

D. PONASSE

Université Claude Bernard (LYON I)

Département de Mathématiques

43, Boulevard du 11 novembre 1918

69622, VILLEURBANNE Cedex - France.

UNE NOUVELLE CONCEPTION DES ENSEMBLES FLOUS

INTRODUCTION

1- Le concept le plus simple (et sans doute le plus utilisé) est celui de sous-ensemble flou d'un référentiel E fixé, E étant un ensemble (au sens classique) non vide : toute application \tilde{A} de E dans l'intervalle réel $I =]0, 1[$. Une généralisation possible consiste à remplacer l'intervalle I par un treillis ayant de "bonnes" propriétés.

2- On peut se libérer de la contrainte du référentiel et définir la notion d'ensemble flou. Pour cela, on se donne un ensemble ordonné J des valeurs d'appartenance, généralement J est une algèbre de Heyting complète, un ensemble flou est alors tout couple $\tilde{A} = (A, \alpha)$ formé d'un ensemble ordinaire A et d'une application α (fonction d'appartenance) de A dans J . Un morphisme, ou application floue, de $\tilde{A} = (A, \alpha)$ dans $\tilde{B} = (B, \beta)$ est alors toute application ordinaire f de A dans B vérifiant pour tout $a \in A$: $\alpha(a) \leq \beta(f(a))$.

On obtient ainsi une catégorie ($/1/, /2/$) possédant un certain nombre de propriétés ($/3/$) : existence d'objet final, de produits finis, d'exponentielles, d'égalisateur. Mais elle ne possède pas de classificateur de sous-objets et ne constitue donc pas un topos.

Une définition différente, mais en fait équivalente, d'ensembles flous a été donnée par M. Eytan ($/4/$) dans l'espoir d'obtenir un topos (FuzH); malheureusement ceci n'est valable que lorsque H est une algèbre de Boole ($/5/, /6/, /3/$).

3- Une autre façon de concevoir les ensembles flous consiste à moduler (ou fuzzyfier, si on préfère) non seulement la relation d'appartenance (x appartient à A avec un certain degré de possibilité λ), mais de moduler

également la relation d'égalité (x et y sont indiscernables à un certain degré λ). Différentes recherches ont été faites dans ce sens (/7/,/8/,/9/). Cette conception est assez naturelle pour un logicien car si l'on souhaite formaliser une théorie des ensembles flous, par analogie avec la théorie classique des ensembles, deux prédicats apparaissent comme nécessaires : l'appartenance (ϵ) et l'égalité (=), et il n'y a aucune raison a priori d'en moduler un sans moduler l'autre.

Un avantage de cette méthode est que l'on obtient ainsi une catégorie qui est généralement un topos. Evidemment deux questions se posent : qu'est-ce qu'un topos ? Pourquoi un topos ? Nous n'entrerons pas ici dans les détails, signalons simplement qu'un topos est une catégorie possédant une logique interne, c'est-à-dire qu'en utilisant uniquement le langage catégorique on peut retrouver les propriétés usuelles de type ensembliste (inclusion, intersection,...) et ensuite définir des connecteurs logiques qui leurs correspondent.

Dans cet article, nous nous contentons de décrire un nouveau type d'ensembles flous, les "ensembles totalement flous" (/10/), qui constitue, nous semble-t-il, une simplification importante des recherches citées précédemment (/7/,/8/,/9/).

ENSEMBLES TOTALEMENT FLOUS

On fixe une fois pour toutes un treillis J (qui peut être $[0,1]$) qui jouera le rôle d'ensemble des valeurs d'appartenance et des valeurs d'indiscernabilité.

Définition

Un ensemble totalement flou sur J (en abrégé : ensemble J-tf) est tout triplet $A = (A, \alpha, \sigma)$ où :

- . A est un ensemble quelconque au sens usuel.
- . α est une application de A dans J, appelée fonction d'appartenance.
- . σ est une application de A^2 dans J, appelée fonction d'indiscernabilité.

Avec les trois axiomes :

- e1) $\sigma(x,x) = \alpha(x)$ ("réflexivité")
- e2) $\sigma(x,x') = \sigma(x',x)$ ("symétrie")
- e3) $\sigma(x,x') \wedge \sigma(x',x'') \leq \sigma(x,x'')$ ("transitivité")

Autrement dit, σ est une relation d'équivalence floue dans l'ensemble flou $\tilde{A} = (A, \alpha)$.

$\sigma(x,x')$ mesure le degré d'indiscernabilité de x et x' .

Remarque

Il résulte immédiatement de ces définitions, la propriété :

$$\sigma(x,x') \leq \alpha(x) \wedge \alpha(x')$$

RELATIONS TOTALEMENT FLOUES

Nous définissons ici une notion de morphisme entre ensembles J-tf qui généralise celle d'application floues.

Définition

Soient $\underline{A} = (A, \alpha, \sigma)$ et $\underline{B} = (B, \beta, \tau)$ deux ensembles J-tf, une relation R totalement floue (en abrégé : relation J-tf) de \underline{A} vers \underline{B} sera toute relation binaire (au sens classique) de A vers B vérifiant les trois axiomes :

- r1) $Rx \neq \emptyset$ (i.e. pour tout $x \in A$ il existe $y \in B$ tel que xRy)
- r2) $(xRy \text{ et } x'Ry')$ implique $\sigma(x,x') \leq \tau(y,y')$
- r3) $(xRy \text{ et } \alpha(x) \leq \tau(y,y'))$ implique xRy'

Intuitivement, on peut interpréter r2 et r3 par :

- . Si y, y' sont des images de x et x' , alors y et y' sont au moins aussi indiscernables que x et x' .
- . Si y est image de x et si y' est suffisamment indiscernable de y , alors y' est aussi image de x .

Remarque

De ces définitions résulte immédiatement la propriété :

$$xRy \text{ implique } \alpha(x) \leq \beta(y)$$

ce qui généralise bien la notion d'application floue (/2/).

COMPOSITION DE RELATIONS J-tf

Soient $\underline{A} = (A, \alpha, \sigma) \xrightarrow{R} \underline{B} = (B, \beta, \tau) \xrightarrow{S} \underline{C} = (C, \gamma, \rho)$

1) La composée habituelle $S \circ R$ des relations J-tf R et S, définie par :
 $xS \circ Rz$ si et seulement si : il existe $y \in B$ tel que xRy et ySz
 n'est pas, en général une relation J-tf.

Un exemple est le suivant :

On prend $J = [0,1]$, soit $A = \{x,y,z\}$, on définit sur A les fonctions α
 et σ par : $\alpha(x) = 1/3$ $\alpha(y) = 2/3$ $\alpha(z) = 1$
 $\sigma(x,y) = 1/4$ $\sigma(x,z) = 1/4$ $\sigma(y,z) = 1/2$

Soient R et S les relations de A vers A définies par :

xRy , xRz , yRy , zRz xSy , xSz , ySz , zSz

On vérifie que R et S sont des relations J-tf, leur composée, au sens
 ordinaire, $T = S \circ R$ est définie par : xTz , yTz , zTz

Ce n'est pas une relation J-tf car elle ne vérifie pas r3.

2) On est alors conduit à modifier légèrement la définition habituelle
 et à définir la composée, notée SR, par :

$xSRz$ si et seulement si : il existe $y \in B$ et $z' \in C$ tels que xRy et
 ySz' et $\alpha(x) \leq \rho(z, z')$.

Autrement dit, cela signifie : $xS \circ Rz'$ avec z' suffisamment indiscernable
 de z .

On vérifie alors que SR est bien une relation J-tf.

CATEGORIE JTF

On peut alors définir une catégorie, notée JTF, dans laquelle :

- . Les objets sont les ensembles J-tf.
- . Les morphismes sont les relations J-tf.

On vérifie, en effet, que :

La composition des relations J-tf définie comme ci-dessus est associative.

Pour tout ensemble J-tf, $\underline{A} = (A, \alpha, \sigma)$, il existe un morphisme identité
 qui est la relation $1_{\underline{A}}$ de A vers A définie par :

$x1_{\underline{A}}x'$ si et seulement si $\alpha(x) = \sigma(x, x')$.

MONOMORPHISMES DE JTF

soit R une relation J-tf de $\underline{A} = (A, \alpha, \sigma)$ vers $\underline{B} = (B, \beta, \tau)$.

Théorème

Pour que R soit un monomorphisme, il faut et il suffit qu'il vérifie :

aRb et $a'Rb'$ implique $\sigma(a, a') = \alpha(a) \wedge \alpha(a') \wedge \tau(b, b')$

En effet :

1) Supposons que R soit un monomorphisme et aRb et $a'Rb'$.

Posons $\underline{C} = (\{c\}, \gamma, \rho)$ où $\{c\}$ est un singleton quelconque et

$\gamma(c) = (c, c) = \alpha(a) \wedge \alpha(a') \wedge \tau(b, b')$.

Définissons la relation S de $\{c\}$ vers A par :

cSx si et seulement si $\gamma(c) \leq \sigma(x, a)$

On vérifie facilement que S est une relation J-tf de \underline{C} vers \underline{A} .

Il en est de même de la relation T définie par :

cTx si et seulement si $\gamma(c) \leq \sigma(x, a')$

On vérifie que $RS = RT$ et, comme R est un monomorphisme : $S = T$.

On a cSa , donc cTa , soit : $\alpha(a) \wedge \alpha(a') \wedge \tau(b, b') \leq \sigma(a, a')$.

L'inégalité inverse étant triviale, on a donc l'égalité.

2) Supposons avoir la condition du théorème, soient S et T deux relations J-tf d'un ensemble J-tf \underline{C} dans \underline{A} telles que $RS = RT$.

Supposons cSa , $Ra \neq \emptyset$ donc il existe b tel que aRb , par suite $cRSb$, donc aussi $cRTb$, donc :

Il existe a' et b' tels que cTa' , $a'Rb'$ et $\gamma(c) \leq \tau(b, b')$.

aRb et $a'Rb'$ donc $\sigma(a, a') = \alpha(a) \wedge \alpha(a') \wedge \tau(b, b')$

cSa , donc $\gamma(c) \leq \alpha(a)$

cTa' , donc $\gamma(c) \leq \alpha(a')$. En outre $\gamma(c) \leq \tau(b, b')$.

Donc $\gamma(c) \leq \sigma(a, a')$, or cTa' , donc cTa . Il en résulte $S = T$ et donc

R est un monomorphisme.

REFERENCES

- /1/ GOGUEN J.A. : Concept representation in natural and artificial languages : Axioms, extensions and applications for fuzzy sets.
Int.J.Man.Machines studies, 6, 1974.
- /2/ PONASSE D. : Ensembles et applications floues.
Séminaire de Mathématiques Floue, 1979-1980 (Lyon).
- /3/ CARREGA J.C. : The categories Set^H and Fuz^H .
Fuzzy Sets and Systems, 9, 1983.
- /4/ EYTAN M. : Fuzzy sets : a topos-logical point of view.
Fuzzy sets and systems, 5, 1981.
- /5/ PITTS A.M. : Fuzzy sets do not form a topos.
Fuzzy sets and Systems, 8, 1982.
- /6/ PONASSE D. : Some remarks on the category $\text{Fuz}(H)$ of M. Eytan.
Fuzzy Sets and Systems, 9, 1983.
- /7/ HIGGS D. : A category approach to boolean-valued set theory.
(non publié).
- /8/ BLANC G. : Préfaisceaux et ensembles flous.
(non publié).
- /9/ RANDRIAMAHALEO S. : Ensembles totalement flous et topos.
Thèse 3ème cycle, 1982, Lyon.
- /10/ PONASSE D. : Séminaire de Mathématique Floue, 1982-1983, Lyon.