J. COULON et J.L COULON

Université LYON I

UNIFORMITES ET PROXIMITES FLOUES ; TOPOLOGIES FLOUES UNIFORMISABLES

§ Rappels :

Soit X un ensemble non vide .

Une <u>uniformité sur X</u> est un ensemble $\mathcal{U}$ de parties de $X \times X$ tel que :

$$\mathcal{U} \neq \emptyset$$

$$U \in \mathcal{U} \rightarrow U \supset \Delta_X = \{(x,x) / x \in X\}$$

$$U \in \mathcal{U} \text{ et } V \supset U \rightarrow V \in \mathcal{U}$$

$$U \in \mathcal{U} \text{ et } V \in U \rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}$$

$$U \in \mathcal{U} \rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$$

$$U \in \mathcal{U} \rightarrow \text{il existe } V \in \mathcal{U} \text{ telle que } VoV \subset U \text{ .}$$

À une uniformité $\mathcal{U}$ sur X , on associe une topologie définie par (1) :

$\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(A)$, où $U(A) = \{x \in X / \exists\, z \in A \text{ , } (z,x) \in U\}$.

On appelle <u>proximité sur X</u> (voir par exemple [3]) toute relation binaire Δ sur $\mathfrak{P}(X)$ tlle que :

$$A \,\Delta\, B \rightarrow B \,\Delta\, A$$

$$(A \cup B) \,\Delta\, C \leftrightarrow A \,\Delta\, C \text{ ou } B \,\Delta\, C \text{ .}$$

$$A \,\Delta\, B \rightarrow A \neq \emptyset \text{ et } B \neq \emptyset \text{ .}$$

$$A \,\not\Delta\, B \rightarrow \text{il existe } E \text{ telle que } A \,\not\Delta\, E \text{ et } (X-E) \,\not\Delta\, B \text{ .}$$

$$A \cap B \neq \emptyset \rightarrow A \,\Delta\, B$$

A une proximité Δ sur X , on associe une topologie définie par (2) :
$x \in \bar{A} \leftrightarrow x \,\Delta\, A$ (x mis pour $\{x\}$) .

★ A une uniformité $\mathfrak{U}$ sur X , on associe une proximité sur X définie par (3) : $A \,\Delta\, B \leftrightarrow \forall\, U \in \mathfrak{U} : U(A) \cap U(B) \neq \emptyset$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \Delta \arrow[d, "(2)"] \\ U \arrow[ur, "(3)"] \arrow[r, "(1)"'] & T \end{tikzcd}$$

De sorte que toute topologie obtenue par (1) à partir d'une uniformité est aussi obtenue par (2) à partir d'une proximité.
Mais on montre par ailleurs que toute topologie obtenue par (2) à partir d'une proximité est complètement régulière (voir par exemple [3]) et on sait qu'alors elle peut être obtenue par (1) à partir d'une uniformité (voir par exemple [2]).

De sorte que, pour une topologie T , il y a <u>équivalence entre</u> :

T est obtenue par (1) à partir d'une uniformité

T est obtenue par (2) à partir d'une proximité

T est complètement régulière.

Dans ces conditions, nous parlerons de <u>topologie uniformisable</u> .

§ 1 Matériel flou utilisé

(1) Soit X un ensemble non vide.
Comme dans [9], on considère la structure floue où les valeurs d'appartenance sont dans $I = [0,1]$. On désignera dans toute la suite par $\alpha \to \alpha^{\star}$ l'involution décroissante $\alpha \to 1-\alpha$ de $[0,1]$, et par $\overset{\star}{\mu}$ la partie floue $x \to 1 - \mu(x)$.

★ Par <u>topologie floue sur X</u> , nous entendrons une topologie floue au sens de Chang [4].

★ Comme Hutton dans [5], on appelle <u>uniformité floue sur X</u> tout ensemble d'application de I^X dans I^X tel que :

$$\mathfrak{D} \subset 2 = \{D \in (I^X)^{(I^X)} \ / \ D(\mu) \supset \mu \ \text{ et } \ D(\bigcup_k \mu^k) = \bigcup_k D(\mu^k)\}$$

$$\mathfrak{D} \neq \emptyset$$

$$D \in \mathfrak{D},\ \Delta \in \mathbf{2} \ \text{ et } \ \Delta \supset D \to \Delta \in \mathfrak{D}$$

$$D \in \mathfrak{D} \ \text{ et } \ E \in \mathfrak{D} \to D \tilde{\wedge} E \in \quad , \text{ où } \ (D \tilde{\wedge} D)(\mu) = \bigcap_{\nu \cup \rho = \mu} [D(\nu) \cup E(\rho)]$$

$$D \in \mathfrak{D} \to D^{-1} \in \mathfrak{D}, \text{ où } \ D^{-1}(\mu) = \bigcap_{D(\overset{\star}{\rho}) \subset \overset{\star}{\mu}} \rho$$

$$D \in \mathfrak{D} \to \text{il existe } \ \Delta \in \mathfrak{D} \ \text{ telle que } \ \Delta \circ \Delta \subset D \ , \text{ où}$$

$$D_2 \circ D_1(\mu) = D_2[D_1(\mu)]$$

A une uniformité floue sur X , on associe une topologie floue par (4) :

$$\ddot{\mu} = \bigcap_{\exists D \in \mathfrak{D},\ D(\overset{\star}{\rho}) \subset \overset{\star}{\mu}} \rho \ .$$

★ Comme notion de proximité floue sur X , nous prendrons la notion de <u>L-P proximité floue sur X</u> que nous avons introduite dans [8] , moins restritive que la notion de proximité floue introduite par Katsaras.

Rappelons qu'une L-P proximité floue sur X est une relation binaire δ sur X telle que :

$$\mu \delta \nu \to \nu \delta \mu$$

$$(\mu \cup \nu)\ \delta \rho \leftrightarrow \mu \delta \rho \ \text{ ou } \ \nu \delta \rho$$

$$\mu \delta \nu \to \mu \neq \emptyset \ \text{ et } \ \nu \neq \emptyset$$

$$\mu \not\delta \nu \to \text{il existe } \ \lambda \in I^X \ \text{ telle que } \ \mu \not\delta \lambda \ \text{ et } \ \overset{\star}{\lambda} \not\delta \nu$$

$$\mu q \nu \to \mu \delta \nu$$

où $\mu q \nu \leftrightarrow \exists x \in X \ , \ \mu(x)+\nu(x) > 1 \Leftrightarrow \mu \not\subset \nu^{\star} \Leftrightarrow \nu \not\subset \mu^{\star}$ (relation de "q-coincidence" déjà utilisée par Liu-Ying-Ming et Pu Pao-Ming dans [7]) .

A une L-P proximité floue δ sur X , on associe une topologie floue sur X par (5) : $\bar{\mu} = \bigcap_{\rho \not\delta \mu} \rho^{\star}$. A une uniformité floue $\mathfrak{D}$ sur X , on associe une L-P proximité floue sur X par (6) : $\mu\delta\nu \Leftrightarrow \forall D \in \mathfrak{D} : D(\mu) \, q \, D(\nu)$ (cf [8]).

(2) Intervalle réel unitaire flou : (cf par exemple Hutton : [5])

★ On désigne par $\mathfrak{J}$ l'ensemble des fonctions $\lambda : R \to I$ croissantes, telles que $t < 0 \to \lambda(t) = 0$ et $t > 1 \to \lambda(t) = 1$, après identification de λ et μ lorsque $\forall t \in R : \lambda(t-) = \mu(t-)$ et $\lambda(t+) = \mu(t+)$, où par définition $\lambda(t-) = \bigvee_{u < t} \lambda(u)$ et $\lambda(t+) = \bigwedge_{u > t} \lambda(u)$.

On munit $\mathfrak{J}$ de la topologie floue ayant pour subbase $\{A_t, B_t \ / \ t \in R\}$, où :

A_t est l'application de $\mathfrak{J}$ dans I définie par $A_t(\lambda) = \lambda(t-)$

B_t est l'application de $\mathfrak{J}$ dans I définie par $B_t(\lambda) = \lambda(t+)^{\star}$

★ Nous dirons qu'un espace topologie flou X est complètement régulier si pour tout ouvert Ω de X il existe une partie L de I^X et une famille $(f_u)_{u \in L}$ telles que :

$$\bigcup_{U \in L} u = \Omega$$

pour tout $u \in L$, f_u est une application continue de X dans $\mathfrak{J}$

pour tout $u \in L$, pour tout $z \in X$:

$$u(z) \leqslant f_u(z)(0+) \leqslant f_u(z)(1-) \leqslant \Omega(z) \ .$$

§2 Résultats déjà prouvés :

* Proposition 1 (J. et J.L. COULON , [8])

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \delta \arrow[dr, "(5)"] & \\ \mathfrak{D} \arrow[ur, "(6)"] \arrow[rr, "(4)"'] & & \tau \end{tikzcd}$$

De sorte que toute topologie floue obtenue à partir d'une uniformité floue peut-être obtenue à partir d'une L-P proximité floue .

* Proposition 2 (B. HUTTON, [5])

Si une topologie floue est complètement régulière, elle peut-être obtenue à partir d'une uniformité floue.

§3 Proposition 3 :

Proposition 3 : Toute topologie floue obtenue par (5) à partir d'une L-P proximité floue est complètement régulière.

* Lemme 1 : Si δ est une L-P proximité floue, $\mu\delta\nu \leftrightarrow \mu\delta\bar{\nu}$ ($\bar{\nu}$ étant l'adhérence de ν au sens de la topologie floue associée par (5) à δ). En effet, $\mu\delta\nu \rightarrow \mu\delta\bar{\nu}$ puisque $\nu \subset \bar{\nu}$; inversement, supposons que $\mu\not\delta\nu$: alors il existe $\lambda \in I^X$ telle que $\mu\not\delta\lambda$ et $\lambda^{\star} \not\delta \nu$. Mais $\bar{\nu} \subset \lambda$ (car pour tout $x \in X$: $\bar{\nu}(x) = \bigwedge_{\rho\not\delta\nu} \overset{\star}{\rho}(x) \leqslant \lambda(x)$), de sorte que $\mu\not\delta\bar{\nu}$.

* notation : introduisons la relation binaire $\lhd$ sur I^X : $\mu \lhd \nu \leftrightarrow \mu\not\delta\overset{\star}{\nu}$.

* remarque : $\mu \lhd \nu \rightarrow \mu \subset \nu$; en effet , $\overset{\star}{\bar{\nu}} = \bigcap_{\rho\not\delta\overset{\star}{\nu}} \overset{\star}{\rho} \subset \overset{\star}{\mu}$; d'où

$\mu \subset (\overline{\nu^{\star}})^{\star} = (\mathring{\nu})^{\star\star} = \mathring{\nu} \subset \nu$

★ <u>Lemme 2</u> : Si $\mu \lhd \nu$, il existe un ouvert λ (au sens de la topologie floue associée par (5) à δ) tel que :

$$\mu \lhd \lambda \lhd \nu \ .$$

En effet, supposons que $\mu \not\delta \nu^{\star}$: il existe $\lambda_1 \in I^X$ telle que $\begin{array}{l} \mu \not\delta \lambda_1^{\star} \\ \lambda_1 \not\delta \nu^{\star} \end{array}$

Posons $\lambda = \mathring{\lambda}_1$.

$\mu \not\delta \lambda^{\star}$ (car si $\mu \delta \lambda^{\star}$, on a $\mu \delta (\mathring{\lambda}_1)^{\star}$, donc $\mu \delta \overline{\lambda_1^{\star}}$, et d'après le lemme 1 $\mu \delta \lambda_1^{\star}$) $\lambda \not\delta \nu^{\star}$ (car si $\lambda \delta \nu^{\star}$, on a a fortiori $\lambda_1 \delta \nu^{\star}$)

★ <u>Preuve de la proposition 3</u> :

Soit τ la topologie floue associée par (5) à une LP proximité floue δ sur X .

Soit Ω un ouvert de X .

(A) Soit $L = \{u \in I^X / u \lhd \Omega\}$. Alors $\Omega = \bigcup\limits_{u \in L} u$

En effet, $\bigcup\limits_{u \in L} u = \bigcup\limits_{u \lhd \Omega} u = \bigcup\limits_{u \not\delta \Omega^{\star}} u = \Big(\bigcap\limits_{u \not\delta \Omega^{\star}} u^{\star} \Big)^{\star} = \overline{\Omega^{\star}}^{\star} = \Omega^{\star\star} = \Omega$

(B) Soit $u \in L$, fixée

Montrons qu'il existe une application $f_u : X \to \mathfrak{J}$ continue et telle que $\forall z \in X$: $u(z) \leqslant f_u(z)(0+) \leqslant f_u(z)(1-) \leqslant \Omega(z)$ (ce qui prouvera la proposition 3).

B)

Soit $D = \left\{ \frac{p}{2^n} \;/\; \begin{array}{l} p \in N \\ n \in N \end{array} \right\}$

Construisons une famille $(F(t))_{t \in D}$ telle que

$$\left| \begin{array}{ll} \text{chaque } F(t) \text{ est un ouvert de } X & \\ t < s \rightarrow F(t) \lhd F(s) & \text{(I)} \\ \bigcup\limits_{t \in D} F(t) = X . & \end{array} \right.$$

Si $t \in D$ et $t > 1$, on pose $F(t) = X$

On pose $F(1) = \Omega$

On choisit pour $F(0)$ un ouvert ω tel que $u \lhd \omega \lhd \Omega$ (dont l'existence est assurée par le lemme 2)

Si $t \in D$ et $0 < t < 1$, si $t = \frac{2m+1}{2^n}$, on construit $F(t)$ par récurrence

[illegible]

$F(\frac{1}{2})$ est un ouvert de X tel que $\omega \lhd F(\frac{1}{2}) \lhd \Omega$

Si $n > 1$, et si les $(F(\frac{k}{2^{n-1}}))_k$ sont construits et sont telles que $F(\frac{k}{2^{n-1}}) \lhd F(\frac{k+1}{2^{n-1}})$,on choisit pour $F(\frac{2m+1}{2^n})$ un ouvert de X tel que $F(\frac{m}{2^{n-1}}) \lhd F(\frac{2m+1}{2^n}) \lhd F(\frac{m+1}{2^{n-1}})$.

On a ainsi $(F(\frac{k}{2^n}))_k$ et on vérifie aisément que $F(\frac{k}{2^n}) \lhd F(\frac{k+1}{2^n})$.

Il est aisé de vérifier que la famille $(F(t))_{t \in D}$ vérifie bien (I).

Posons, pour chaque $z \in X$ et chaque $x \in R$:

$$\boxed{f_u(z)(x) = \sup \{F(t)(z) / t \in D \text{ et } t < x\}}$$

1) Pour tout $z \in X$: $\left| \begin{array}{l} f_u(z)(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \\ f_u(z)(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 1 \\ f_u(z) \text{ est une application croissante de } R \text{ dans } I . \end{array} \right.$

En effet, si $x < 0$: $f_u(z)(x) = \sup \{F(t)(z)/t \in D \text{ et } t < x\} = \sup \emptyset = 0$

si $x > 1$: $f_u(z)(x) = \sup \{F(t)(z)/t \in D \text{ et } t < x\} = 1$, car il existe $t_1 \in D$ tel que $1 < t_1 < x$ (D étant dense dans R^+) et $f_u(z)(x) \geqslant F(t_1)(z) = X(z) = 1$

si $x \leqslant y$, $\{t \in D/ t < x\} \subset \{t \in D/t < y\}$ et $f_u(x) \leqslant f_u(y)$.

2) Par conséquent, pour tout $z \in X$, $f_u(z)$ représente un élément de $\mathcal{J}$ que par abus de langage on notera encore $f_u(z)$. On notera donc encore f_u l'application de X dans $\mathcal{J}$ qui à z associe ce réel flou.

3) Pour tout $z \in X$: $u(z) \leqslant f_u(z)(0+)$.

En effet $u(z) \leqslant \omega(z) = F(0)(z)$; donc pour tout $x > 0$:

$u(z) \leqslant \sup \{F(t)(z)/t \in D \text{ et } t < x \} = f_u(z)(x)$; d'où

$u(z) \leqslant \bigwedge_{x > 0} f_u(z)(x) = f_u(z)(0+)$

4) $f_u(z)(0+) \leqslant f_u(z)(1-)$: évident.

5) $f_u(z)(1-) \leqslant \Omega (z)$.

En effet, pour tout $x < 1$, on a :

pour tout $t \in D$ tel que $t < x$: $t < 1$ et $F(t) \subset F(1) = \Omega$,

d'où $F(t)(z) \leqslant \Omega(z)$ de sorte que $f_u(z)(x) = \sup\{F(t)(z)/t \in D$ et $t < x\} \leqslant \Omega(z)$.

d'où $f_u(z)(1-) = \bigvee_{x < 1} f_u(z)(x) \leqslant \Omega(z)$.

6) $f_u : X \to \mathcal{J}$ est continue.

6- Pour tout $t \in R$, $f_u^{-1}(A_t) = \bigcup_{\substack{\ell \in D \\ \ell < t}} F(\ell)$ (et est donc un ouvert de X)

En effet,

$$f_u^{-1}(A_t)(z) = A_t[f_u(z)] = f_u(z)(t-) = \bigvee_{x<t} f_u(z)(x) = \bigvee_{x<t} \bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z) =$$

$$= \bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < t}} F(\ell)(z) = [\bigcup_{\substack{\ell \in D \\ \ell < t}} F(\ell)](z).$$

6- Pour tout $t \in R$, $f_u^{-1}(B_t^{\star}) = \bigcap_{\substack{\ell \in D \\ \ell > t}} \overline{F(\ell)}$ (et est donc un fermé de X).

En effet, soit $z \in X$:

Posons $\alpha = f_u^{-1}(B_t^{\star})(z) = B_t^{\star}[f_u(z)] = f_u(z)(t+) = \bigwedge_{x>t} f_u(z)(x) =$

$$= \bigwedge_{x>t} \bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z)$$

$$\beta = [\bigcap_{\substack{\ell \in D \\ \ell > t}} \overline{F(\ell)}](z) = \bigwedge_{\substack{\ell \in D \\ \ell > t}} \overline{F(\ell)}(z)$$

Nous allons montrer que, pout tout $\gamma \in I$: $\alpha \geqslant \gamma \leftrightarrow \beta \geqslant \gamma$ (ce qui prouvera bien

que [illegible]

Soit [illegible]

a) supposons que $\alpha \geqslant \gamma$

Alors pour tout $x > t$, $\bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z) \geqslant \gamma$

Soit $\ell \in D$ tel que $\ell > t$. On a donc $\displaystyle\bigvee_{\substack{\ell_1 \in D \\ \ell_1 < \ell}} F(\ell_1)(z) \geqslant \gamma$

or pour tout $\ell_1 \in D$ tel que $\ell_1 < \ell$: $F(\ell_1) \subset F(\ell)$; donc

$\displaystyle\bigcup_{\substack{\ell_1 \in D \\ \ell_1 < \ell}} F(\ell_1) \subset F(\ell) \subset \overline{F(\ell)}$, de sorte que $\overline{F(\ell)}(z) \geqslant \gamma$

b) Supposons que $\beta \geqslant \gamma$

Alors pour tout $\ell \in D$ tel que $\ell > t$: $\overline{F(\ell)}(z) \geqslant \gamma$

Soit $x > t$.

Comme D est dense dans R^+ , il existe $\ell \in D$ et $\ell_1 \in D$ tels que

$t < \ell_1 < \ell < x$.

Puisque $\ell_1 \in D$, $\ell \in D$ et $\ell_1 < \ell$: $F(\ell_1) \lhd F(\ell)$, c'est-à-dire

$F(\ell_1) \not\mathrel{\delta} F(\ell)^{\star}$, mais d'après le lemme 1 : $\overline{F(\ell_1)} \not\mathrel{\delta} F(\ell)^{\star}$, et par conséquent

$\overline{F(\ell_1)} \lhd F(\ell)$, d'où nous retiendrons que $\overline{F(\ell_1)} \subset F(\ell)$.

Il existe donc $\ell \in D$, $\ell < x$ tel que $F(\ell)(z) \geqslant \overline{F(\ell_1)}(z) \geqslant \gamma$

d'où $\displaystyle\bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z) \geqslant \gamma$, et comme ceci a lieu pour tout $x > t$:

$$\bigwedge_{x > t} \bigvee_{\substack{\ell \in D \\ \ell < x}} F(\ell)(z) \geqslant \gamma \ .$$

§4 Conclusion

- Théorème

Soit X un ensemble non vide, muni d'une topologie floue τ . Il y a équivalence entre :

(1) τ peut être obtenue (par (4)) à partie d'une uniformité floue (au sens de Hutton)

(2) τ peut être obtenue (par (5)) à partir d'une LP-proximité floue

(3) τ est complètement régulière (au sens de Hutton).

BIBLIOGRAPHIE JMAA signifie "journal of mathematical analysis and applications"

[1] BOURBAKI : "Topologie générale" (chapitre 1, chapitre 2)

[2] KELLEY J.L.: "général topology" (Van Nostrand company)

[3] NAIMPALLY S.A. et WARRACK B.D. : "proximity spaces" (Cambridge university press , 1970)

[4] CHANG C.L. : "fuzzy topological spaces" JMAA 24, 182 → 190 (1968)

[5] HUTTON B. :"uniformities on fuzzy topological spaces" JMAA 58, 559 → 571 (1977)

[6] LIU YING-MING : "inverse operation on unionpreserving mappings in lattices and its applications to uniform spaces" (preprint)

[7] PU PAO-MING et LIU YING-MING : "fuzzy topology I" JMAA 76 N°2 , 571 → 599 (1980)

[8] COULON J., COULON J.L. : "A propos des topologies, des uniformités et des proximités floues" (1ère partie ; et 2ème partie). BUSEFAL

[9] ZADEH L.A. : "fuzzy sets", inform. and control 8 , 338-353 (1965).