Josette et Jean-Louis COULON

Université LYON I - Claude Bernard
43, Boulevard du 11 novembre 1918.

69622 VILLEURBANNE - CEDEX

A PROPOS DES T-UNIFORMITES FLOUES ET DES T-ECARTS FLOUS

A Notations et introduction :

- Dans la suite, I désigne l'ensemble $[0,1]$ des réels compris entre 0 et 1
- Une norme triangulaire sur I est une application T de $I \times I$ dans I telle que

$$\begin{cases} T(\alpha,1) = \alpha \\ \alpha \leqslant \alpha' \text{ et } \beta \leqslant \beta' \to T(\alpha,\beta) \leqslant T(\alpha',\beta') \\ T(\beta,\alpha) = T(\alpha,\beta) \\ T[T(\alpha,\beta),\gamma] = T[\alpha, T(\beta,\gamma)] \end{cases}$$

Nous dirons que T vérifie BS si $T(\bigvee_{j \in J} \alpha_j, \beta) = \bigvee_{j \in J} T(\alpha_j,\beta)$

(c'est le cas par exemple des normes triangulaires ;

$T_1(\alpha,\beta) = \min(\alpha,\beta)$ et $T_m(\alpha,\beta) = \max(\alpha+\beta-1, 0)$).

- Reprenant une ancienne idée de Menger, développée en particulier par Schweizer et Sklar (cf [2] par exemple), Höhle (cf [3]) propose une définition "probabiliste" de la notion d'écart flou et de la notion d'uniformité floue. Nous allons montrer ici directement certains de ses résultats, ainsi que le fait que toute uniformité floue peut-être obtenue à partir d'une famille d'écarts flous et qu'un résultat d'A. Weil (cf [1] par exemple) dans le cas particulier où le treillis des valeurs d'appartenance est I et où l'opération binaire $\star$ est donnée par une norme triangulaire vérifiant BS.

Notons que dans [4] Höhle étudie également des problèmes de métrisabilité d'uniformités floues, cette fois lui aussi uniquement dans le cas où le treillis des valeurs d'appartenance est I et où l'opération $\star$ est donnée par une norme triangulaire continue, mais avec une définition d'uniformité floue un peu plus sophistiquée (les axiomes notés plus loin u1 et u5 diffèrent) sans doute plus en accord avec les uniformités floues selon Lowen.

Voici les notions utilisées dans ce texte :

- <u>réel flou</u> :

  un réel flou est une application ℓ de R dans I telle que

$$\left|\begin{array}{l} \bigwedge_{u \in R} \ell(u) = 0 \\ \bigvee_{u \in R} \ell(u) = 1 \\ \ell \text{ est croissante} \\ \ell \text{ est continue à gauche en tout point.} \end{array}\right.$$

Δ désignera l'ensemble des réels flous.

Un réel flou positif est un réel flou ℓ tel que $\ell(0) = 0$

Δ^+ désignera l'ensemble des réels flous positifs ; H désignera le réel flou défini par $\begin{cases} H(r) = 0 & \text{si } r \leqslant 0 \\ H(r) = 1 & \text{si } r > 0 \end{cases}$.

N.B. dans la suite, T est une norme triangulaire <u>vérifiant BS</u> donnée une fois pour toutes.

- *écart flou* : Soit X un ensemble non vide.

  Un écart flou sur X est une application d :

  $X \times X \to \Delta^+$ telle que :
  $(x,y) \to d_{xy}$

  e1) $d_{xx} = H$

  e2) $d_{yx} = d_{xy}$

  e3) $T(d_{xy}(u), d_{yz}(V)) \leqslant d_{xy}(u+v)$

un écart flou d est une *distance floue* si de plus $d_{xy} = H \to x=y$ e4)

on parlera d'espace pseudo métrique flou (resp. métrique flou) pour désigner un ensemble X muni d'un écart flou (resp. d'une distance floue).

- *Uniformité floue* : Soit X un ensemble non vide

  on appelle uniformité floue sur X toute partie non vide V de $I^{X \times X}$ telle que :

  u1) $h \in I^{X \times X}$, $k \in V$, $h \geqslant k \to h \in V$

  u2) $h,k \in V \to h \wedge k \in V$, où $(h \wedge k)(x,y) = h(x,y) \wedge k(x,y)$

  u3) $h(x,x) = 1$

  u4) $h \in V \to h^{-1} \in V$, où $h^{-1}(x,y) = h(y,x)$

  u5) $\forall h \in V, \exists k \in V$, $k \underset{T}{o} k \leqslant h$, où

  $$(k \underset{T}{o} k)(x,y) = \bigvee_{z \in X} T[k(x,z), k(z,y)]$$

B UNIFORMITE FLOUE ASSOCIEE A UNE FAMILLE D'ECARTS FLOUS

TOUTE UNIFORMITE FLOUE EST ASSOCIEE A UNE FAMILLE D'ECARTS FLOUS

• Proposition 1 :

Soit $(d^\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'écarts flous sur X . On définit une partie V de $I^{X\times X}$ par;

(1) $h \in V \leftrightarrow \exists n \in N^\star$, $\exists A_1$ partie finie de A , tels que

$$\forall x,y \in X : h(x,y) \geq \bigwedge_{\alpha \in A_1} d^\alpha_{xy}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Alors V est une uniformité floue sur X (dite associée à la famille $(d^\alpha)_{\alpha \in A}$ d'écarts flous sur X).

Preuve

★ La propriété u 1) est évidente.

★ u2) Si $h_1(x,y) \geq \bigwedge_{\alpha \in A_1} d^\alpha_{xy}\left(\frac{1}{2^{n_1}}\right)$ et $h_2(x,y) \geq \bigwedge_{\alpha \in A_2} d^\alpha_{xy}\left(\frac{1}{2^{n_2}}\right)$

clair que $(h_1 \wedge h_2)(x,y) \geq \bigwedge_{\alpha \in A_1 \cup A_2} d^\alpha_{xy}\left(\frac{1}{2^n}\right)$, où $n = \max(n_1, n_2)$.

★ Les propriétés u3) et u4) sont évidentes

★ u5) : Soit $h \in V$. Soient $n \in N^\star$ et A_1 partie finie de A tels que

$$h(x,y) \geq \bigwedge_{\alpha \in A_1} d^\alpha_{xy}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Posons $k(x,y) = \bigwedge_{\alpha \in A_1} d^\alpha_{xy}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

$k \in V$;

D'autre part, pour tout $z \in X$ et pour tout $\alpha \in A_1$:

$$T(k(x,z),\ k(z,y)) \leqslant T\left(d^{\alpha}_{xz}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right),\ d^{\alpha}_{zy}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) \leqslant d^{\alpha}_{xy}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

donc pour tout $z \in X : R(k(x,z),\ k(z,y)) \leqslant \bigwedge\limits_{\alpha \in A_1} d^{\alpha}_{xy}\left(\frac{1}{2^n}\right) \leqslant h(x,y)$

de sorte que : $(k \underset{T}{o} k)(x,y) \leqslant h(x,y)$.

• Remarque : Si A est finie, l'uniformité floue associée à $(d^{\alpha})_{\alpha \in A}$ est associée à l'unique écart flou $d = \bigwedge\limits_{\alpha \in A} d^{\alpha}$.

• Proposition 2

> Toute uniformité floue est l'uniformité floue associée à une famille d'écarts flous.

Preuve

Soit V une uniformité floue sur X

Soit D l'ensemble des écarts flous sur X

Soit D_V la partie de D ainsi définie : Si $F \in D$, $F \in D_V \leftrightarrow \forall n \in N^{\star}$: $F_n \in V$, où F_n est l'élément de $I^{X \times X}$ défini par $F_n(x,y) = F_{xy}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Soit V_1 l'uniformité floue associée (comme il est dit à la position 1) à D_V .

$\underline{\underline{1}}$ $\underline{V_1 \subset V}$

Soit $h \in V_1$

Par définition, il existe $n \in N^{\star}$ et il existe une partie finie E de D_V telle que pour tout $(x,y) \subset X^2$:

$$h(x,y) \geqslant \bigwedge_{F \in E} F_{xy}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \bigwedge_{F \in E} F_n(x,y)$$

Pour chaque $F \in E$, $F_n \in V$; de sorte que $h \in V$.

$\stackrel{?}{=} V \subset V_1$

* remarques préliminaires :

a) Soit T une norme triangulaire. Définissons $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ par récurrence sur $p \in N^*$ par :

$$\begin{cases} T(\alpha) = \alpha \\ T(\alpha, \beta) \text{ est déjà défini} \\ \text{pour tout } p \geq 2 : T(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}) = T[T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \alpha_{p+1}] \end{cases}$$

On peut montrer qu'on définit ainsi, pour chaque $p \in N^*$, une opération p-aire associative sur I ; et que $\forall \sigma \in S_p : T(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(p)}) = T(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$

b) Soit T une norme triangulaire qui vérifie BS .

Si $h_1, \ldots, h_p$ sont des éléments de $I^{X \times X}$, on définit $h_p 0_T \ldots 0_T h_1$ par récurrence sur $p \geq 2$:

$$\begin{cases} (h_2\ 0_T\ h_1)(x,y) = \bigvee_{z \in X} T[h_1(x,z)\ ,\ h_2(z,y)] \\ \text{Si } p \geq 2 : h_{p+1} 0 \ldots 0_T h_1 = h_p 0_T (h_{p_1} 0_T \ldots 0_T h_1) \end{cases}$$

On montre que $(h_p 0_T \ldots 0_T h_1)(x,y) = \bigvee_{u_1, \ldots u_{p-1} \in X} T[h_1(x_1 u_1), h_2(u_1, u_2), \ldots,$
$\ldots, h_p(u_{p-1}, y)]$

* Lemme : Il existe une suite $(h_n)_{n \geq 0}$ telle que
$$\begin{cases} \forall n : h_n \in V \\ \forall n : h_n^{-1} = h_n \\ h_0 = 1 \text{ (càd } \forall x,y \in X : h_o(x,y) = 1) \\ h_1 = h \wedge h^{-1} \\ \forall n : h_{n+1} o_T h_{n+1} o_T h_{n+1} \leq h_n . \end{cases}$$

En effet, posons $h_0 = 1$, $h_1 = h \wedge h^{-1}$. Si h_n est construit, soit $k \in V$ tel que $k o_T k \leqslant h_n$ et soit $\ell \in V$ tel que $\ell o_T \ell \leqslant k$. On prend $h_{n+1} = \ell \wedge \ell^{-1}$.

★ Définissons $f : X\times X \to I^R$, $(x,y) \to f_{xy}$ par $f_{xy}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leqslant 0 \\ h_{n+1}(x,y) & \text{si } \frac{1}{2^{n+1}} < r \leqslant \frac{1}{2^n} \ (n \geqslant 0) \\ 1 & \text{si } r > 1 \end{cases}$

il est facile de constater que pour tout $(x,y) \in X^2$: $f_{xy} \in \Delta^+$

★ Notons $< x|y >$ l'ensemble des suites finies $(x_0,\dots,x_p)$ d'éléments de X telles que $x_0 = x$ et $x_p = y$. Si $r \in R$, $r > 0$, et si $p \geqslant 1$, notons $[r/p]$ l'ensemble des $(r_1,\dots,r_p) \in R^p$ tels que $r_1 > 0, \dots, r_p > 0$ et $r_1 + \dots + r_p = r$.

Si $(x_0,\dots,x_p) \in < x|y >$, si $(r_1,\dots,r_p) \in [r/p]$, notons :

$$T(x_0 \dots x_p \{ r_1 \dots r_p) = T[f_{x_0x_1}(r_1), \dots, f_{x_{p-1}x_p}(r_p)]$$

★ définissons $d : X\times X \to I^R$ par

$$\begin{cases} d_{xy}(r) = 0 \quad \text{si } r \leqslant 0 \\ d_{xy}(r) = \bigvee\limits_{\substack{(x_0,\dots,x_p) \in < x|y > \\ (r_1,\dots,r_p) \in [r/p]}} T(x_0 \dots x_p \{ r_1 \dots \end{cases}$$

★ $d_{xy} \geqslant f_{xy}$: en effet, puisque $(x,y) \in < x|y >$, on a $d_{xy}(r) \geqslant T(f_{xy}(r)) = f_{xy}(r)$ si $r > 0$, alors que $d_{xy}(r) = f_{xy}(r) = 0$ si $r \leqslant 0$.

★ <u>pour tout $(x,y) \in X^2$: $d_{xy} \in \Delta^+$</u> : en effet,

$d_{xy} \in I^R$; $d_{xy}(r) = 0$ si $r \leqslant 0$; $d_{xy}(r) = 1$ si $r > 1$ puisque $f_{xy}(r)$ est alors égal à 1 ;

si $0 < r \leqslant s$: $d_{xy}(r) = \displaystyle\bigvee_{\substack{(x_0,\dots,x_p) \in \langle x|y \rangle \\ (r_1,\dots,r_p) \in [r/p]}} T(x_0 \dots x_p \wr r_1 \dots r_p) \leqslant \dots$

$$\dots \leqslant \bigvee_{\substack{(x_0,\dots,x_p) \in \langle x|y \rangle \\ (r_1,\dots,r_p) \in [r/p]}} T(x_0 \dots x_p \wr r_1 \dots r_{p-1}\ r_p + s-r) \leqslant \dots$$

$$\dots \leqslant \bigvee_{\substack{(x_0,\dots,x_p) \in \langle x|y \rangle \\ (s_1 \dots s_p) \in [s/p]}} T(x_0 \dots x_p \wr s_1 \dots s_p) = d_{xy}(s).$$

Enfin d_{xy} est continue à gauche en tout $r \in R$: c'est évident si $r \leqslant 0$, et si $r > 0$:

$$\bigvee_{0 < s < r} d_{xy}(s) = \bigvee_{0 < s < r} \bigvee_{\substack{(x_0 \dots x_p) \in \langle x|y \rangle \\ (s_1 \dots s_p) \in [s/p]}} T(x_0 \dots x_p \wr s_1 \dots s_p) =$$

$$= \bigvee_{\substack{(x_0 \dots x_p) \in \langle x|y \rangle \\ s_1 + \dots + s_p < r}} T(x_0 \dots x_p \wr s_1 \dots s_p) = \dots$$

$$\dots = \bigvee_{\substack{(x_0 \dots x_p) \in \langle x|p \rangle \\ (r_1 \dots r_p) \in [r/p]}} \bigvee_{s < r_p} T(x_0 \dots x_p \wr r_1 \dots r_{p-1} s) = \dots\dots$$

$$\dots = \bigvee_{\substack{(x_0 \dots x_p) \in \langle x|y \rangle \\ (r_1 \dots r_p) \in [r/p]}} T(x_0 \dots x_p \wr r_1 \dots r_p) = d_{xy}(r)$$

(puisque T vérifie BS, et puisque $f_{x_{p-1}x_p}$ est continue à gauche).

★ d est un écart flou sur X :

d est une application de X^2 dans Δ^+

$d_{xx} = H$, car si $r > 0$: $d_{xx}(r) \geq f_{xx}(r) = 1$ puisque pour tout $n \in N^{\star}$: $h_n(x\ x) = 1$

$d_{yx} = d_{xy}$ provient des remarques suivantes :

$$(x_0 \ldots x_p) \in < x|y > \rightarrow (x_p \ldots x_0) \in < y|x >$$

$$(r_1 \ldots r_p) \in [r/p] \rightarrow (r_p \ldots r_1) \in [r/p]$$

$f_{yx} = f_{xy}$ puisque chaque h_n est symétrique

$$T(\alpha_p \ldots \alpha_1) = T(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$$

quant à l'inégalité triangulaire, on a par exemple si u et v sont strictement positifs :

$$T(d_{xy}(u),\ d_{yz}(v)) = T \left[\bigvee_{\substack{(x_0 \ldots x_p \in < x|z > \\ (u_1 \ldots u_p \in [u/p]}} T(x_0 \ldots x_p \} u_1 \ldots u_p), \ldots \right.$$

$$\left. \bigvee_{\substack{(y_0 \ldots y_q) \in < z,y > \\ (v_1 \ldots v_q) \in [v/q]}} T\ (y_0 \ldots y_q \} v_1 \ldots v_q) \right] = \ldots$$

$$\ldots \text{(puisque } T \text{ vérifie BS)} \ldots = \bigvee_{\substack{(x_0 \ldots x_p) \in < x|z > \\ (y_0 \ldots y_q) \in < z|y > \\ (u_1 \ldots u_p) \in [u/p] \\ (v_1 \ldots v_q) \in [v/q]}} T(x_o \ldots x_p y_o \ldots y_q\ u_1 \ldots u_p v_1 \ldots v_a) \leq d_{xz}(u+v$$

puisque

$$(x_0 \ldots x_p) \in < x|z > \text{ et } (y_0 \ldots y_q) \in < z|y > \rightarrow (x_0 \ldots x_p\ y_1 \ldots y_q) \in < x|y >$$

$$(u_1 \ldots u_p) \in [u/p] \text{ et } (v_1 \ldots v_q) \in [v/q] \rightarrow (u_1 \ldots u_p\ v_1 \ldots v_q) \in [u+v\ /p+q]$$

★ pour tout $n \in N^\star$ $h_{n+1}(x,y) \leqslant d_{xy}(\frac{1}{2^n}) \leqslant h_n(x,y)$:

Tout d'abord $h_{n+1}(x,y) = h_{xy}(\frac{1}{2^n}) \leqslant d_{xy}(\frac{1}{2^n})$

Montrons d'autre part, par récurrence sur $p \in N^\star$ que :

$\forall (x_0 \ldots x_p) \in < x|y >$, $n \in N^\star$, $(r_1 \ldots r_p) \in [r/p] \to T(x_0 \ldots x_p \{ r_1 \ldots r_p) \leqslant h_n(x,y)$

$p = 1$ cela s'écrit $f_{xy}(\frac{1}{2^n}) \leqslant f_{xy}(\frac{1}{2^{n-1}})$

$p = 2$ Si $z \in X$, et si $r_1 + r_2 = \frac{1}{2^n}$:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \leqslant \frac{1}{2^n} \to f_{xz}(r_1) \leqslant f_{xz}(\frac{1}{2^n}) = h_{n+1}(x,z) \\ r_2 \leqslant \frac{1}{2^n} \to f_{zy}(r_2) \leqslant f_{zy}(\frac{1}{2^n}) = h_{n+1}(z,y) \end{array}\right\} \to T(f_{xz}(r_1), f_{zy}(r_2)) \leqslant \ldots$$

$$\ldots T(h_{n+1}(x,z), h_{n+1}(z,y)) \leqslant \ldots$$

$$\ldots (h_{n+1} \circ_T h_{n+1})(x,y) \leqslant h_n(x,y)$$

$p \to p+1$

Soit $p \geqslant 2$, soient $(x_0 \ldots x_{p+1}) \in < x|y >$ et $(r_1 \ldots r_{p+1}) \in [\frac{1}{2^n} / p+1]$

Soit $A = T(x_0 \ldots x_{p+1} \{ r_1 \ldots r_{p+1})$

Quitte à remarquer que $A = T(x_{p+1} \ldots x_0 \{ r_{p+1} \ldots r_1)$, on peut supposer que $r_1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

Soit h tel que $r_1 + \ldots + r_h \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} < r_1 + \ldots + r_h + r_{h+1}$: $1 \leqslant h \leqslant p$

si $1 \leqslant h \leqslant p$, $A = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, avec
$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1 = T(x_0 \ldots x_h \{ r_1 \ldots r_h) \\ \alpha_2 = f_{x_h x_{h+1}}(r_{h+1}) \\ \alpha_3 = T(x_{h+1} \ldots x_{p+1} \{ r_{h+2} \ldots r_{p+1}) \end{array} \right.$$

si $h = p$, $A = T(\alpha_1, \alpha_2)$

d'après l'hypothèse de récurrence,

$\alpha_1 \leqslant T(x_0 \ldots x_h, r_1 \ldots r_{h-1}, \frac{1}{2^n} - r_1 \ldots - r_{h-1}) \leqslant h_{n+1}(x, x_h)$

$\alpha_2 \leqslant f_{x_h x_{h+1}} (\frac{1}{2^n}) = h_{n+1}(x_h, x_{h+1})$

Si $h < p$, d'après l'hypothèse de récurrence, $\alpha_3 \leqslant h_{n+1}(x_{h+1}, y)$

dans les deux cas, on voit aisément que $A \leqslant (h_{n+1} 0_T \, h_{n+1} \, 0_T \, h_{n+1})(x,y) \leqslant h_n(x,y)$

* $\forall n \in N^\star$: $d_n(x,y) = d_{xy}(\frac{1}{2^n}) \geqslant h_{n+1}(x,y)$, de sorte que $\forall n \in N^\star$: $d_n \in V$ et $d \in D_V$.

* Alors $h(x,y) \geqslant h_1(x,y) \geqslant d_{xy}(\frac{1}{2})$, avec $d \in D_V$ montre que $h \in V_1$.

C Topologies floues uniformisables

* Comme il est dit plus généralement dans [3] , on peut associer une topologie floue (au sens de Chang) à une uniformité floue V en posant pour chaque $\mu \in I^X$: $\bar{\mu} = \bigcap_{h \in V} D_h(\mu)$, où $D_h(\mu)\ (x) = \bigvee_{u \in X} T\,[\mu(u), h(u,x)]$

* A toute famille $(d^\alpha)_{\alpha \in A}$ d'écarts flous, on peut associer une uniformité V (cf proposition 1), et donc une topologie floue; on montre que pour chaque $\mu \in I^X$: $\bar{\mu}\ (x) = \bigwedge_{n \in N^\star} \bigvee_{u \in X} T\,[\mu(u), \bigwedge_{\alpha \in A_1} d^\alpha_{ux} (\frac{1}{2^n})]$

  A_1 partie finie de A

Proposition 3 :

Une topologie floue est uniformisable si et seulement si elle provient d'une famille d'écarts flous (comme le montre la proposition 2).

D | Topologies floues pseudo métrisables, métrisables

On dit qu'une topologie floue est pseudo-métrisable (resp. métrisable) si elle est associée à un écart flou (resp. distanee floue). Alors, il existe donc un écart flou d (resp. une distance floue d) tel que pour chaque $\mu \in I^X$: $\bar{\mu}(x) = \bigwedge_{n \in N^\star} \bigvee_{u \in X} T\,[\mu(u),\, d_{ux}(\frac{1}{2^n})]$

On a les résultats suivants :

Proposition 4 pour une topologie floue, il y a équivalence entre :

1) elle est pseudo-métrisable
2) elle est uniformisable, et associée à une uniformité ayant une base dénombrable.

(une base de l'uniformité V étant une partie B de V telle que tout élément de V contient un élément de B).

Proposition 5 pour une topologie floue, il y a équivalence entre :

1) elle est métrisable
2) elle est uniformisable, et associée à une uniformité ayant une base dénombrable et telle que;

$\forall x, y \in X\ [x \neq y \rightarrow \exists h \in V,\ h(x,y) < 1]$

E Toujours à propos des topologies floues uniformisables et des ecarts flous

1 Quelques définitions utiles par la suite :

* Soient (X,V) et (Y,W) deux espaces uniformes flous, et soit $f : X \to Y$
On dit que f est uniformément continue si $\forall k \in W, \exists h \in V$, $\forall x,y \in X$: $k(f(x),f(y)) \geqslant h(x,y)$.

Si $f\times f$ est l'application de $X\times X$ dans $Y\times Y$ définie par $(f\times f)(x,y) = (f(x),f(y))$, cela revient à dire que $\forall k \in W$, $(f\times f)^{-1}(k) \in V$.

* Soit $(X^\alpha,V^\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces uniformes flou.
Posons $X = \prod_{\alpha \in A} X^\alpha$, et soit $(p_\alpha : X \to X^\alpha)_{\alpha \in A}$ les projections associées ; si $x \in X_1$ on notera $x^\alpha = p_\alpha(x)$ - on appelle uniformité floue produit de $(V^\alpha)_{\alpha \in A}$ l'uniformité floue sur X ayant pour subbase les $(p_\alpha \times p_\alpha)^{-1}(h)$, où $\alpha \in A$ et $h \in V^\alpha$. Il est facile de voir que :
$\ell \in V \leftrightarrow$ il existe une partie finie A_1 de A, il existe une famille $(\ell^\alpha)_{\alpha \in A_1}$ telles que

$$:\forall \alpha \in A_1 : \ell^\alpha \in V^\alpha$$
$$\forall x,y \in X : \ell(x,y) \geqslant \bigwedge_{\alpha \in A_1} \ell^\alpha (x^\alpha, y^\alpha)$$

* Soit (X,V) un espace uniforme flou, et soit $Y \subset X$.
La partie V_y de $I^{y\times y}$ définie par $k \in V_y \leftrightarrow \exists h \in V_1$ $k = h|_{y\times y}$ est une uniformité floue sur Y, dite uniformité floue induite sur Y par V.

* On dira que deux espaces uniformes flous sont uniformément isomorphes s'il existe une bijection uniformément continue de l'un sur l'autre dont la réciproque est aussi uniformément continue.

2

Proposition 6 :

Tout espace uniforme flou est uniformément isomorphe à un sous-espace d'un produit d'espaces pseudométriques flous.

Indications :

Soit (X, V) unespace uniforme flou.

D'après la proposition 2, il existe une famille $(d^{\alpha})_{\alpha \in A}$ d'écarts flous telle que V soit l'uniformité floue associée à $(d^{\alpha})_{\alpha \in A}$.

Pour chaque $\alpha \in A$, soit $X^{\alpha} = X$, muni de l'uniformité floue V^{α} associée à l'écart flou d^{α}.

Soit $f : X \to Z$ définie par : $\forall \alpha \in A$, $f(x)^{\alpha} = x$.

On montre aisément que f est une injection continue de (X, V) dans (Z, W), et que grâce à f- (X, V) est uniformément isomorphe à $(f(X), W_{f(X)})$.

3 Métrique floue associée à un écart flou

Proposition 7

Soit (X,d) un espace pseudo métrique flou.

Pour chaque $x \in X$, notons $\bar{x} = \{y \in X \ / \ d_{xy} = H\}$

Alors la relation $xRy \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$ est une équivalence sur X.

De plus, on définit une distance floue sur $\bar{X} = X/_R$ par $D_{\bar{x}\bar{y}} = d_{xy}$

(on dit que c'est la distance floue canoniquement associée à d).

La preuve ne présente aucune difficulté.

On remarquera que si $\bar{x}_1 = \bar{x}$ et $\bar{y}_1 = y$ et si $r > 0$:

$$\forall r' < r : d_{x_1y_1}(r) \geqslant T\left[d_{x_1x}\left(\frac{r-r'}{2}\right), d_{xy}(r'), d_{yy_1}\left(\frac{r-r'}{2}\right)\right] = d_{xy}(r')$$

puisque $d_{x_1x} = H$ et $d_{yy_1} = H$.

D'où $d_{x_1y_1}(r) \geqslant \bigvee_{r'<r} d_{xy}(r') = d_{xy}(r)$, et on montre pareillement l'autre inégalité.

4

Définition :

Nous dirons qu'une uniformité floue V sur X est séparée si

$\forall x,y \in X\ [x \neq y \rightarrow x \neq y \rightarrow\ h \in V\ ,\ h(x,y) < 1]$

("I. Haustorff separation" avec la terminologie de Höhle : [4])

Proposition 8 :

Tout espace uniforme flou séparé est uniformément isomorphe à un sous espace d'un produit d'espaces métriques flous. (les propositions 7 et 8 constituent la généralisation floue d'un théorème d'A. Weil : cf. par exemple [1]).

Indications :

Soit (X, V) un espace uniforme séparé.

Reprenons les notations utilisées dans les indications données pour la preuve de la proposition 8.

A chaque espace pseudométrique flou (X^α, d^α) on associe (comme le permet la proposition 7) l'espace métrique flou $(\bar{X}^\alpha, D^\alpha)$. Soit g_α la surjection canonique de X^α sur $\bar{X}^\alpha$.

On montre aisément que (X,V) est uniformément isomorphe à un sous-espace du produit des espaces métriques flous $(\bar{X}^{\alpha},D^{\alpha})$, grâce à $X \xrightarrow{\lambda} \prod_{\alpha \in A} \bar{X}^{\alpha}$ définie par $\lambda(x) = (g_{\alpha}(x^{\alpha}))_{\alpha \in A}$

L'injectivité de λ est précisément garantie par la séparation de V : en effet, si $\exists h \in V$, $h(x,y) < 1$

$\exists \alpha \in A$, $d^{\alpha}_{xy}(\frac{1}{2}) < 1$ (cf la preuve de la proposition 2)

$\exists \alpha \in A$, $D^{\alpha}_{g_{\alpha}(x)g_{\alpha}(y)}$ $(\frac{1}{2}) < 1$

$\exists \alpha \in A$, $D^{\alpha}_{g_{\alpha}(x)g_{\alpha}(y)} \neq H$

$\exists \alpha \in A$, $g_{\alpha}(x) \neq g_{\alpha}(y)$, d'où $\lambda(x) \neq \lambda(y)$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KELLEY J.L. : "general topology" (Van Nostrand)

[2] Schweizer B. et SKLAR A. : "statistical metric spaces" ; pacific j. math. 10 (1960), 313 → 334.

[3] HOHLE U. : "probablistic uniformization of fuzzy topologies" ; fuzzy sets and systems I (1978) ; 311 → 332.

[4] HÖHLE U. : "probablistic metrization of fuzzy uniformities" ; fuzzy sets and systems 8-1 ; 63→ 69.