TREILLIS COMPLEMENTE AU SENS DE ZADEH DANS LA THEORIE DES PARTIES FLOUES D'UN ENSEMBLE, II

Gérard Pralong

Sommaire de la seconde partie

2.1.3 Propriétés de la Z-complémentation dans le treillis $(T,\wedge,\vee)$

2.1.3.1 Opération interne de $(G,*)$ et Z-complément

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$[\ (T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$
$\forall i \in I,\ \forall a \in T : (\ a * \bar{a}_i = \bar{a}_i * a = z_i\ )\ ]$.

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow \forall i \in I,\ \forall a \in T$:
$(\ a * \bar{a}_i = a * (z_i * a') = z_i\ ) \Rightarrow \forall i \in I,\ \forall a \in T : (\ a * \bar{a}_i =$
$\bar{a}_i * a = z_i\ )$.

2.1.3.2 "Involution"

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$|\ (T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$
$\forall i \in I$:
$[\ 1)\ \forall a,b \in T : (\ \bar{a}_i = b \Leftrightarrow a = \bar{b}_i\ )$
$\quad 2)\ \forall a \in T\ \ : (\ \bar{\bar{a}}_i = a\ )\ ]]$

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow \forall i \in I$:
$[\ 1)\ \forall a,b \in T : (\ \bar{a}_i = b \Leftrightarrow z_i * a' = b \Leftrightarrow z_i * b' = a \Leftrightarrow a = \bar{b}_i\ )$
$\quad 2)\ \forall a \in T\ \ : (\ \bar{\bar{a}}_i = z_i * (\bar{a}_i)' = z_i * (z_i * a')' =$
$\qquad z_i * ((z_i)' * a) = a\ ]$.

2.1.3.3 Lois de De Morgan

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$[\ (T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$
$\forall i \in I$:
$[\ 1)\ \forall a,b \in T : (\ \overline{(a \wedge b)}_i = \bar{a}_i \vee \bar{b}_i\ )$
$\quad 2)\ \forall a,b \in T : (\ \overline{(a \vee b)}_i = \bar{a}_i \wedge \bar{b}_i\ )\ ]]$

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow \forall i \in I$:

[1) $\forall a,b \in T$: ($\overline{(a \wedge b)}_i = z_i * (a \wedge b)' = z_i * (a' \vee b') =$
$(z_i * a') \vee (z_i * b') = \bar{a}_i \vee \bar{b}_i$)

2) $\forall a,b \in T$: ($\overline{(a \vee b)}_i = z_i * (a \vee b)' = z_i * (a' \wedge b') =$
$(z_i * a') \wedge (z_i * b') = \bar{a}_i \wedge \bar{b}_i$)].

2.1.3.4 Egalité et Z-complément

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$
$\forall i \in I$:

[$\forall a,b \in T$: ($a = b \Leftrightarrow \bar{a}_i = \bar{b}_i$)]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow \forall i \in I$:

[$\forall a,b \in T$: ($a = b \Leftrightarrow a' = b' \Leftrightarrow z_i * a' = z_i * b' \Leftrightarrow \bar{a}_i = \bar{b}_i$)].

2.1.3.5 Z-complément de l'élément universel et de l'élément nul

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et
(u est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$ ou 0 est élément nul de
$(T,\wedge,\vee)$) $\Rightarrow$

[1) $\bar{u} = 0$

2) $\bar{0} = u$]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et (u est élément
universel de $(T,\wedge,\vee)$ ou 0 est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$) $\Rightarrow$ (1.1.2.3
prop. 1 et prop. 2)

[1) $0 = z * u' = \bar{u}$

2) $u = z * 0' = \bar{0}$].

2.1.3.6 Ordre de $(T,\wedge,\vee)$ et Z-complément

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$

$\forall i \in I$:

[$\forall a,b \in T$: ($a \leqslant b \Leftrightarrow \bar{b}_i \leqslant \bar{a}_i$)]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow \forall i \in I$:

[$\forall a,b \in T$: ($a \leqslant b \Leftrightarrow b' \leqslant a' \Leftrightarrow z_i * b' \leqslant z_i * a' \Leftrightarrow \bar{b}_i \leqslant \bar{a}_i$)].

2.1.3.7 Opérations internes de $(T,\wedge,\vee)$ et Z-complément

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$

$\forall i \in I$:

[1) $\forall a,b \in T$: ($\overline{(a \vee b)}_i \leqslant \overline{\bar{a}_i \vee \bar{b}_i}$)

2) $\forall a,b \in T$: ($\bar{a}_i \wedge \bar{b}_i \leqslant \overline{(a \wedge b)}_i$)]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow \forall i \in I$:

[1) $\forall a,b \in T$: ($\overline{(a \vee b)}_i = \bar{a}_i \wedge \bar{b}_i \leqslant \overline{\bar{a}_i \vee \bar{b}_i}$)

2) $\forall a,b \in T$: ($\bar{a}_i \wedge \bar{b}_i \leqslant \bar{a}_i \vee \bar{b}_i = \overline{(a \wedge b)}_i$)].

2.1.3.8 Z-complément d'un élément non nul et non universel

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et (u est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$ ou 0 est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$) $\Rightarrow$

[$\forall a \in T$: ($a \neq 0$ et $a \neq u \Leftrightarrow \bar{a} \neq u$ et $\bar{a} \neq 0$)]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et (u est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$ ou 0 est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$) $\Rightarrow$

u est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$ et 0 est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$ et $\bar{u} = 0$ et $\bar{0} = u \Rightarrow$

[$\forall a \in T$: ($a = u$ ou $a = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = 0$ ou $\bar{a} = u$) $\Leftrightarrow$ ($a \neq u$ et $a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\bar{a} \neq 0$ et $\bar{a} \neq u$)].

2.1.3.9 Inférieur et supérieur d'un élément et de son Z-complément

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est une chaîne Z-complémentée par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et (u est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$ ou 0 est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$) $\Rightarrow$

[$\forall a \in T$: ($a \neq 0$ et $a \neq u \Leftrightarrow a \wedge \bar{a} \neq 0$ et $a \vee \bar{a} \neq u$)]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est une chaîne Z-complémentée par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et (u est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$ ou 0 est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$) $\Rightarrow$ u est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$ et 0 est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$ et $\bar{u} = 0$ et $\bar{0} = u \Rightarrow$ (2.1.3.8 prop.)

[$\forall a \in T$: ($a \neq 0$ et $a \neq u \Leftrightarrow a \neq 0$ et $a \neq u$ et $\bar{a} \neq u$ et $\bar{a} \neq 0 \Leftrightarrow$ $a \wedge \bar{a} \neq 0$ et $a \vee \bar{a} \neq u$)].

2.1.4 Z-complémentation et complémentation d'un treillis $(T,\wedge,\vee)$

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis complémenté $\Rightarrow$

($\bar{a}$ étant le Z-complément de a et $\complement a$ le complément de a)

[1) $(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par z (= z_i)

2) ($\forall a \in T$: ($\bar{a} = \complement a$)) $\Leftrightarrow$ ($\forall a \in T$: ($a * \complement a = z$))

3) ($\exists a \in T$: ($\bar{a} \neq \complement a$)) $\Leftrightarrow$ ($\exists a \in T$: ($a * \complement a \neq z$))]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et $(T,\wedge,\vee)$ est complémenté $\Rightarrow$

[1) $(T,\wedge,\vee)$ a un plus grand élément u et un plus petit élément 0 $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par z (= z_i)

2) ($\forall a \in T$: ($\bar{a} = \complement a$)) $\Leftrightarrow$ ($\forall a \in T$: ($z * a' = \complement a$)) $\Leftrightarrow$ ($\forall a \in T$: ($a * \complement a = z$))

3) 3) résulte de 2)].

2.1.5 Sous-treillis d'un treillis $(T,\wedge,\vee)$ Z-complémenté

proposition : $\forall (T,\wedge,\vee)$, $\forall (S,\wedge',\vee')$, un sous-treillis de $(T,\wedge,\vee)$
[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$
et $(S,\wedge',\vee')$ est un sous-treillis de $(T,\wedge,\vee)$ stable par passage au Z-complémentaire $\Rightarrow$
$(S,\wedge',\vee')$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$]
en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$, $\forall (S,\wedge',\vee')$, un sous-treillis de $(T,\wedge,\vee)$:
$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et $(S,\wedge',\vee')$ est un sous-treillis de $(T,\wedge,\vee)$ stable par passage au Z-complémentaire $\Rightarrow$ $(S,\wedge',\vee')$ est un sous-treillis du treillis $(G,\wedge,\vee)$ et $\exists (z_i)_{i \in I}$ non vide et injective d'éléments de G : $\forall i \in I$, $\forall a \in S$: $(z_i * a' = a' * z_i \in S) \Rightarrow (S,\wedge',\vee')$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$.

2.2 Z-complémentation d'un treillis positif $(T,\wedge,\vee)$

remarque 1 :
Tout treillis positif étant un treillis, toutes les définitions, propositions et remarques sous 2.1 s'appliquent aux treillis positifs. Sont en outre vérifiées les propositions et remarques suivantes :

remarque 2 :
1) Tout treillis positif est minoré dans G; il n'admet pas nécessairement une borne inférieure ou un élément nul
2) Si e est élément nul d'un treillis, alors ce treillis est positif.

proposition 1 : $\forall (T,\wedge,\vee)$:
[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis positif Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et e est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$ $\Rightarrow$
$(T,\wedge,\vee)$ a un élément universel $u = z_i * e$ et $z\ (= z_i) = u$]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est positif et Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et e est élément nul de $(T,\wedge,\vee) \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ a un élément universel $u = z_i * e$ et $z\ (= z_i) = u$.

proposition 2 : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis positif et $(T,\wedge,\vee)$ n'est pas majoré dans G $\Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ n'est pas Z-complémenté]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est positif et $(T,\wedge,\vee)$ n'est pas majoré dans G $\Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est minoré et n'est pas majoré dans G $\Rightarrow$ (2.1.2.1 prop. 3) $(T,\wedge,\vee)$ n'est pas Z-complémenté.

remarque 3 :

Le treillis le plus largement utilisé dans la théorie des parties floues d'un ensemble est le treillis $([0,1],\wedge,\vee)$, $[0,1] \subset \mathbb{R}$; c'est donc un treillis positif Z-complémenté par + et par 1.

2.3 Z-complémentation d'un treillis négatif $(T,\wedge,\vee)$

remarque 1 :

Tout treillis négatif étant un treillis, toutes les définitions, propositions et remarques sous 2.1 s'appliquent aux treillis négatifs. En outre, les treillis négatifs vérifient les propositions et remarques suivantes :

remarque 2 :

1) Tout treillis négatif est majoré dans G; il n'admet pas nécessairement une borne supérieure ou un élément universel.

2) Si e est élément universel d'un treillis, alors ce treillis est négatif.

<u>proposition 1</u> : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis négatif Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et e est élément universel de $(T,\wedge,\vee) \Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ a un élément nul $0 = z_i * e$ et $z\ (= z_i) = 0$]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est négatif et Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et e est élément universel de $(T,\wedge,\vee) \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ a un élément nul $0 = z_i * e$ et $z\ (= z_i) = 0$.

<u>proposition 2</u> : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

[$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis négatif et $(T,\wedge,\vee)$ n'est pas minoré dans $G \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ n'est pas Z-complémenté]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$:

$(T,\wedge,\vee)$ est négatif et $(T,\wedge,\vee)$ n'est pas minoré dans $G \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est majoré et n'est pas minoré dans $G \Rightarrow$ (2.1.2.1 prop. 3) $(T,\wedge,\vee)$ n'est pas Z-complémenté.

3. CONCLUSION

Dans l'introduction, il apparaît que la complémentation au sens de Zadeh du treillis $(P(E)\tau,\cap,\cup)$, $\tau = [0,1] \subset \mathbb{R}$, de l'ensemble des parties floues d'un ensemble induit une complémentation analogue sur le treillis $([0,1],\wedge,\vee)$ et que, inversément, la complémentation selon Zadeh du treillis $([0,1],\wedge,\vee)$ implique que le treillis $(P(E)\tau,\cap,\cup)$, $\tau = [0,1] \subset \mathbb{R}$, est complémenté au sens de Zadeh.

En observant que le treillis $([0,1],\wedge,\vee)$ est un sous-treillis du treillis $(\mathbb{R},\wedge,\vee)$ associé au groupe commutatif réticulé $(\mathbb{R},+)$, il est naturel, voire naïf, d'essayer d'étendre la complémentation au sens de Zadeh à des treillis possédant toutes les propriétés du treillis $([0,1],\wedge,\vee)$, mais également à des treillis ne possédant que certaines des propriétés de ce treillis.

On est ainsi amené à complémenter au sens de Zadeh des treillis quelconques $(T,\wedge,\vee)$, chaînes ou non, sous-treillis d'un treillis $(G,\wedge,\vee)$ associé à un groupe commutatif réticulé $(G,*)$, si ces treillis vérifient certaines conditions. Il est alors possible de choisir plus largement les treillis susceptibles de définir un ensemble de parties floues d'un ensemble de manière que

1) cet ensemble de parties floues possède les propriétés algébriques de l'ensemble des $[0,1]$-parties floues d'un ensemble
2) cet ensemble puisse être muni d'une prétopologie floue ou d'une topologie floue dans des conditions semblables à celles de l'ensemble des $[0,1]$-parties floues d'un ensemble.

Il est loisible de se demander, pour terminer, ce que devient la Z-complémentation si l'on affaiblit ses conditions en considérant un sous-treillis d'un treillis associé à un groupe non commutatif ou à monoïde commutatif ou non et d'observer les propriétés de la Z-complémentation qui survivent dans de telles occurrences.

4. BIBLIOGRAPHIE

Bourbaki N. — Eléments de mathématique; algèbre, ch. 6; Hermann 1964

Kaufmann A. — Introduction à la théorie des sous-ensembles flous; éléments théoriques de base; Masson 1973

Pralong G. — Contribution à la théorie élémentaire des parties floues d'un ensemble; aspects mathématiques et ébauches d'application à l'économie mathématique; Université de Fribourg (thèse) 1983

Prévôt M. — Sous-ensembles flous; une approche théorique; IME Université de Dijon; Sirey 1977

Szász G. — Théorie des treillis; monographies universitaires de mathématiques; Dunod 1971