c) = i \end{array}\right.$$

* Supposons qu'il existe un isomorphisme R de (X,σ) sur un objet (Y,τ) de JTF vérifiant (iii), et soit S l'isomorphisme réciproque : $SR = i$.

Or si $u,v \in X$: $u\ i\ v \leftrightarrow \sigma(u,v) = \alpha_\sigma(u) \leftrightarrow u = v$.

De sorte que SR est l'égalité. Montrons qu'il en est de même de $S \circ R$:
en effet, si $u,v \in X$: $u\ S\circ R\ v \rightarrow u\,SR\,v \rightarrow u = v$; et d'autre part si $u = v$, puisque $u\,SR\,u$, il existe $\left|\begin{array}{l} y \in Y \\ u' \in X \end{array}\right.$ tel que $\left|\begin{array}{l} u\,R\,y\ . \\ y\,S\,u' \\ \alpha_\sigma(u) \leqslant \sigma(u,u'). \end{array}\right.$

Mais dans l'exemple simple proposé, ce n'est pas possible que si $u'=u$, de sorte qye $u\ S\circ R\ u$.

D'où $a\ S\circ R\ a$, et il existe un élément y de Y tel que : aRy et ySa.

$b\ S\circ R\ b$, et il existe un élément z de Y tel que : bRz et zSb.

Alors :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\sigma(a) \leqslant \alpha_\tau(y) \leqslant \alpha_\sigma(a) \rightarrow \alpha_\tau(y) = \alpha_\sigma(a) = j \\ \alpha_\sigma(b) \leqslant \alpha_\tau(z) \leqslant \alpha_\sigma(b) \rightarrow \alpha_\tau(z) = \alpha_\sigma(b) = k\end{array}\right| \longrightarrow \alpha_\tau(y) \wedge \alpha_\tau(z) = j \wedge k = i.$$

$$\sigma(a,b) \leqslant \tau(y,z) \leqslant \sigma(a,b) \rightarrow \tau(y,z) = \sigma(a,b) = i = \alpha_\tau(y) \wedge \alpha_\tau(z).$$

Ainsi $\{y,z\}$ est-elle compatible dans (Y,τ). Comme (Y,τ) vérifie (iii), il existe $t \in Y$ tel que $\alpha_\tau(t) = \alpha_\tau(y) \vee \alpha_\tau(z) = j \vee k$.

$St \neq \emptyset$. Soit donc $u \in St$. $\alpha_\tau(t) \leqslant \alpha_\sigma(u)$, ce qui est impossible puisque $j \vee k > j$ et $j \vee k > k$.

Conclusion.

* Lorsque J est un anti-ordinal, les catégories $\mathcal{F}(J)$, $\mathcal{S}(J)$ et JTF sont équivalentes, et tout objet de JTF est isomorphe à un objet de JTF qui vérifie (i), (ii) et (iii). Wu Tao (cf. [6]) montre que dans le cas encore plus particulier où J est une chaîne finie tout objet de JTF est isomorphe à un objet de JTF_e [c'est-à-dire à un objet de JTF vérifiant (iii) de façon triviale, puiqu'alors les seules parties compatibles sont les parties réduites à un élément] : qu'en est-il lorsque J est un anti-ordinal infini ?

* Lorsque J n'est pas une chaîne complète, la catégorie JTF est donc "plus riche en morphismes" que les catégories $\mathcal{F}(J)$ et $\mathcal{S}(J)$.

* Il reste le cas intermédiaire -quand J est une chaîne complète sans

être un anti-ordinal- pour lequel nous n'avons pas forcément élucidé la situation. C'est hélas par exemple le cas de $J = [0,1]$.

REFERENCES.

[1]. BLANC G. :
"préfaisceaux et ensembles flous"
(non publié).

[2]. PONASSE D. :
"Remarques sur les ensembles totalement flous"
(séminaire de mathématique floue de l'Université de Lyon I : 1982-1983).

[3]. MYCEK G. :
"Deux topos isomorphes d'ensembles totalement flous"
(Thèse de Doctorat de 3° Cycle, présentée devant l'Université Lyon I : 1983).

[4]. GOLDBLATT R. :
"Topoï , the categorical analysis of logic ; studies in logic and the foundations of mathematics"
Vol.98, North-Holland publishing company, 1979.

[5]. HIGGS D. :
"Injectivity in the topos of complete Heyting algebra valued sets"
(Canadian Journal of Mathematics).

[6]. WU Tao :
"Etude détaillée du topos JTF"
(Thèse de Doctorat de 3° Cycle, présentée devant l'Université Lyon I : 1984).