G.MYCEK
Université Claude Bernard (LYON I)
Séminaire de Mathématique Floue (Prof. D. Ponasse)
Département de Mathématiques
43, Boulevard du 11 novembre 1918
69622, VILLEURBANNE Cedex - France.

DEUX CATEGORIES ISOMORPHES D'ENSEMBLES TOTALEMENT FLOUS QUI SONT DES TOPOS

Cet article est une version résumée de la thèse de 3ème cycle (/3/) soutenue en octobre 1983, qui consiste essentiellement à montrer que les catégories JTF de D.PONASSE (/5/) et SetJ de HIGGS sont isomorphes et que la catégorie JTF est un topos lorsque J est un anti-ordinal.

L'article précédant immédiatement celui-ci dans le présent numéro de BUSEFAL décrit entièrement la catégorie JTF et nous n'y reviendrons pas. Nous reviendrons par contre sur la catégorie SetJ que nous décrivons, puis nous mettrons en évidence un isomorphisme de catégorie. Enfin, on exhibera dans JTF un objet final, des produits finis, un égalisateur, des exponentielles et un classificateur de monomorphismes. Pour les démonstrations, on pourra se reporter à /3/.

I- PRELIMINAIRES

Définition 1

On appelle treillis de Heyting complet (t.H.c) tout treillis complet J vérifiant la propriété suivante : pour toute partie I de J et tout élément j de J : $(\bigvee_{i\in I} i)\wedge j = \bigvee_{i\in I}(i\wedge j)$

Définition 2

On appelle anti-ordinal toute chaine J telle que toute partie non vide admette un plus grand élément, c'est-à-dire : pour toute partie non vide I de J, il existe $i_o \in I$ tel que $i_o = \bigvee_{i\in I} i$.

Remarques

. Si J est un t.H.c., on a : $(\bigvee_{i\in I} i)\wedge(\bigvee_{i'\in I'} i') = \bigvee_{\substack{i\in I\\ i'\in I'}} (i\wedge i')$

. Toute chaine finie est un anti-ordinal.

. Tout anti-ordinal est un t.H.c.

II- LA CATEGORIE SetJ

Nous allons nous contenter ici de la décrire. Les démonstrations se trouvent dans /3/. Remarquons qu'il faut supposer ici que J est un t.H.c.

. Les objets de SetJ sont les ensembles totalement flous (/5/).

. Les morphismes de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$ sont les applications f de A×B dans J vérifiant :

H1) $\sigma(x,x')\wedge f(x,y) \leq f(x',y)$

H2) $\tau(y,y')\wedge f(x,y) \leq f(x,y')$

H3) $f(x,y)\wedge f(x,y') \leq \tau(y,y')$

H4) $\bigvee_{y\in B} f(x,y) = \alpha(x)$

N.B. Il en résulte immédiatement : $f(x,y) \leq \alpha(x)\wedge\beta(y)$.

. Le morphisme identité de $\underline{A}$ dans $\underline{A}$ est σ.

. La composée de deux morphismes : f de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$ et g de $\underline{B}$ dans $\underline{C}$ est $g\circ f$ définie par : $g\circ f(x,z) = \bigvee_{y\in B}(f(x,y)\wedge g(y,z))$.

Remarques

1) Puisque σ est l'identité de $\underline{A}$ et τ l'identité de $\underline{B}$, on a, pour un morphisme f de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$: $f\circ\sigma = f$ et $\tau\circ f = f$, ce qui se traduit par :

H'1) $\bigvee_{x\in A}(\sigma(x,x')\wedge f(x,y)) = f(x',y)$

H'2) $\bigvee_{y\in B}(\tau(y,y')\wedge f(x,y)) = f(x,y')$

et le système de conditions H1,H2,H3,H4 est équivalent au système H'1,H'2,H3,H4.

2) Soient f et g deux morphismes de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) pour tout $y \in B$: $f(x,y) \leq g(x,y)$ (x fixé)

b) pour tout $y \in B$: $f(x,y) = g(x,y)$

En effet, il suffit de montrer que a) implique b) :

$$f(x,y) = \bigvee_{y'} (f(x,y') \wedge \tau(y,y'))$$

$$\geq \bigvee_{y'} (f(x,y') \wedge g(x,y') \wedge g(x,y)) \qquad \text{car } g \text{ vérifie H3}$$

$$= \bigvee_{y'} (f(x,y') \wedge g(x,y)) \qquad \text{d'après a)}$$

$$= g(x,y) \wedge \bigvee_{y'} f(x,y') \qquad \text{car J est un t.H.c.}$$

$$= g(x,y) \wedge \alpha(x) \qquad \text{car } f \text{ vérifie H4}$$

$$= g(x,y)$$

Caractérisation des monomorphismes

Soit f un morphisme de A dans B, alors f est un monomorphisme si et seulement si la conditions suivante est vérifiée :

(1) $f(x,y) \wedge f(x',y) \leq \sigma(x,x')$ pour tout $y \in B$.

Remarquons que cette condition est équivalente à la suivante :

(2) $\bigvee_{y \in B} (f(x,y) \wedge f(x',y)) = \sigma(x,x')$

En effet, (2) implique (1) trivialement, réciproquement si on a (1) :

$$\sigma(x,x') \geq \bigvee_{y \in B} (f(x,y) \wedge f(x',y))$$

$$\geq \bigvee_{y \in B} (f(x,y) \wedge f(x,y) \wedge \sigma(x,x')) \qquad \text{d'après H1}$$

$$= \bigvee_{y \in B} (f(x,y)) \wedge \sigma(x,x') \qquad \text{car J est un t.H.c.}$$

$$= \alpha(x) \wedge \sigma(x,x') \qquad \text{d'après H4}$$

$$= \sigma(x,x')$$

On retrouve donc la condition (2).

Proposition

SetJ ainsi décrite forme une catégorie.

On peut consulter les démonstrations dans /3/.

De nombreux auteurs utilisent le fait que SetJ est un topos. Ceci a été démontré en utilisant la théorie des faisceaux. La suite a pour but de montrer que SetJ et JTF sont isomorphes, puis de montrer pas à pas que JTF est un topos, ce qui prouve également que SetJ est un topos. De plus, grâce à cet isomorphisme, nous pourrons construire effectivement dans SetJ un objet final, des produits finis, des égalisateurs, des exponentielles et un classificateur de monomorphismes. Notons cependant plusieurs points. L'isomorphisme n'est réalisé qu'en restreignant le treillis J à un anti-ordinal. De plus, dans ma thèse (/3/), je ne suis pas parvenu à exhiber les exponentielles et le classificateur de monomorphismes de SetJ. Par contre, après avoir trouvé les autres caractéristiques de SetJ (objet final, produits finis, égalisateurs), j'ai réussi à montrer directement que les résultats obtenus sont encore valables lorsque J est un t.H.c. Il parait donc possible d'exhiber les deux autres points et il semble (cela reste évidemment à montrer) que l'on peut prendre pour J un t.H.c. Malheureusement, vu la longueur des démonstrations dans JTF, il semble qu'il en serait de même dans SetJ et il ne m'a pas été matériellement possible d'achever le travail.

III- ISOMORPHISME ENTRE SetJ ET JTF

On définit deux foncteurs, l'un de JTF dans SetJ, l'autre de SetJ dans JTF, de la façon suivante :

. Les objets sont inchangés.

. A tout morphisme R de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$ au sens de JTF, on associe l'application $\hat{R}$ de $A\times B$ dans J définie par : $\hat{R}(x,y) = \alpha(x) \wedge \bigvee_{y'\in Rx} \tau(y,y')$

. A tout morphisme f de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$ au sens de SetJ, on associe la relation binaire $\check{f}$ de A vers B définie par :

$x\check{f}y$ si et seulement si $f(x,y) = \alpha(x)$.

Théorème

Si J est un anti-ordinal, les catégories JTF et SetJ sont isomorphes (l'isomorphisme étant celui décrit ci-dessus).

On montre donc dans /3/ les propriétés suivantes :

. $\hat{R}$ est un morphisme de SetJ et $\check{f}$ un morphisme de JTF.

. $\hat{i}_A = \alpha$ et $\check{\alpha} = i_A$ (conservation de l'identité).

. $\widehat{SR} = \hat{S}\circ\hat{R}$ et $\widecheck{g\circ f} = \check{g}\check{f}$ (conservation de la composition).

. $(\hat{R})^{\vee} = R$ et $(\check{f})^{\wedge} = f$ (les deux foncteurs sont réciproques l'un de l'autre).

Remarquons que le résultat n'est valable que si J est un anti-ordinal. En effet, si J n'est pas un anti-ordinal, $\check{f}$ n'est pas en général un morphisme de JTF (il ne vérifie pas r1 : $\check{f}x \neq \emptyset$). En effet, il n'y a aucune raison pour qu'il existe $y \in B$ tel que $f(x,y) = \alpha(x)$, alors que si J est un anti-ordinal, cette condition est réalisée grâce à H4.
Pour plus de précisions, un contre-exemple est donné dans /3/.

IV- JTF EST UN TOPOS

Théorème

Si J est un anti-ordinal, JTF est un topos.

Il s'agit d'exhiber pas à pas certaines propriétés décrites clairement dans /2/ par J.C. CARREGA.

1) JTF possède un objet final : $\mathbb{1} = (\{p\},1,1)$
où $\{p\}$ est un singleton quelconque et $1(p,p) = 1(p) = 1$.
Si $\underline{A} = (A,\alpha,\sigma)$ est un ensemble totalement flou, l'unique morphisme R de $\underline{A}$ dans $\mathbb{1}$ est défini par : pour tout $a \in A$ on a aRp.

2) Dans JTF les produits finis existent :
$\underline{A}\times\underline{B} = (A\times B,\delta,\varepsilon)$ où $\varepsilon((a,b),(a',b')) = \sigma(a,a')\wedge\tau(b,b')$.
Les projections p_A de $\underline{A}\times\underline{B}$ dans $\underline{A}$ et p_B de $\underline{A}\times\underline{B}$ dans $\underline{B}$ sont définies par :
$(x,y)p_A x'$ si et seulement si $\varepsilon((x,y),(x',y)) = \alpha(x)\wedge\beta(y)$
(i.e. $\sigma(x,x')\wedge\beta(y) = \alpha(x)\wedge\beta(y)$)
$(x,y)p_B y'$ si et seulement si $\varepsilon((x,y),(x,y')) = \alpha(x)\wedge\beta(y)$
(i.e. $\alpha(x)\wedge\tau(y,y') = \alpha(x)\wedge\beta(y)$)

3) Dans JTF, tout diagramme $\underline{A} \overset{S}{\underset{T}{\rightrightarrows}} \underline{B}$ possède un égalisateur.

On pose $\underline{C} = (C,\gamma,\rho)$ avec $C = A$ et
$\rho(a,a') = \sigma(a,a')\wedge\bigvee(\tau(b,b')\wedge\tau(y,y'))$ pour $b \in Sa$, $b' \in Ta$, $y \in Sa'$ et $y' \in Ta'$.
On définit R par : cRa ssi $\gamma(c) \leq \sigma(c,a)\wedge\bigvee\tau(b,b')$ pour $b \in Sa$ et $b' \in Ta$.
On a alors $SR = TR$ et, s'il existe $\underline{D}$ et un morphisme R' de $\underline{D}$ dans $\underline{A}$

vérifiant $SR' = TR'$, il existe un unique morphisme R'' de $\underline{D}$ dans $\underline{C}$ tel que $RR'' = R'$

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[r, "R"] & \underline{A} \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[r, shift right, "S"'] & \underline{B} \\ & \underline{D} \arrow[ul, "R''"] \arrow[u, "R'"'] & \end{tikzcd}$$

4) JTF possède des exponentielles.

On définit $\underline{B}^{\underline{A}} = (B^A, \theta, \varepsilon)$ où B^A est l'ensemble des relations binaires de A vers B vérifiant :

r1) $Ra \neq \emptyset$

r3) Si aRb et $\alpha(a) \leq \tau(b,b')$, alors aRb'.

Si λ et λ' sont des éléments de B^A, on pose :

$M(\lambda,\lambda') = \{ j \in J \,/ (a\lambda b$ et $a'\lambda' b')$ implique $\sigma(a,a') \wedge j \leq \tau(b,b')\}$

et $\theta(\lambda,\lambda') = \bigvee j$ pour $j \in M(\lambda,\lambda')$.

Remarquons que si λ est un morphisme de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$, alors $M(\lambda,\lambda) = J$, donc $\varepsilon(\lambda) = \theta(\lambda,\lambda) = 1$.

Le morphisme évaluation de $\underline{A} \times \underline{B}^{\underline{A}}$ dans $\underline{B}$ est e défini par :

$(a,\lambda) e b$ si et seulement si il existe b' tel que $a\lambda b'$ et

$\alpha(a) \wedge \varepsilon(\lambda) \leq \tau(b,b')$.

5) JTF possède un classificateur de monomorphismes.

Le classificateur est $\underline{\Omega} = (J, \theta, \varepsilon)$

où $\theta(j,j') = j \wedge j'$ si $j \neq j'$

$= 1$ si $j = j'$

Le morphisme vrai v de $\mathcal{U}$ dans $\underline{\Omega}$ est défini par :

pvs si et seulement si $s = 1$.

Si R est un monomorphisme de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$, le morphisme $\overline{R}$ de $\underline{B}$ dans $\underline{\Omega}$ classifiant R est défini par :

- Si $b \in RA$, $b\overline{R}j$ si et seulement si $j \wedge \beta(b) = \bigvee \alpha(a) \vee \bigvee \tau(b,y)$ pour $a \in R^{-1}b$, $y \in R(R^{-1}b)$ et $R^{-1}y \neq R^{-1}b$.
- Si $b \notin RA$, $b\overline{R}j$ si et seulement si $j \wedge \beta(b) = \bigvee \tau(b,y)$ pour $y \in RA$.

Remarque

Il est possible de définir le classifiant $\overline{R}$ de manière beaucoup plus simple :

On définit, pour tout $b \in B$, le degré de b par :

$$Db = \bigvee_{y \in RA} (\tau(b,y) \wedge \bigvee_{a \in R^{-1}y} \alpha(a))$$

R est alors défini par :

bRj si et seulement si $\beta(b) \leq \theta(Db,j)$.

On montre alors que $\overline{R}$ vérifie les proriétés exigées.

La démonstration ne se trouve pas dans /3/, elle m'a été communiquée oralement par M. WU Tao, que je tiens ici à remercier.

'-'-'-'-'

REFERENCES

/1/ BLANC G. : Préfaisceaux et ensembles flous (non publié).

/2/ CARREGA J.C. : Topos et ensembles flous.
Séminaire Mathématique Floue, Lyon I, 1980-1981.

/3/ MYCEK G. : Deux topos isomorphes d'ensembles totalement flous.
Thèse 3ème cycle, Lyon I, 1983.

/4/ PONASSE D. : Quelques remarques sur les ensembles totalement flous.
Séminaire Mathématique Floue, Lyon I, 1982-1983.

/5/ PONASSE D. : Une nouvelle conception des ensembles flous.
BUSEFAL (présent numéro).

/6/ RANDRIAMAHALEO S. : Ensembles totalement flous et topos.
Thèse 3ème cycle, Lyon I, 1982.