A PROPOS DES $\tilde{\mathcal{M}}$-MESURES TRONÇON ET SUPPORT

par

Eugen ROVENTA

Préliminaire Dansla première partie de cet ouvrage sont introduites deux fonctions appelées $\tilde{\mathcal{M}}$-mesure tronçon et $\tilde{\mathcal{M}}$-mesure support. Ces fonctions sont definies sur une classe de sous-ensembles flous et on etudie quelques propriétés liées de celles-ci. Ainsi une proprieté interessante (qui apparait seulement dans le cadre de sous-ensembles flous) est liée de la monotonie. Aussi on constate que les propriétés de passage au limite sous le signe de la mesure ne sont pas valables. Pour montrer ça on construit plusieurs contre-exemples et en même temps on etablit des conditions supplémentaires qu'il faut les poser que ces propriétés restent vraies.

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré ou $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est une σ- algèbre usuele.

Définition I.I On appelle un sous-ensembles flau $\tilde{F}$ de X(le référenciel X est toujours un ensemble usuel) une partie $\tilde{F} \subseteq X \times [0,1]$ tel que:

(i) $pr_1(\tilde{F}) = X$;

(ii) $(x, y_1) \in \tilde{F}$ et $(x, y_2) \in \tilde{F} \Rightarrow y_1 = y_2$.

(donc $\tilde{F} \in [0,1]^X$).

On note la classe de sous-ensembles flous de X par $\tilde{\mathcal{F}}(X)$.

Définition I.2 On dit que le sous-ensamble $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}(X)$ est mesurable si $\forall \alpha \in [0,1] \Rightarrow \{x \in X ; \tilde{F}(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$.

On note par $\tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B})$ laclasse de sous-ensembles mesurables flous.

Si est donné un sous-ensembles flous $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}(X)$; fixé, on peut associer à celui-ci deux ensembles usuels qui joueront un rol important dans ce qui suit.

Définition I.3 (i) On appelle le tronçon de $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}(X)$ l'ensemble usuel $T(\tilde{F})=\{x \in X / \ 0 < \tilde{F}(x) < 1\}$;

(ii) On appelle le support de $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}(X)$ l'ensemble usuel $S(\tilde{F})=\{x \in X / \ \tilde{F}(x) > 0\}$.

On notera par $Z(\tilde{F})=\{x \in X/F(x)=0\}$ et $H(\tilde{F})=\{x \in X/F(x)=1\}$.

On observe que $S(\tilde{F})=\tilde{T}(F) \cup H(\tilde{F})$ et $T(\tilde{F}) \cap H(\hat{F})=\emptyset$.

Dans [6] sont demontrées les propriétés suivantes :

Proposition I.4 L'application $\tilde{F} \mapsto T(\tilde{F})$ appélée application tronçon a les proprietes suivantes:

(a) $\begin{cases} \tilde{F}_1 \leq \tilde{F}_2 \text{ et } H(\tilde{F}_1)=H(\tilde{F}_2) \Rightarrow T(\tilde{F}_1) \leq T(\tilde{F}_2) ; \\ \tilde{F}_1 \leq \tilde{F}_2 \text{ et } Z(\tilde{F}_1)=Z(\tilde{F}_2) \Rightarrow T(\tilde{F}_1) \geq T(\tilde{F}_2) ; \end{cases}$

(b) $T(\bigcup_{i \in I} \tilde{F}_i) \leq \bigcup_{i \in I} T(\tilde{F}_i)$;

(c) $T(\bigcup_{i \in I} \tilde{F}_i) = \bigcup_{i \in I} T(\tilde{F}_i)$ si $H(\bigcup_{i \in I} \tilde{F}_i) \leq \bigcap_{i \in I} H(\tilde{F}_i)$;

(d) $T(\bigcup_{i=1}^{p} \tilde{F}_i) = \bigcup_{i=1}^{p} T(\tilde{F}_i)$ si $H(\tilde{F}_i)=H(\tilde{F}_j)$, $i \neq j$, $i,j=\overline{1,p}$;

(e) $T(\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i) \leq \bigcap_{i \in I} T(\tilde{F}_i)$ si $H(\tilde{F}_i)=H(\tilde{F}_j)$, $i \neq j$, $i,j=\overline{1,p}$;

(f) $T(\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i) = \bigcap_{i \in I} T(\tilde{F}_i)$ si $H(\tilde{F}_i)=H(\tilde{F}_j)$, $i \neq j$, $i,j \in I$ et $Z(\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i) \leq \bigcup_{i \in I} Z(\tilde{F}_i)$;

(g) $T(\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i) = \bigcup_{i \in I} T(\tilde{F}_i)$ si $Z(\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i) \leq \bigcap_{i \in I} Z(\tilde{F}_i)$;

(h) $T(\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{F}_i) = \begin{cases} \bigcap_{i=1}^{p} T(\tilde{F}_i) \text{ si } H(\tilde{F}_i)=H(\tilde{F}_j), \ i \neq j , \ i,j=\overline{1,p} ; \\ \bigcup_{i=1}^{p} T(\tilde{F}_i) \text{ si } Z(\tilde{F}_i)=Z(\tilde{F}_j) , \ i \neq j , \ i,j=\overline{1,p}. \end{cases}$

Proposition I.5 L'applicaton $\tilde{F} \to S(\tilde{F})$ appelée application support a les propriétés suivantes:

(a) $\tilde{F}_1 \leq \tilde{F}_2 \Rightarrow S(\tilde{F}_1) \leq S(\tilde{F}_2)$;

(b) $S(\bigcup_{i \in I} \tilde{F}_i) = \bigcup_{i \in I} S(\tilde{F}_i)$;

(c) $S(\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i) \leq \bigcap_{i \in I} S(\tilde{F}_i)$;

(d) $S(\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i) = \bigcap_{i \in I} S(\tilde{F}_i) \iff Z(\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i) \leq \bigcup_{i \in I} S(\tilde{F}_i)$;

(e) $S(\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{F}_i) = \bigcap_{i=1}^{p} S(\tilde{F}_i)$.

Si $\tilde F \in \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B})$ il resulte que $T(\tilde F), S(\tilde F), H(\tilde F), Z(\tilde F) \in \mathcal{B}$.

1. On introduit maintenant les notions des $\tilde{\mathcal{M}}$-mesure tronçon et $\tilde{\mathcal{M}}$-mesure support.

Définition 2.I On appelle $\tilde{\mathcal{M}}$-mesure definie sur $\tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B})$ une fonction $m: \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ qui verifie les axiomes suivantes:

(I) $m(\tilde O)=0$ ($\tilde O(x)=0, \ \forall x \in X$);

(II) Si $\tilde F_n \in \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B})$, $\tilde F_n \cap \tilde F_{n'}=\tilde O$, $n \neq n'$ alors:

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde F_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty} m(\tilde F_n).$$

Définition 2.2. (i)On appelle $\tilde{\mathcal{M}}$-mesure tronçon (atachée à μ) l'application $m_T: \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ (\mathbb{R}_+=[0, \infty))$ definie par:

$$m_T(\tilde F)= \mu(T(\tilde F));$$

(ii) On appelle $\tilde{\mathcal{M}}$-mesure support (atachée à μ) l'application $m_S: \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definie par:

$$m_S(\tilde F) = \mu(S(\tilde F)).$$

On montre que ses deux fonctions sont des $\tilde{\mathcal{M}}$-mesures et est evident que $m_S(\tilde F)= m_T(\tilde F) + \mu(H(\tilde F))$ (en cas particulière quand F est usuel on a $T(F)=\emptyset$, $H(F) = F$ et $m_S(F) = \mu(F)$).

Remarque 3 Puisque ces fonctions sont nulles en $\tilde O$ et dénombrable additives sur $\tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B})$ nous les avons appellées $\tilde{\mathcal{M}}$-mesures. Mais elles peuvent avoir des propriétés différentes en comparaison avec les mesures usuelles. Ces differences peuvent apparaitre en ce qui concerne la monotonie ,la soustractivité ,le passage au limite sous le signe de la mesure etc.

Ainsi on peut demontrer [4] :

Proposition 2.4 (i)Si $\tilde F_1 \le \tilde F_2$ et $H(\tilde F_1)$ $H(\tilde F_2)$ alors $m_T(\tilde F_1) \le m_T(\tilde F_2)$;

(ii)Si $\tilde F_1 \le \tilde F_2$ et $Z(\tilde F_1)=Z(\tilde F_2)$ alors $m_T(\tilde F_1) \ge m_T(\tilde F_1)$;

(iii)SI $\hat F = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde F_i$ alors $m_T(\tilde F) \le \sum_{i=1}^{\infty} m_T(\tilde F_i)$;

(iv)Si $m_T(\tilde F_i \cap \tilde F_j)=0$, $i \neq j$, alors :

$$m_T\Big(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\Big)=\sum_{i=1}^{n} m_T(\tilde F_i).$$

Proposition 2.5 Quel que soit $\tilde{F}_i \in \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B}), i=1,2$ on suppose que la propriete suivante est verifie:

(π) $\forall x \in T(\tilde{F}_1) \cup T(\tilde{F}_2)$ il resulte que $\tilde{F}_1(x) \neq \tilde{F}_2(x)$. Alors:

(i) $m_T(|\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2|) \geq m_T(\tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2)$ et $m_T(|\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2|) \geq m_T(\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2)$;

(ii) Si $H(\tilde{F}_1)=H(\tilde{F}_2)$ alors $m_T(|\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2|)=m_T(\tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2)$;

(iii) Si $Z(\tilde{F}_1)=Z(\tilde{F}_2)$ alors $m_T(|\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2|)=m_T(\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2)$.

De (ii) il resulte que la $\tilde{\mathcal{C}}$-mesure m_T n'est pas soustractive. L'exemple suivante montre que ni la $\tilde{\mathcal{C}}$-mesure m_S n'a pas cette proprieté. Soit:

$$\tilde{F}_1(x)=\begin{cases} 0, & x \in]-\infty, 0[\cup]2, \infty[\\ x/2, & x \in [0,2] \end{cases}$$

$$\tilde{F}_2(x)=\begin{cases} 0, & x \in]-\infty, 0[\cup]2, \infty[\\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in]1,2]. \end{cases}$$

et μ la mesure Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Alors:

$$(\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1)(x)=\begin{cases} 0, & x \in]-\infty, 0[\cup]2, \infty[\\ x/2, & x \in [0,1] \\ (2-x)/2, & x \in]1,2] \end{cases}$$

et on observe que $\mu(S(\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1))=2 \neq \mu(S(\tilde{F}_2)) - \mu(S(\tilde{F}_1))=0$, donc $m_S(\tilde{F}_2) - m_S(\tilde{F}_1) \neq m_S(\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1)$; $\tilde{F}_1 \leq \tilde{F}_2$.

3. On presénte au-dessous quelques propriétés en ce qui concerne les operations avec des suites convergentes, qui sont liées de la $\tilde{\mathcal{M}}$-mesure tronçon introduite en façe.

Proposition 3.1 Soit $(\tilde{F}_k)$ une suite de sous-ensembles flous. Le sous-ensemble flou $\tilde{F}^*$ (res. $\tilde{F}_*$) definie par $\tilde{F}^*(x)=\bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k(x)$ (resp. $\tilde{F}_*(x)=\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigwedge_{k=n}^{\infty}\tilde{F}_k(x)$) s'appelle la limite superieure (resp. inferieure) pour la suite donné (évidement $\tilde{F}_* \leq \tilde{F}^*$).

(ii) La suite $(\tilde{F}_k)$ [illegible] vers $\tilde{F}$ si $\tilde{F}_* = \tilde{F}^* = \tilde{F}$. (on note $\tilde{F}_k \to \tilde{F}$).

Lemme 3.2 (i) Si $(\tilde{F}_k) \subseteq \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B})$, $\tilde{F}_k \nearrow \tilde{F}$ et $H(\tilde{F}_k) = H(\tilde{F})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, alors : $m_T(\tilde{F}) = \lim\limits_{k \to \infty} m_T(\tilde{F}_k)$;

(ii) Si $(\tilde{F}_k) \subseteq \tilde{\mathcal{C}}(X, \mathcal{B})$, $\tilde{F}_k \searrow \tilde{F}$ et $Z(\tilde{F}_k) = Z(\tilde{F})$, $\forall k \in \mathbb{N}$ alors: $n_T(\tilde{F}) = \lim\limits_{k \to \infty} n_T(\tilde{F}_k)$.

L'exemple suivant montre que l'egalité $m_T(\lim\limits_{k \to \infty} \tilde{F}_k) = \lim\limits_{k \to \infty} m_T(\tilde{F}_k)$, n'est pas vraie pour une suite monotone sans poser des conditios supplémentaires. Soit:

$$\tilde{F}_k(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < k \\ x - k & , \quad k \le x < k+1 \\ 1 & , \quad x \geq k+1 \end{cases}$$

On observe que $m_T(\tilde{F}_k) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{k \to \infty} m_T(\tilde{F}_k) = 1$ mais $m_T(\lim\limits_{k \to \infty} \tilde{F}_k) = m_T(\tilde{0}) = 0$.

De même l'egalité $n_S(\lim\limits_{k \to \infty} \tilde{F}_k) = \lim\limits_{k \to \infty} n_S(\tilde{F}_k)$ n'est pas vraie en général. Pour montrer ça on peut considérer:

$$\tilde{F}_k(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < k, \ x \geq k+1 \\ 1 & , \quad k \le x < k+1 \end{cases}$$

Alors $n_S(\tilde{F}_k) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{k \to \infty} n_S(\tilde{F}_k) = 1$ mais $n_S(\lim\limits_{k \to \infty} \tilde{F}_k) = n_S(\tilde{0}) = 0$.

Proposition 3.3 Quel que soit $(\tilde{F}_k) \subseteq \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B})$ avec $H(\tilde{F}'_n) = H(\tilde{F}_*)$ et $H(\tilde{F}'_n) = H(\tilde{F}_k)$, $k \geq n$, $n \in \mathbb{N}$ où $\tilde{F}'_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \tilde{F}_k$ on a :

$$m_T(\tilde{F}_*) \le \liminf m_T(\tilde{F}_k).$$

On montre que le resultat precedante a lieu dans les conditios plus générales $H(\tilde{F}_*) \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H(\tilde{F}'_n)$ et $H(\tilde{F}'_n) = H(\tilde{F}_k)$, $k \geq n$; $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.4 Quel que soit $(\tilde{F}_k) \subseteq \tilde{\mathcal{M}}(X, \mathcal{B})$ avec $Z(\hat{F}''_n) = Z(\hat{F}^*)$ et $H(\tilde{F}''_n) = H(\tilde{F}_k)$, $k \geq n$; $n \in \mathbb{N}$ où $\hat{F}''_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \tilde{F}_k$ on a :

$$\limsup m_T(\tilde{F}_k) \le m_T(\tilde{F}^*).$$

Ce resultat reste valable dans les conditions plus générales ; $Z(\hat{F}^*) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z(\tilde{F}''_n)$, $H(\tilde{F}''_n) = H(\tilde{F}_k)$, $k \geq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Cosequence 3.5 Quel que soit $(\tilde{F}_k) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}(X, \mathcal{B})$, tel que $H(\tilde{F}_k) = H(\tilde{F}_*)$, $Z(\tilde{F}''_n) = Z(\tilde{F}^*)$, $H(\tilde{F}''_n) = H(\tilde{F}_k)$, $k \geq n$, $n \in \mathbb{N}$ ou $\tilde{F}''_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \tilde{F}_k$ on a:

$$m_T(\tilde{F}_*) \leq \liminf m_T(\tilde{F}_k) \leq \limsup m_T(\tilde{F}_k) \leq m_T(\tilde{F}^*),$$

Proposition 3.6 Quel que soit $(\tilde{F}_k) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}(X, \mathcal{B})$ convergent $\tilde{F}_k \to \tilde{F}$ tel que $H(\tilde{F}_k) = H(\tilde{F}_*)$, $Z(\tilde{F}''_n) = Z(\tilde{F}^*)$, $H(\tilde{F}''_n) = H(\tilde{F}_k)$, $k \geq n$ $n \in \mathbb{N}$ a lieu l'egalité:

$$m_T(\lim_{k \to \infty} \tilde{F}_k) = \lim_{k \to \infty} m_T(\tilde{F}_k),$$

Donc l'etude des suites de sous-ensembles flous est intéressante quand elle est liée de la $\tilde{\mathcal{A}}$-mesure tronçon. Dans ce cas les propriétés usuelles comme celles de monotonie, de soustractivité et de passage au limite sous le signe de la mesure, ne sont pas valables sans mettre des conditions supplémentaires. Ainsi la $\tilde{\mathcal{A}}$-mesure tronçon n'est pas monotone, n'est pas soustractive et ne permute pas avec la limite, pendant que la $\tilde{\mathcal{A}}$-mesure support est monotone mais elle n'est pas soustractive et ne permute pas avec la limite.

Tous les deux $\tilde{\mathcal{A}}$-mesures sont dénombrables additives. Ce fait est naturel si nous pensons que les proprietés usuelles se rapportent aux fonctions caractéristiques des ensembles usuels, tandis que les proprietée exposées ici se rapportent aux fonctions d'appartenances des sous-ensembles flous.

D'autre part la source de ces differences se trouve dans les proprietés speciales des applicatons tronçon et support.

BIBLIOGRAPHIE

1. BERBERIAN, S.K., Mesure and Integration, New-York, London, 1967.

2. NEGOITA.C.V., and RALESCU.C.A.. Applicatons of Fuzzy Sets to System Analysis; Halsted Press, NY, 1975.

3. MOISIL. G., Essais sur les logiques non-chrysippiennes, Ed. Acad. Bucharest, 1972.

4. ROVENTA. E., Fuzzy Measures, Bul.St. Tehn. Inst. Politehn. Timisoara, 1, 1977.

5. ROVENTA, E., Sequences of Fuzzy Sets, Bul.St. Tehn. Inst. Politehn. Timisoara, 1, 1977.

6. ROVENTA. E., Sur certaines problemes de structures topologiques et de theorie de la mesure pour les sous-ensembles flous et applications, thése, Timis., 1978.

7. ZADEH. L.A., Fuzzy Sets, Information and Control 8, 1965.

8. ZADEH L.A., Probability Measures of Fuzzy Events, J.Math. Anal. Appl. 23 . 1968.