EXTENSION DE QUELQUES NOTIONS D'ALGEBRE COMMUTATIVE AUX SOUS-ENSEMBLES FLOUS

Eric S. TRAORE *

* *Faculté de Médecine de DIJON, 7 Bd Jeanne d'Arc, 21033 DIJON CEDEX*
Département d'Informatique Médicale dirigé par le Professeur agrégé
Liliane DUSSERRE

INTRODUCTION

Nous proposons une approche en théorie des sous-ensembles flous, de certaines notions liées à la structure d'anneau ordinaire, et cela dans l'esprit du théorème de représentation dû à Negoita et Ralescu, esprit selon lequel un objet flou est défini comme une famille d'objets ordinaires emboîtés.

Ensuite une caractérisation de l'objet est donnée en termes de degrés d'appartenance. Cette caractérisation est souvent plus conforme à l'idée intuitive donnée par la définition ordinaire.

Dans ce qui suit, X muni des deux lois "+" et "." est un anneau commutatif unitaire ; "0" et "e" sont les éléments neutres respectifs pour "+" et ".".

L'ensemble $\tilde{\mathcal{P}}$ des sous-ensembles flous de X est muni des lois induites par "+" et "."

Soit A : $X \longrightarrow [0,1]$ un élément de $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\alpha \in 0,1$;

L'α-coupure de A est le sous-ensemble ordinaire de X,

$A_\alpha = \left\{ x \in X \mid A(x) \geqslant \alpha \right\}$; une partie $A_{\bar{\alpha}}$ <u>non vide</u> de X et telle que $A_{\bar{\alpha}} = \left\{ x \in X \mid A(x) > \alpha \right\}$ est l'α-coupure stricte de A.

1 - Idéaux flous

1.1 - Définition

Un idéal flou de X est un élément de $\tilde{\mathcal{P}}$ tel que tout $A_{\bar{\alpha}}$ est un idéal de X.

Remarque 1.1

Etant donné que pour $\alpha < \alpha'$ $A_{\bar{\alpha}'} \subset A_{\bar{\alpha}}$ on ne peut obtenir par ce procédé une définition d'un idéal flou maximal.

1.2 - Proposition

Un sous-ensemble flou A de X est un idéal flou si et seulement si

$A(x - y) \geqslant \min (A(x), A(y))$
et
$A(x \,.\, y) \geqslant \max (A(x), A(y))$

Preuve :

Condition nécessaire :

- Si $A(x - y) < \min (A(x), A(y))$,
  posons $\alpha = A(x - y)$; alors
  $x \in A_{\bar\alpha}$, y $A_{\bar\alpha}$ et $x + y \notin A_{\bar\alpha}$ et $A_{\bar\alpha}$ ne serait pas un idéal de X

- Si $A(x \,.\, y) < \max(A(x), A(y))$,
  posons $\alpha = \max (A(x), A(y))$.
  On conclut comme précédemment que dans ce cas $A_{\bar\alpha}$ n'est pas un idéal de X.

Condition suffisante :

- Soient x et y deux éléments d'une α- coupure stricte $A_{\bar\alpha}$

  $A(x - y) \geqslant \min(A(x), A(y)) \Longrightarrow x - y \in A_{\bar\alpha}$

- Soit z un élément quelconque de X
  $A(z \,.\, x) \geqslant \max(A(z), A(x)) \Longrightarrow z.x \in A_{\bar\alpha}$

1.3 - Remarques

A étant un idéal flou de X, pour tout $x \in X$ on a $A(0) = A(x - x) \geqslant A(x)$ et $A(x) = A(e \,.\, x) \geqslant \max (A(e), A(x)) \geqslant A(e)$

1.4 - Les idéaux différents de X sont les α- coupures strictes des idéaux flous de X avec $\alpha \geqslant A(e)$

1.5 - Proposition

Un élément x de X est inversible dans X si et seulement si pour tout idéal flou A de X, $A(x) = A(e)$

Preuve :

Condition nécessaire :

- x inversible $\Longrightarrow A(x \,.\, x^{-1}) = A(e) \geqslant \max(A(x), A(e)) \geqslant A(x)$
  moyennant la remarque 1.2 on conclut que $A(x) = A(e)$

Condition suffisante :

- Soit $x \in X$ tel que $A(x) = A(e)$ pour tout idéal flou A ; alors l'idéal $x \,.\, X$ n'est pas propre, sinon on aurait $x \,.\, X = A_{\bar{\alpha}}$ pour un certain idéal flou A et un $\alpha \in [A(e), 1[$, (Remarques 1.3 et 1.4) et par suite $A(x) > A(e)$.
  $x \,.\, X = X \Longrightarrow x$ inversible dans X.

1.6 - Remarque

$A_{\overline{A(e)}}$ est l'idéal maximal, constitué par tous les éléments non inversibles de X, qui contient $A_{\bar{\alpha}}$ pour $\alpha \geqslant A(e)$

2 - Idéaux premier flous

2.1 - Définition

Un idéal flou $\mathcal{P}$ est premier si et seulement si ses α- coupures strictes sont des idéaux premiers de X.

2.2 - Proposition

Un idéal flou $\mathcal{P}$ est premier si et seulement si

$$\mathcal{P}(x \,.\, y) = \max(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y)) \qquad x \in X,\ y \in X$$

Preuve :

Condition nécessaire

- Soit $\mathcal{P}$ idéal flou tel que $\mathcal{P}(x \,.\, y) = \max(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y))$ pour tous $x \in X$ et $y \in X$ et
- Soit $\mathcal{P}_{\bar{\alpha}}$ une α- coupure stricte de $\mathcal{P}$.
  $x \,.\, y \in \mathcal{P}_{\bar{\alpha}} \Longrightarrow \mathcal{P}(x,y) = \max(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y)) > \alpha$
  $x \notin \mathcal{P}_{\bar{\alpha}} \Rightarrow \mathcal{P}(x,y) = \mathcal{P}(y) > \alpha$ et d'où $y \in \mathcal{P}_{\bar{\alpha}}$ et $\mathcal{P}_{\bar{\alpha}}$ est premier.

Condition suffisante :

- Supposons $\mathcal{P}_{\bar{\alpha}}$ premier pour tout $\alpha \in [0,1[$;
pour $x \in X$ et $y \in X$ posons $\alpha = \max(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y))$

si $\mathcal{P}(x \cdot y) > \alpha$ alors $x \cdot y \in \mathcal{P}_{\bar{\alpha}}$ alors que ni x ni y n'est élément de $\mathcal{P}_{\bar{\alpha}}$: ce qui contredit l'hypothèse que $\mathcal{P}_{\bar{\alpha}}$ est premier.

2.3 - Remarque

Un idéal premier ordinaire ne peut contenir le produit de deux éléments que s'il contient l'un au moins de ces éléments.

La proposition 2 montre que le degré d'appartenance d'un produit à un idéal flou premier ne peut excéder les degrés d'appartenance de tous les facteurs du produit.

3 - Parties multiplicatives floues

Rappelons qu'une partie S de X est dite multiplicative si $e \in S$, et $x \cdot y \in S$ chaque fois que x et y sont éléments de S.

3.1 - Définition

Un sous-ensemble flou S de X est une partie multiplicative floue si et seulement si ses α-counures strictes sont des parties multiplicatives de X.

3.2. - Proposition

Un sous-ensemble flou S de X est une partie multiplicative floue si et seulement si

$S(x \cdot y) \geq \min(S(x), S(y)) \quad x \in X, y \in X$

et $S(e) \geq S(x), x \in X$

Preuve :

Condition nécessaire :

- Soit $x \in X$ et $y \in X$
supposons $S(x \cdot y) < \min(S(x), S(y)) = \beta$
pour $\alpha \in]S(x \cdot y), \beta[$ on a $x \in S_{\bar{\alpha}}$, $y \in S_{\bar{\alpha}}$ et $x \cdot y \notin S_{\bar{\alpha}}$
$S_{\bar{\alpha}}$ n'est donc pas une partie multiplicative de X.
Supposons que pour un certain $x \in X$ on ait $\alpha = S(x) \geq S(e)$ alors $e \notin S_{\bar{\alpha}}$ qui ainsi n'est pas une partie multiplicative de X.

Condition suffisante :

Soit x et y deux éléments d'une α- couputre stricte $S_{\bar{\alpha}}$

$S(e) \geqslant S(x) \Longrightarrow e \in S_{\bar{\alpha}}$

$S(x \,.\, y) \geqslant \min(S(x), S(y)) > \alpha \Rightarrow x \,.\, y \in S_{\bar{\alpha}}$

3.3 - Proposition

Un idéal flou $\mathcal{P}$ est premier si et seulement si son complémentaire flou $\overline{\mathcal{P}}$ défini par $\overline{\mathcal{P}}(x) = 1 - \mathcal{P}(x)$ est une partie multiplicative floue.

Preuve :

Condition nécessaire :

- $\mathcal{P}$ idéal premier flou $\Rightarrow \mathcal{P}(e) \leq \mathcal{P}(x)$ pour tout $x \in X$

$\mathcal{P}(e) \leq \mathcal{P}(x) \Longrightarrow \overline{\mathcal{P}}(e) \geqslant \overline{\mathcal{P}}(x)$

$\mathcal{P}(x \,.\, y) = \max(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y)) \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}(x \,.\, y) = 1 - \max(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y))$

$= \min(1 - \mathcal{P}(x), 1 - \mathcal{P}(y)) = \min(\overline{\mathcal{P}}(x), \overline{\mathcal{P}}(y))$

Condition suffisante :

$\overline{\mathcal{P}}(x \,.\, y) \geqslant \min(\overline{\mathcal{P}}(x), \overline{\mathcal{P}}(y)) \Longrightarrow 1 - \mathcal{P}(x \,.\, y) \geqslant 1 - \max(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y))$

d'où $\mathcal{P}(x \,.\, y) \leq \max(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y))$

Puisque $\mathcal{P}$ est un idéal flou cette dernière inégalité est en fait une égalité

Bibliographie

(1) - *Dan RALESCU, A survey of the representation of fuzzy concepts and its applications (Advances in fuzzy set theory and applications - North-Holland Publishing Company, 1979).*

(2) - *Wang Jĭn LIU, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals (Fuzzy stets and systems 8 (1982) - North-Holland Publishing Company).*