# Treillis complémenté au sens de Zadeh dans la théorie des parties floues d'un ensemble

## Partie 1

Gérard Pralong
CH 1961 Salins V S , Suisse

SOMMAIRE

## 1. INTRODUCTION

La donnée d'un ensemble E et d'un treillis $(\tau,\wedge,\vee)$ permet de déterminer l'ensemble $\tau^E$ des graphes d'application de E dans $\tau$. Une $\tau$-partie floue $A\tau$ de E est un graphe d'application de E dans $\tau$ et l'ensemble $P(E)\tau$ des $\tau$-parties floues de E est l'ensemble des graphes d'application de E dans $\tau$. On a donc $\tau^E = P(E)\tau$.

$(\tau,\wedge,\vee)$ étant un treillis, $(\tau^E,\wedge,\vee)$ tel que $\forall a,b \in \tau^E$ : $a \wedge b = \inf_{x \in \{a,b\}} x$ et $a \vee b = \sup_{x \in \{a,b\}} x$ pour la relation d'ordre $\leqslant$, produit de la relation d'ordre du treillis $\tau$, $\iota$ fois par elle-même, $\iota \in E$, est un treillis car $\tau^E$ est égal à $\prod_{\iota \in E} \tau_\iota$. produit de $\iota$ treillis $\tau$ égaux et que $\prod_{\iota \in E} \tau_\iota$ est un treillis. En notant les opérations $\wedge$ et $\vee$ du treillis $(\tau^E,\wedge,\vee)$ respectivement par $\cap$ et $\cup$ (intersection et réunion), on a, puisque $P(E)\tau = \tau^E$, le treillis $(P(E)\tau,\cap,\cup)$ de l'ensemble des $\tau$-parties floues de l'ensemble E pour les opérations $\cap$ et $\cup$.

Si le treillis $(\tau,\wedge,\vee)$ a un élément nul, respectivement un élément universel, le treillis $(P(E)\tau,\cap,\cup)$ admet un élément nul, respectivement un élément universel. Il en va de même si

1) $(\tau,\wedge,\vee)$ est achevé pour $\wedge$, respectivement achevé pour $\vee$, respectivement achevé
2) $(\tau,\wedge,\vee)$ est un $M$-treillis pour $\wedge$, respectivement un $M$-treillis pour $\vee$, respectivement un $M$-treillis
3) $(\tau,\wedge,\vee)$ est distributif, respectivement infiniment distributif pour $\wedge$, respectivement infiniment distributif pour $\vee$, respectivement infiniment distributif, respectivement complètement distributif pour $\wedge$, respectivement complètement distributif pour $\vee$, respectivement complètement distributif, respectivement

$M$-distributif pour $\wedge$, respectivement $M$-distributif pour $\vee$, respectivement $M$-distributif, respectivement complètement $M$-distributif pour $\wedge$, respectivement complètement $M$-distributif pour $\vee$, respectivement complètement $M$-distributif, respectivement modulaire.

De l'égalité $\tau^E = \mathcal{P}(E)\tau$ et de l'existence d'une bijection canonique de $\tau^E$ sur l'ensemble $\mathcal{A}(E,\tau)$ des applications de E dans $\tau$, il résulte qu'à toute $\tau$-partie floue $A\tau$ de E est associée bijectivement une application $\mu_{A\tau}$ de E dans $\tau$, appelée fonction d'appartenance (floue) de la $\tau$-partie floue $A\tau$ de E.

Si le treillis $(\tau,\wedge,\vee)$ est complémenté, respectivement complémenté de manière unique, le treillis $(\mathcal{P}(E)\tau,\cap,\cup)$ est complémenté, respectivement complémenté de manière unique. Une relation analogue à la précédente existe entre le treillis $(\tau,\wedge,\vee)$ et le treillis $(\mathcal{P}(E)\tau,\cap,\cup)$ si $(\tau,\wedge,\vee)$ est relativement complémenté, semi-complémenté ou pseudo-complémenté (cf. Théorie des treillis, G. Szàsz, Dunod). De manière particulière, on retrouve une même relation entre le treillis $([0,1],\wedge,\vee)$, $[0,1] \subset \mathbb{R}$, et le treillis $(\mathcal{P}(E)\tau,\cap,\cup)$, où $\tau = [0,1] \subset \mathbb{R}$, si la complémentation du treillis $([0,1],\wedge,\vee)$ est comprise au sens de Lofte A. Zadeh.

Le complément d'un élément du treillis $[0,1]$ et la complémentation du treillis $([0,1],\wedge,\vee)$ sont alors définis ainsi :

1) pour tout a appartenant à l'intervalle fermé d'origine 0 et d'extrémité 1 dans $\mathbb{R}$, a est Z-complémenté ( Z de Zadeh) ssi il existe $\bar{a}$ appartenant à ce même intervalle tel que $\bar{a} = 1 - a$; $\bar{a}$ est alors le Z-complément de a
2) comme tout élément de l'intervalle fermé de 0 à 1 dans $\mathbb{R}$ possède un Z-complément unique, on dit que le treillis $([0,1],\wedge,\vee)$ est

Z-complémenté de façon unique.

Le Z-complément d'une $\tau$-partie floue d'un ensemble E où $\tau = [0,1]$ et la Z-complémentation du treillis $(\mathcal{P}(E)\tau, \cap, \cup)$ sont alors donnés de la manière suivante :

1) pour toute $\tau$-partie floue $A\tau$ de E, $\tau = [0,1]$, le Z-complémentaire de $A\tau$, noté $\bar{A}\tau$, est tel que $\mu_{\bar{A}\tau} = \overline{\mu_{A\tau}}$, ou encore, de manière équivalente, est tel que $\forall x \in E$ : $\mu_{\bar{A}\tau}(x) = \overline{\mu_{A\tau}(x)} = 1 - \mu_{A\tau}(x)$

2) toute $\tau$-partie floue de $\mathcal{P}(E)\tau$ étant Z-complémentée de façon unique, le treillis $(\mathcal{P}(E)\tau, \cap, \cup)$ est Z-complémenté de façon unique.

Il peut y avoir quelque intérêt à étendre la complémentation au sens de Zadeh à d'autres treillis que le treillis $([0,1], \wedge, \vee)$ en la généralisant et à observer les propriétés de la complémentation ainsi obtenue.

## 2. TREILLIS $(T,\wedge,\vee)$ Z-COMPLEMENTE

Considérons un groupe commutatif réticulé $(G,*)$ tel que le treillis $(G,\wedge,\vee)$ est associé à la relation d'ordre $\leqslant$ dans $(G,*)$; les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

GR 1 : $(G,*)$ est un groupe commutatif

GR 2 : $\forall a,b,c \in G$ : $[\ a \leqslant b \Rightarrow a*c \leqslant b*c\ ]$; les structures de groupe commutatif et d'ordre sont compatibles

GR 3 : $\forall a,b,c \in G$ : $[\ a*(b\wedge c) = (a*b)\wedge(a*c)$ et $a*(b\vee c) = (a*b)\vee(a*c)\ ]$

GR 4 : $\forall a,b \in G$ : $[\ (a\wedge b)' = a'\vee b'$ et $(a\vee b)' = a'\wedge b'\ ]$

GR 5 : $\forall a,b,c \in G$ : $[\ a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ et $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)\ ]$

GR 6 : $\forall a,b \in G$ : $[\ (a\wedge b)*(a\vee b) = a*b\ ]$

GR 7 : $\forall a,b \in G$ : $[\ (e \leqslant a$ et $e \leqslant b) \Rightarrow (a \leqslant a*b$ et $b \leqslant a*b)\ ]$ et
$[\ (a \leqslant e$ et $b \leqslant e) \Rightarrow (a*b \leqslant a$ et $a*b \leqslant b)\ ]$.

Considérons également un treillis $(T,\wedge,\vee)$, sous-treillis du treillis $(G,\wedge,\vee)$; $(T,\wedge,\vee)$ est alors un treillis ditributif; introduisons en outre les définitions suivantes :

$T_1$ : $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis positif $\Leftrightarrow \forall a \in T$ : $[\ e \leqslant a\ ]$

$T_2$ : $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis négatif $\Leftrightarrow \forall a \in T$ : $[\ a \leqslant e\ ]$.

Rappelons enfin les propositions suivantes permettant de se donner des groupes commutatifs réticulés :

$\forall (G,+)$, un groupe commutatif, $\forall P \sqsubset G$ :

GR 8 : $0 \in P$ et $P+P \sqsubset P \Rightarrow (G,+)$ est un groupe commutatif préordonné par la relation $\forall x,y \in G$ : $(\ x \leqslant y \Leftrightarrow y-x \in P\ )$

GR 9 : $P+P \sqsubset P$ et $P \cap (-P) = \{0\} \Leftrightarrow (G,+)$ est un groupe commutatif ordonné

GR 10 : $P+P \sqsubset P$ et $P \cap (-P) = \{0\}$ et $P \cup (-P) = G \Leftrightarrow (G,+)$ est un groupe commutatif totalement ordonné

GR 11 : $P$ est l'ensemble des éléments positifs de $(G,+) \Rightarrow$
( $P-P = G$ et $P$, muni de l'ordre induit, est tel que $\forall (x,y) \in P^2$ : $(x,y)$ a une borne supérieure dans $P$ ou $(x,y)$ a une borne inférieure dans $P \Leftrightarrow G$ est réticulé ).

## 2.1 Z-complémentation d'un treillis $(T,\wedge,\vee)$ (quelconque)

Soit $(T,\wedge,\vee)$, un treillis, sous-treillis du treillis $(G,\wedge,\vee)$ associé au groupe commutatif réticulé $(G,*)$; par la suite, un tel treillis sera simplement noté $(T,\wedge,\vee)$ sans autre indication.

### 2.1.1 Définition et propriétés fondamentales de la Z-complémentation d'un treillis $(T,\wedge,\vee)$

#### 2.1.1.1 Définitions

définition 1 : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ 1) $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Leftrightarrow$
$\exists (z_i)_{i \in I}$, une famille non vide injective d'éléments de $G$ :
$\forall i \in I$, $\forall a \in T$ : ( $z_i * a' = a' * z_i \in T$ )

2) $\forall a \in T$ : ( $\bar{a}_i = z_i * a' = a' * z_i$ ) est le Z-complément de $a$ par $*$ et par $z_i$; $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ est la famille des Z-compléments de $a$ par $*$ et par $z_i$

3) $(z_i)_{i \in I}$ est la famille de Z-complémentation du treillis $(T,\wedge,\vee)$; $z_i$ est un élément de Z-complémentation du treillis $(T,\wedge,\vee)$ ]

définition 2 : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ 1) $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $z \Leftrightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et $\{z_i\}_{i \in I}$ est un singleton

2) $\forall a \in T$ : ( $\bar{a} = z * a' = a' * z$ ) est le Z-complément de $a$ par $*$ et par $z$ $(= z_i)$

3) $z$ est l'élément de Z-complémentation du treillis $(T,\wedge,\vee)$ ].

<u>définition 3</u> : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ de façon unique $\Leftrightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et $\forall a \in T$, $\exists^* b \in T$ : $\forall i \in I$ : $b = \bar{a}_i$ ]

### 2.1.1.2 <u>Unicité du Z-complément et famille de Z-complémentation</u>

<u>proposition 1</u> : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $z \Leftrightarrow (T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ de façon unique ]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

1) $(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $z \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et $\{z_i\}_{i \in I}$ est un singleton $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et $\forall a \in T$, $\exists^* b \in T$ : $z_i * a' = \bar{a}_i = b \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et $\forall a \in T$, $\exists^* b \in T$ : $\forall i \in I$ : $b = \bar{a}_i \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ de façon unique

2) $(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ de façon unique $\Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et $\forall a \in T$, $\exists^* b \in T$ : $\forall i \in I$ : $b = \bar{a}_i \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et $\forall a \in T$, $\exists^* b \in T$ : $\forall i \in I$ : $b = z_i * a' \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et $\forall a \in T$, $\exists^* b \in T$ : $\forall i \in I$ : $z_i = b * a \Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ et $\{z_i\}_{i \in I}$ est un singleton $\Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $z$ $(= z_i)$.

<u>proposition 2</u> : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$ $\forall i \in I$ : la correspondance $C_i : T \to T$, $a \mapsto C_i(a) = \bar{a}_i$ est une application bijective ] en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$

$\forall i \in I$ : 1) (déf. 1) $\forall a \in T$ : ( $z_i * a' \in T$ ) $\Rightarrow \forall a \in T, \exists^* b \in T$ :

( $b = z_i * a' = \bar{a}_i$ ) $\Rightarrow c_i(a)$ est un singleton $\Rightarrow c_i$ est une application

2) [ $\forall b \in T$ : ( $c_i(a) = b \Leftrightarrow \bar{a}_i = b \Leftrightarrow z_i * a' = b \Leftrightarrow$ $a = z_i * b'$ ] $\Rightarrow \forall b \in T$ : ( $c_i(a) = b$ admet une solution unique dans T ) $\Rightarrow c_i$ est une application bijective.

<u>proposition 3</u> : $\forall (T,\wedge,\vee)$, un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $z \Leftrightarrow$
la correspondance $c : T \to T$, $a \mapsto c(a) = \bar{a}$ est une application bijective ]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$, un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ :

1) $(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $z \Rightarrow$ (prop. 2) $c$ est une application bijective

2) $c$ est une application (bijective) $\Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ de façon unique $\Rightarrow$ (prop. 1) $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $z$ ($= z_i$).

2.1.1.3 <u>Z-complémentation du treillis $(G,\wedge,\vee)$</u>

<u>proposition</u> : $\forall (G,\wedge,\vee)$ :

[ $(G,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ ]

en effet : $\forall (G,\wedge,\vee)$ :

$(G,\wedge,\vee)$ est un sous-treillis de lui-même et $\forall x \in G$, $\forall a \in T$ : ( $x * a' = a' * x \in G$ ) $\Rightarrow (G,\wedge,\vee)$ est un treillis, sous-treillis de lui-même et $\exists (z_i)_{i \in I}$ non vide injective : $\forall i \in I$, $\forall a \in T$ : ( $z_i * a' = a' * z_i \in G$ ) $\Rightarrow (G,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$.

<u>remarque</u> :

$(G,\wedge,\vee)$ peut être un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$

famille d'éléments de G telle que $\{z_i\}_{i \in I} = G$ !

### 2.1.2 Propriétés d'un treillis $(T,\wedge,\vee)$ Z-complémenté

#### 2.1.2.1 Majorants, minorants

proposition 1 : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$
$\forall i \in I$ :
[ 1) $\forall m \in G$ : ( $m \in \text{Maj } T$, respectivement $m \in \text{Min } T \Rightarrow z_i * m' \in \text{Min } T$, respectivement $z_i * m' \in \text{Maj } T$ )
2) $(T,\wedge,\vee)$ est majoré dans G, respectivement minoré dans G $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ est minoré dans G, respectivement majoré dans G ]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :
$(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$
$\forall i \in I$ :
[ 1) $\forall m \in G$ : ( $m \in \text{Maj } T$, respectivement $m \in \text{Min } T \Rightarrow$ (1.1.1.2 prop. 2) $\forall a \in T$ : ( $\bar{a}_i \leqslant m \Leftrightarrow m' \leqslant (\bar{a}_i)' \Leftrightarrow m' \leqslant (z_i * a')' \Leftrightarrow m' \leqslant z_i' * a \Leftrightarrow z_i * m' \leqslant a$, respectivement $m \leqslant \bar{a}_i \Leftrightarrow a \leqslant z_i * m'$ ) $\Rightarrow$ $z_i * m' \in \text{Min } T$, respectivement $z_i * m' \in \text{Maj } T$
2) $(T,\wedge,\vee)$ est majoré dans G, respectivement minoré dans G $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ est minoré dans G, respectivement majoré dans G (résulte de 1)) ].

proposition 2 : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow$
$\forall i \in I$ : la correspondance $c_i : \begin{array}{l} \text{Maj } T \to \text{Min } T \\ m \to c_i(m) = z_i * m' \end{array}$ est une application bijective ]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :
$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I} \Rightarrow \forall i \in I$ :
1) (prop. 1) $c_i$ est une application
2) [ $\forall n \in \text{Min } T$ : ( $c_i(m) = n \Leftrightarrow z_i * m' = n \Leftrightarrow m' = z_i' * n \Leftrightarrow m = (z_i' * n)' \Leftrightarrow m = z_i * n'$ )] $\Rightarrow \forall n \in \text{Min } T$ : ( $c_i(m) = n$ admet une solution unique ) $\Rightarrow c_i$ est une application bijective.

proposition 3 : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :
[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis minoré dans G et non majoré dans G, respectivement un treillis majoré dans G et non minoré dans G $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ n'est pas Z-complémenté ]
cette proposition est la contraposée de la proposition 1, 2).

2.1.2.2 Borne supérieure, borne inférieure

proposition 1 : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :
[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ $\Rightarrow$
$\forall i \in I$ :
[ sup T est borne supérieure (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ dans G, respectivement inf T est borne inférieure (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ dans G $\Rightarrow$
inf T $= z_i * (\text{sup } T)'$ est borne inférieure unique de $(T,\wedge,\vee)$ dans G, respectivement sup T $= z_i * (\text{inf } T)'$ est borne supérieure unique de $(T,\wedge,\vee)$ dans G ]]
en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :
$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ $\Rightarrow \forall i \in I$ :
[ sup T est borne supérieure (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ dans G, respectivement inf T est borne inférieure (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ dans G $\Rightarrow$

1) sup T $\in$ Maj T et $\forall m \in$ Maj T : ( sup T $\leqslant m \Leftrightarrow m' \leqslant (\text{sup } T)' \Leftrightarrow$
$z_i * m' \leqslant z_i * (\text{sup } T)'$ ), respectivement inf T $\in$ Min T et
$\forall n \in$ Min T : ( $n \leqslant$ inf T $\Leftrightarrow z_i * (\text{inf } T)' \leqslant z_i * n'$ ) $\Rightarrow$
$z_i * (\text{sup } T)' \in$ Min T et (2.1.2.1 prop. 2) $\forall z_i * m' \in$ Min T :
( $z_i * m' \leqslant z_i * (\text{sup } T)'$ ), respectivement $z_i * (\text{inf } T)' \in$ Maj T
et $\forall z_i * n' \in$ Maj T : ( $z_i * (\text{inf } T)' \leqslant z_i * n'$ ) $\Rightarrow$
inf T $= z_i * (\text{sup } T)'$ est borne inférieure de $(T,\wedge,\vee)$ dans G, respectivement sup T $= z_i * (\text{inf } T)'$ est borne supérieure de $(T,\wedge,\vee)$ dans G

2) (de 1) et de l'unicité de la borne supérieure et de la borne inférieure d'une partie non vide d'un ensemble ordonné)
inf T $= z_i * (\text{sup } T)'$ est borne inférieure unique de $(T,\wedge,\vee)$ dans G, respectivement sup T $= z_i * (\text{inf } T)'$ est borne supérieure unique de $(T,\wedge,\vee)$ dans G ].

<u>proposition 2</u> : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i\in I}$ $\Rightarrow$ [ sup T est borne supérieure (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ dans G, respectivement inf T est borne inférieure (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ dans G $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par z ]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i\in I}$ $\Rightarrow$ [ sup T est borne supérieure (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ dans G, respectivement inf T est borne inférieure (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ dans G $\Rightarrow$ (prop. 1) inf T = $z_i$ * (sup T)' est borne inférieure unique de $(T,\wedge,\vee)$ dans G, respectivement sup T = $z_i$ * (inf T)' est borne supérieure unique de $(T,\wedge,\vee)$ dans G $\Rightarrow$ $\forall i\in I$ : les $z_i$ * (sup T)', respectivement les $z_i$ * (inf T)' sont égaux $\Rightarrow$ $\forall i\in I$ : les $z_i$ sont égaux $\Rightarrow$ $\{z_i\}_{i\in I}$ est un singleton $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par z (= $z_i$) ].

<u>remarque 1</u> :

La réciproque de la proposition 2 est fausse; l'exemple suivant le montre : le treillis $T = \{x : x\in\mathbb{Q} \text{ et } x^2 \leqslant 2\}$ est Z-complémenté par + et par z = 0 et n'a pas de borne supérieure et de borne inférieure.

<u>proposition 3</u> : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i\in I}$ et ( sup T est borne supérieure de $(T,\wedge,\vee)$ dans G ou inf T est borne inférieure de $(T,\wedge,\vee)$ dans G ) $\Rightarrow$ z = sup T * inf T ]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i\in I}$ et ( sup T est borne supérieure de $(T,\wedge,\vee)$ dans G ou inf T est borne inférieure de $(T,\wedge,\vee)$ dans G ) $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par z et ( inf T = z * (sup T)' ou sup T = z * (inf T)' $\Rightarrow$ z = sup T * inf T.

<u>remarque 2</u> :

La proposition "$(T,\wedge,\vee)$ a une borne inférieure dans G et n'a pas de borne supérieure dans G, respectivement $(T,\wedge,\vee)$ a une borne supérieure dans G et n'a pas de borne inférieure dans G $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ n'est pas Z-complémenté" est fausse; le contre-exemple suivant le montre : le treillis $T = \{x : x \in \mathbb{Q}$ et $0 \leqslant x$ et $x^2 \leqslant 2\}$, sous-treillis de $(\mathbb{R},+)$, est Z-complémenté par + et par $z = \sqrt{2}$, il a une borne inférieure et n'a pas de borne supérieure.

2.1.2.3 Elément universel, élément nul

proposition 1 : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ $\Rightarrow$

$\forall i \in I$ :

[ u est élément universel (unique) de $(T,\wedge,\vee)$, respectivement 0 est élément nul (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ $\Rightarrow$ $0 = z_i * u'$ est élément nul unique de $(T,\wedge,\vee)$, respectivement $u = z_i * 0'$ est élément universel unique de $(T,\wedge,\vee)$ ]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ $\Rightarrow$ $\forall i \in I$ :

[ u est élément universel (unique) de $(T,\wedge,\vee)$, respectivement 0 est élément nul (unique) de $(T,\wedge,\vee)$ $\Rightarrow$

1) u = sup T dans G et $u \in T$, respectivement 0 = inf T dans G et $0 \in T \Rightarrow z_i * u' = \inf T$ et $z_i * u' = \bar{u}_i \in T$, respectivement $z_i * 0' = \sup T$ et $z_i * 0' = \bar{0}_i \in T \Rightarrow 0 = z_i * u'$ est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$, respectivement $u = z_i * 0'$ est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$

2) (de 1) et de 2.1.2.2 prop. 1) $0 = z_i * u'$ est élément nul unique de $(T,\wedge,\vee)$, respectivement $u = z_i * 0'$ est élément universel unique de $(T,\wedge,\vee)$ ].

proposition 2 : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ $\Rightarrow$

[ u est élément universel (unique) de $(T,\wedge,\vee)$, respectivement 0 est élément nul unique de $(T,\wedge,\vee)$ $\Rightarrow$ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par $*$ et par z ]]

en effet : $\forall (T,\wedge,\vee)$ :

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par $*$ et par $(z_i)_{i \in I}$ $\Rightarrow$

[ u est élément universel (unique) de $(T,\wedge,\vee)$, respectivement 0 est élément nul (unique) de $(T,\wedge,\vee) \Rightarrow \sup T = u$, respectivement $\inf T = 0 \Rightarrow$ (2.1.2.2 prop. 2) $(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par z ($= z_i$) ].

<u>remarque 1</u> :

La réciproque de la proposition 2 est fausse (voir remarque 1 sous 2.1.2.2).

<u>proposition 3</u> : $\forall\,(T,\wedge,\vee)$ :

[ $(T,\wedge,\vee)$ est un treillis Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et ( u est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$ ou 0 est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$) $\Rightarrow z = u * 0$ ]

en effet : $\forall\,(T,\wedge,\vee)$ :

$(T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par $(z_i)_{i \in I}$ et ( u est élément universel de $(T,\wedge,\vee)$ ou 0 est élément nul de $(T,\wedge,\vee)$) $\Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ est Z-complémenté par * et par z et ( $0 = z * u'$ ou $u = z * 0'$ ) $\Rightarrow$ $z = u * 0$.

<u>remarque 2</u> :

La proposition "$(T,\wedge,\vee)$ a un élément nul et n'a pas d'élément universel, respectivement $(T,\wedge,\vee)$ a un élément universel et n'a pas d'élément nul $\Rightarrow (T,\wedge,\vee)$ n'est pas Z-complémenté" est fausse; le contre-exemple suivant le montre : le treillis $T = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leqslant x \text{ et } x^2 \leqslant 2\}$ , sous-treillis de $(\mathbb{R},+)$, est Z-complémenté par + et par $z = \sqrt{2}$, il a un élément nul 0 et n'a pas d'élément universel.