PROGRAMMATION LINEAIRE AVEC DES DONNEES POSSIBILISTES

M.K. LUHANDJULA

Centrum voor Statistiek en Operationeel Onderzoek
Vrije Universiteit Brussel, 1050 Brussel.

1. Introduction

L'hypothèse qui veut que toutes les données intervenant dans un programme linéaire soient connues avec précision est trop contraignante pour être réaliste. D'autre part, l'idée longtemps accréditée et selon laquelle la théorie des probabilités était un recours infaillible, une sorte de panacée universelle, pour toute situation où l'imprécision et l'incertitude sont dans la nature des choses, est en perte de vitesse. Pour utiliser un modèle probabiliste, il faut avoir des garanties formelles quant à la nature fréquentielle des données imprécises en présence. Et même si celles-ci ont un caractère fréquentiel, l'hypothèse de régulation statistique qui stipule que la fréquence d'apparition d'un événement oscille autour d'un nombre donné, lorsque le nombre d'expériences augmente, s'avère fragile par moments.

Fine [3] par exemple montre que cette hypothèse ne se justifie pas pour une donnée fréquentielle dont la complexité de la suite aléatoire correspondante est inférieure à $(\frac{1}{w})-0(\log 1)$ où 1 est la longueur de la suite et w son poids. Les données imprécises en présence de quelque nature qu'elles soient doivent être prises en compte comme telles si elles sont les seules disponibles. D'où l'intérêt de considérer d'autres mesures d'incertain afin de traiter des situations où l'approche probabiliste n'est pas de mise. Je pense ici aux mesures de plausibilité, mesures de crédibilité [12], mesures de possibilité [16]. Dans ce qui suit nous allons nous interesser aux mesures de possibilité qui ont l'avantage d'être en mesure de pouvoir englober dans certains cas des situations aléatoires. En effet, en vertu du principe de consistance de Zadeh qui dit: "Ce qui est probable est possible"; ce qui est descriptible en termes de probabilités peut aussi être étudié de manière générale en termes de possibilités.

2. Programmation linéaire en présence d'informations possibilistes

Par information possibiliste, on entend une information qui donne des éléments sur l'aisance, la facilité avec laquelle des données peuvent prendre certaines valeurs. On peut établir une analogie entre le concept d'information possibiliste et celui d'archétype de Jung [4].

De la même manière que Jung suppose que notre structure mentale est prédisposée à accepter certaines figures archétypiques, de même on peut aussi dire d'une donnée possibiliste qu'elle a une plus ou moins grande facilité à prendre certaines valeurs plutôt que d'autres. Il arrive fréquemment qu'on soit confronté à un problème concret pouvant être formulé en un programme linéaire et où certaines si pas toutes les données sont de nature possibiliste.

La demande dans un problème de production, les dépenses gouvernementales dans un problème d'évaluation d'offre pour ne citer que ces deux exemples, peuvent n' être connus que de manière approximative, leur valeurs dépendant des contraintes ou des stipulations complexes difficiles à expliciter. On peut donc les caractériser par des restrictions floues [17] ou encore en termes plus savants par des distributions de possibilités [16] qui sont des sous-ensembles flous des valeurs a priori possible.

Soit le programme:

$$\begin{cases} \text{Max } cx \\ A_i x = b_i \qquad i=1,\dots,m \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dans un premier temps supposons que seuls les b_i sont caractérisées par des distributions de possibilités Π_{b_i}. En général, il est difficile que Π_{b_i} suffise à exprimer les contraintes qui définissent b_i, d'où on lui adjoint une contrainte supplémentaire D_i, qui peut aussi être un objectif qu'on désire que b_i satisfasse et qui n'est pas pris en compte par Π_{b_i}. Π_{b_i} et D_i étant des sous-ensembles flous d'un même référenciel U_i.

La détermination des fonctions d'appartenance de Π_{b_i} et D_i est une autre question. Néanmoins, on trouve une panoplie d'approches dans la littérature parmi lesquelles la méthode des prototypes déformables de Bremermann, la méthode analytique de Kochen et Badre, la méthode de préférence relative de Saaty, expliquées et commentées dans [2]. Citons aussi l'approche paramétrique de Kuz-min [6].

Avant de proposer quelques méthodes d'attaque au problème (1), nous introduisons le concept de valeur déterministe possible qui sera utilisé par la suite.

3. Valeur déterministe possible (V.D.P.)

Soit une variable, dont le domaine est restreint par une distribution de possibilités Π_X, et soumis à une contrainte supplémentaire A. Π_X et A étant des sous-ensembles flous d'un référentiel U. Nous les supposons sans perte de généralité, des sous-ensembles flous compacts au sens de Lowen [7]. On peut se poser la question légitime de savoir ce qui est raisonable d'attendre comme valeur pour X. Pour ce faire, nous introduisons le concept de valeur déterministe possible de X étant donné A noté $V_p(X\backslash A)$.

Définition: La valeur déterministe de X étant donné A est donné par le relation: $V_p(X\backslash A) = \mu^{-1}_{A\cap\Pi_X}[\text{Haut } (A\cap\Pi_X)]$

où $\mu_{A\cap\Pi_X}$ est la fonction d'appartenance de $A\cap\Pi_X$ et

où le terme entre crochet désigne la hauteur du sous-ensemble flou $A\cap\Pi_X$.

Cette définition appelle quelques commentaires:

a) $\text{Haut } (A\cap\Pi_X) = \sup_{u\in U} \mu_{A\cap\Pi_X}(u)$

A et Π_X étant des sous-ensembles flous compacts, $A\cap\Pi_X$ l'est et le supremum ci-dessus existe bien.

b) La valeur déterministe de X étant donné A peut aussi s'écrire:

$$V_p(X\backslash A) = \mu^{-1}_{A\cap\Pi_X}(\int \mu_A(u) O \Pi_X(.))$$

où $\int_U \mu_A(u) O \Pi_X(.)$ est l'intégrale au sens de Sugeno de μ_A par rapport à la mesure de possibilité Π_X. Ou encore:

$$V_p(X\backslash A) = \mu^{-1}_{A\cap\Pi_X}(\sigma_{A\cap\Pi_X}(U))$$

le terme entre parenthèse étant la contactabilité floue de $A\cap\Pi_X$ [14]

c) Quelque soit la notation utilisée, la valeur déterministe possible de X étant donné A est définie comme étant l'élément du référentiel le plus compatible à la fois avec les contraintes exprimées par A et Π_X.

C'est l'inverse par la fonction d'appartenance de $A \cap \Pi_X$ de ce que Yager [15] appelle valuation possibiliste de A relativement à la distribution Π_X et de ce Kaufmann [5] appelle contingence sup min de A par Π_X.

d) L'image ci-après illustre à perfection le concept de valuer déterministe possible. Considérons une valise avec contour élastique. Supposons que la valise ne puisse supporter que des objets d'un certain poids et ayant une certaine dimension convenable. Supposons en plus que la valise ne contienne qu'un seul objet qui la caractérise; il est raisonable de s'attendre à ce qu'on trouve dans la valise l'élément dont le poids et la dimension cadre le mieux avec les limites de la valise.

e) Si X est simplement restreinte par Π_X alors $V_p(X) = \Pi_X^{-1}(\text{Haut } \Pi_X)$. Ainsi pour le cas d'un nombre flou au sens de Dubois et Prade [2] ; $V_p(X)$ n'est rien d'autre que la valeur moyenne m.

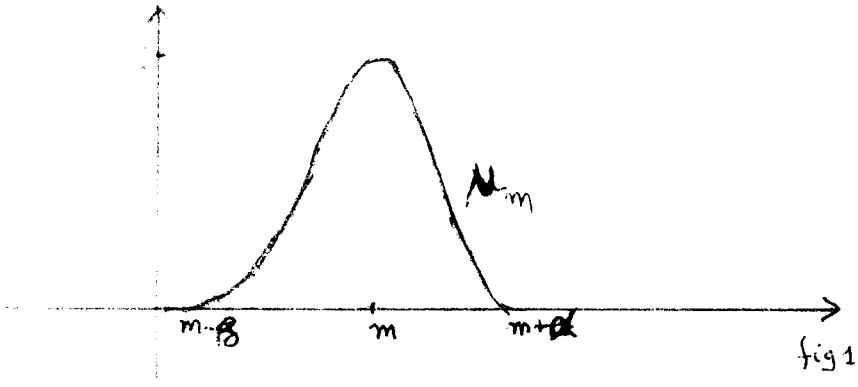

fig 1

f) On peut par induction étendre cette définition pour le cas où X est restreinte par Π_X et des contraintes $A_1,\ldots,A_n$.

$$V_p(X \backslash A_1,\ldots,A_m) = \mu^{-1}_{\Pi_X \cap A_1 \ldots \cap A_n}[\text{Haut } (\Pi_X \cap A_1 \ldots \cap A_n)]$$

<u>Proposition</u>

Soit X une variable restreinte par Π_X et la contrainte A. Supposons que $(\lambda^\circ, \mu^\circ)$ est solution du Programme

$$\begin{aligned} &\text{Max } \lambda \\ &\lambda \leq \Pi_X(u) \\ &\lambda \leq \mu_A(u) \\ &(\lambda,\mu) \in \mathbb{R} \times U \end{aligned} \qquad (2)$$

Alors $V_p(X \backslash A) = \mu^\circ$.

Preuve: $(\lambda^\circ,\mu^\circ)$ solution de (2) ssi

$$\lambda^\circ = \sup_{u\in U} \min (\mu_A(u),\Pi_X(u))$$

u° étant optimal on a:

$$\lambda^\circ = \min (\mu_A(u^\circ),\Pi_X(u^\circ)) = \mu_{A\cap\Pi_X}(u^\circ)$$

et $$\mu^\circ = \mu^{-1}_{A\cap\Pi_X}[\sup_{u\in U} \min (\mu_A(u),\Pi_X(u))] = \mu^{-1}_{A\cap\Pi_X}(\text{Haut } A\cap\Pi_X).$$

Corollaire:

$$V_p(X\backslash A) = \delta_1\Pi_X^{-1}[\text{Haut } (A\cap\Pi_X)] + \delta_2\mu_A^{-1}[\text{Haut } (A\cap\Pi_X)]$$

$$\text{où } \delta_1 = \begin{cases} 1 \text{ si Haut } (A\cap\Pi_X) \in \text{Im}\Pi_X \setminus \text{Im}\mu_A. \\ 1/2 \text{ si Haut } (A\cap\Pi_X) \in \text{Im}\Pi_X \cap \text{Im}\mu_A. \\ 0 \text{ si Haut } (A\cap\Pi_X) \in \text{Im}\mu_A \setminus \text{Im}\Pi_X. \end{cases}$$

δ_2 s'obtient à partir de δ_1 en inversant simplement $\text{Im}\Pi_X$ et $\text{Im}\mu_A$.
$\text{Im}\Pi_X$ et $\text{Im}\mu_A$ désignant image de Π_X et de μ_A respectivement.

4. Quelques approches utilisant le concept de V.D.P. pour le problème (1)

Reprenons pour l'avoir plus près des yeux le problème (1)

$$\begin{cases} \text{Max } cx \\ A_i x = b_i \quad i=1,\dots,m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où b_i est caractérisée par la distribution de possibilité Π_{b_i} et la contrainte D_i.
Nous savons que $V_p(b_i\backslash D_i)$ (que nous notons simplement par la suite $V_p(b_i)$) est la valeur la plus compatible avec les contraintes qui définissent b_i et ipso facto, la possibilité que b_i prenne la valeur $V_p(b_i)$ ou oscille autour de cette valeur est grande.
D'où nous allons adopter la stratégie qui consiste à forcer la solution optimale x^{opt} d'être telle que $A_i x^{opt}$ soit dans un proche voisinage de $V_p(b_i)$.

4.1. Méthode des pénalités

Ici on essaie de pénaliser les écarts entre $A_i x$ et $V_p(b_i)$. Appelons:
γ_i: coût de pénalité au cas où $A_i x$ dépasse $V_p(b_i)$.
δ_i: coût de pénalité au cas où $A_i x$ est inférieur à $V_p(b_i)$.

Pour expliquer ce que représente ces coûts, reprenons l'exemple du problème de production:

$A_i x$ dépasse $V_p(b_i)$ peut s'interpréter comme ceci:
Il est fort possible que la production dépasse la demande. Il faut donc prévoir un coût supplémentaire de stockage par exemple. γ_i représente ce coût.
De même $A_i x$ est inférieur à $V_p(b_i)$ peut être compris comme: il y a des fortes possibilités pour que la demande excède la production. δ_i: coût supplémentaire d'accélération de la production par exemple pour faire vite face à la demande en attente.
Dans la suite Z_i^+ va désigner le surplus au cas où $A_i x$ dépasse $V_p(b_i)$ et Z_i^- ce qui manque lorsque $A_i x$ est inférieur à $V_p(b_i)$. Nous allons choisir la pénalité pour l'objectif i: $P_i(x,V_p(b_i))$ de manière à minimiser le coût total de pénalité. $P_i(x,V_p(b_i))$ sera donc la solution du programme:

$$\begin{cases} \text{Min } \gamma_i Z_i^+ + \delta_i Z_i^- \\ Z_i^+ - Z_i^- = A_i x - V_p(b_i) \\ Z_i^+ \geq 0;\ Z_i^- \geq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

<u>Proposition</u>: $P_i(x,V_p(b_i)) > -\infty$ ssi $\gamma_i + \delta_i \geq 0$

De plus si ces conditions sont satisfaites, la solution de (3) est:

$$[s_i^{(1)}\gamma_i - s_i^{(2)}\ \delta_i]\ [A_i x - V_p(b_i)]$$

avec

$$s_i^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i x - V_p(b_i) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$s_i^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i x - V_p(b_i) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Preuve</u>

En vertu du théorème fondamental de la dualité en Programmation Linéaire, $P_i(x,V_p(b_i)$ étant fini, le dual de (3) est réalisable.
Ce dual s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Max } \omega_i\ [A_i x - V_p(b_i)] \\ \omega_i \leq \gamma_i \\ -\omega_i \leq \delta_i \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} \text{Max } \omega_i\ [A_i x - V_p(b_i)] \\ -\delta_i \leq \omega_i \leq \gamma_i \end{cases}$$

Ce programme n'est réalisable que lorsque $-\delta_i \leq \gamma_i$ c.à.d.: $\delta_i + \gamma_i \geq 0$.

La solution est $\gamma_i \; [A_i x - V_p(b_i)]$ si $[A_i x - V_p(b_i)] \geq 0$
ou $-\delta_i \; [A_i x - V_p(b_i)]$ si $[A_i x - V_p(b_i)] \leq 0$.
comme désirée.

Selon que $A_i x - V_p(b_i) \geq 0$ ou $A_i x - V_p(b_i) \leq 0$, le problème (1) peut être remplacé par:

$$\begin{cases} \text{Max } cx - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i [A_i x - V_p(b_i)] \\ A_i x - V_p(b_i) \geq 0 \quad i=1,\dots m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} \text{Max } cx + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \; [A_i x - V_p(b_i)] \\ A_i x - V_p(b_i) \leq 0 \quad i=1,\dots m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4')$$

La solution à retenir sera celle qui donne à cx la valeur la plus élevée.
En ce qui concerne (4): La structure du programme force $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i [A_i x - V_p(b_i)]$ à être petit et ipso facto force chacun des $\gamma_i [A_i x - V_p(b_i)]$ à être petit; les γ_i étant fixés ce sont les $A_i x - V_p(b_i)$ qui seront petits et $A_i x$ reste dans le voisinage de $V_p(b_i)$. Un raisonnement analogue peut se faire pour (4').

4.2. Méthode directe

Une autre façon d'aborder (1) , serait simplement de considérer le programme suivant:

$$\begin{cases} \text{Max } cx \\ |A_i x - V_p(b_i)| \text{ suffisamment petit} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

En interprétant "$|Z|$ suffisamment petit" comme un sous-ensemble flou de R, représenté par la fonction linéaire par morceau du type: (fig 2)

$$\mu(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < z \leq -a_2 \\ \dfrac{a_2+z}{a_2-a_1} & \text{si } -a_2 \leq z \leq -a_1 \\ 1 & \text{si } -a_1 \leq z \leq a_1 \\ \dfrac{a_2-z}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq z \leq a_2 \\ 0 & \text{si } z \geq a_2 \end{cases}$$

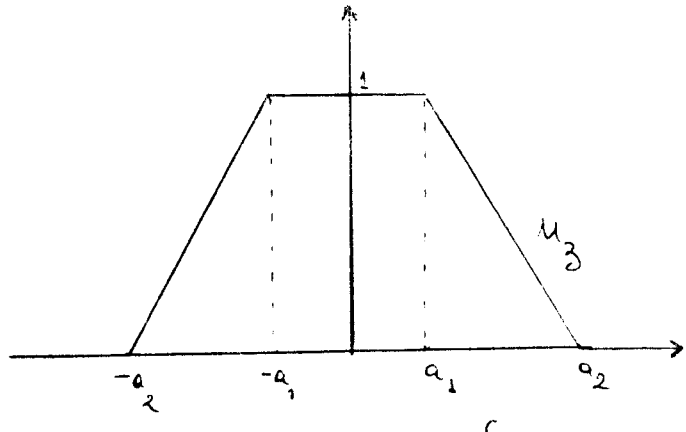

fig 2

Le problème de départ peut s'interpréter par la triade de problèmes ci-dessous chacun correspondant à l'une des trois branches. Pour les branches dont le degré d'appartenance ne vaut pas 1, nous ajoutons une contrainte supplémentaire exigeant un degré élevé de satisfaction. La solution sera celle qui donne à cx la valeur la plus élevée.

Max cx	Max cx	Max cx
$-a_2^i \leq A_i x - V_p(b_i) \leq -a_1^i$ $\quad i=1,\dots,m$	$-a_1^i < A_i x - V_p(b_i) \leq a_1^i$ $\quad i=1,\dots,m$	$a_1^i \leq A_i x - V_p(b_i) \leq a_2^i$ $\quad i=1,\dots,m$
$\dfrac{a_2^i + A_i x - V_p(b_i)}{a_2^i - a_1^i} \geq \alpha_i$ $\quad i=1,\dots,m$	$x \geq 0$	$\dfrac{a_2^i - A_i x + V_p(b_i)}{a_2^i - a_1^i} \geq \beta_i$ $\quad i=1,\dots,m$
$x \geq 0$		$x \geq 0$

Les seuils a_1^i, a_2^i, α_i, β_i sont fixés par le décideur. Au cas où nous avons des garanties sur le fait que les écarts sont petits (α_i', β_i' petits) (fig 3)

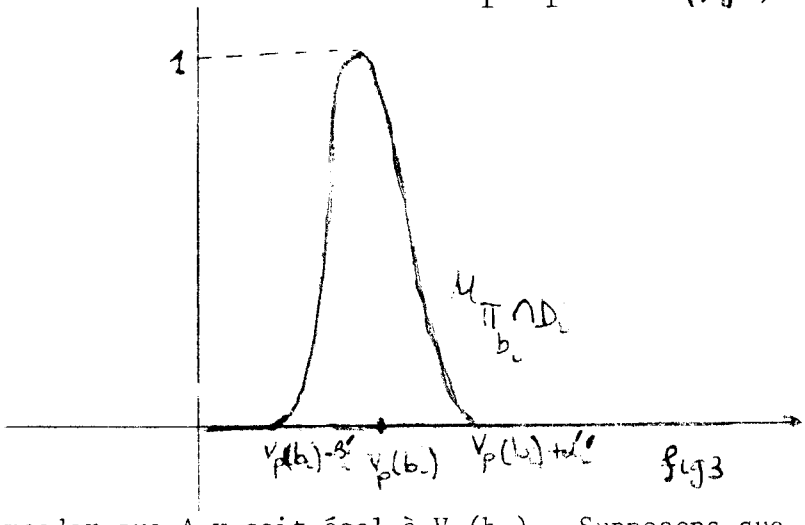

fig 3

Nous pouvons carrément demander que $A_i x$ soit égal à $V_p(b_i)$. Supposons que $yA \geq 0 \Rightarrow [V_p(b)]^T y \geq 0$ où A est la matrice ayant pour lignes A_i,

$y \in \mathbb{R}^m$ et $V_p(b)$ le vecteur de composantes $V_p(b_i)$

alors en vertu de lemme de Farkas [1]

$X = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ Ax = V_p(b)\} \neq \phi$.

Et on peut simplement chercher la solution du programme: $\underset{x \in X}{\text{Max}}\ cx$

Remarque

Pour les cas où c aussi est de nature possibiliste, on peut remplacer c par $V_p(c)$ et utiliser l'une des approches ci-dessus.

Références

[1] M. Avriel, Nonlinear Programming Analysis and Methods, Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, NS (1976).

[2] D. Dubois et H. Prade, Fuzzy sets and systems. Theory and applications (Academic Press, New-York, 1980).

[3] T.L. Fine, Theories of Probability (Academic Press, 1973).

[4] G.G. Jung, Memories, Dreams, REflections, New-York Pantheon Books, 1963.

[5] A. Kaufman, Le calcul des admissibilités, Col. int. théorie et appl. des Sous-ensembles flous, Marseille 1978.

[6] V.B. Kuz-min, A parametric approach to description of linguistic values of variables and hedges. Fuzzy Sets and Systems 6 (1981) 27-41.

[7] R. Lowen, Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 56, 3,(1976) 621-633.

[8] M.K. Luhandjula, Compensatory operators in fuzzy linear programming with multiple objectives. Fuzzy sets and Systems 8 (1982) 245-252.

[9] M.K. Luhandjula, Linear Programming under Randomness and Fuzziness. Fuzzy Sets and Systems. To appear.

[10] H. Prade, An outline of fuzzy or Possibilistic models for queuing systems in Fuzzy Sets Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems, Edited by Paul P. Wang and S.K. Chang, 147-153.

[11] H. Prade, Modèles Mathématiques de l'inmprécis et de l'incertain en vue d'applications au Raisonnement naturel. Thèse d'Etat Université Paul Sabatier de Toulouse, Juin 1982.

[12] G. Shafer, Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, 1976.

[13] S. Vaja, Probabilistic Programming, Academic Press New-York, 1972.

[14] Wang Pei-Zhuang, Fuzzy contactability and fuzzy variables, Fuzzy Sets and Systems, 8 (1982), 81-92.

[15] R.R. Yager, Possibilistic Decision making, Techn. Report # RRY 78-05.

[16] L.A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 3-28.

[17] L.A. Zadeh, Calculus of fuzzy restrictions, in Fuzzy Sets and their application to cognitive and decision processes. Edited by L.A. Zadeh, K.S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura 1975, 1-26.

[18] H.J. Zimmermann, Description and optimization fo fuzzy systems.Inl. J. Gen. Systems 2 (1976) 209-215.