A PROPOS DES TOPOLOGIES, DES UNIFORMITES ET DES PROXIMITES FLOUES (suite)

J. et J.L. COULON

§7 Uniformité floue associée à une uniformité.

• Rappels et notations :

1 Rappelons ce résultat, montré par Hutton dans [5] :

Soit L un treillis complet et totalement distributif, et soit $f : L \to L$ une application extensive et croissante :

Posons, pour tout $\alpha \in L$, $f^{\circ}(\alpha) = \bigwedge_{\Gamma \subset L,\ \bigvee \Gamma = \alpha} \left[\left[\bigvee_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \right] \right]$

Alors $f^{\circ} \leqslant f$; f° est extensive et respecte les bornes supérieures ; f° est la plus grande application de L dans L inférieure à f, extensive et respectant les bornes supérieures.

D'autre part, soit $\alpha \in L$. Il existe une partie de L (notée B_{α} dans la suite) telle que $\bigvee B_{\alpha} = \alpha$ et telle que, pour toute partie Γ de L telle que $\bigvee \Gamma = \alpha$, $\forall \beta \in B_{\alpha}$, $\exists \gamma \in \Gamma$, $\beta \leqslant \gamma$. Alors $f^{\circ}(\alpha) = \bigvee_{\beta \in B_{\alpha}} f(\beta)$.

2 Comme Hutton toujours, notons, si $F : L \to L$ est extensive et respecte les bornes supérieures, $F^{-1}(\alpha) = \bigwedge_{F(\gamma^{\star}) \leqslant \alpha^{\star}} \gamma$; F^{-1} est extensive et respecte les bornes supérieures.

Si F et G sont deux applications de L dans L extensives et respectant les bornes supérieures, on note $F \overset{\sim}{\wedge} G = (F \wedge G)^{\circ}$, et on a

$(F \overset{\sim}{\wedge} G)(\alpha) = \bigwedge_{\beta \vee \gamma = \alpha} [F(\beta) \vee G(\gamma)]$

(notation déjà utilisées dans la première partie pour les éléments d'une uniformité floue).

3 Si $\mu \in I^{X}$ et si $\alpha \in I$, notons $\mu'_{\alpha} = \{x \in X / \mu(x) > \alpha\}$ (niveau strict de flou)

Comme il est par exemple prouvé dans [8] : $\mu = \bigcap_{\alpha \in I} [\alpha \cup \mu'_{\alpha}]$.

4 Notons encore $\alpha \to \alpha^\star$ l'involution décroissante $\alpha \to 1-\alpha$ de I et, pour $\mu \in I^X$, $\mu^\star : x \to 1-\mu(x)$.

• <u>Proposition 4</u> :

Soit $\mathcal{U}$ une uniformité sur X.

Pour chaque $U \in \mathcal{U}$, on définit l'application $D_U : I^X \to I^X$ par $D_U(\mu) = \bigcap_\alpha [\alpha \cup U(\mu'_\alpha)]$

(a) Si $A \in 2^X$, $D_U(A) = U(A)$

(b) $(D_{U^{-1}})^\circ \subset (D_U^\circ)^{-1}$; et $D_{U_1 \cap \overset{\circ}{\ldots} \cap U_n} \subset D_{U_1}^\circ \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} D_{U_n}^\circ$

(c) $\{D_U^\circ \ / \ U \in \mathcal{U}\}$ est une base d'uniformité floue sur X (au sens de Hutton).

Ainsi : à une uniformité $\mathcal{U}$ sur X on peut associer une uniformité floue $\mathcal{D}$ sur X définie par :

$$\mathcal{D} = \{D \in (I^X)^{(I^X)} \ / \ \begin{array}{l} D \text{ extensive} \\ D \text{ respecte les réunions} \\ \exists\, U \in \mathcal{U},\ D \supset D_U^\circ \end{array} \qquad (8)$$

(" D extensive" est d'ailleurs un pléonasme, joint à $\exists U \in \mathcal{U}$, $D \supset D_U^\circ$)

<u>Preuve</u> :

★ (a) : Si $A \in 2^X$, $D_U(A) = \cap [\alpha \cup U(A'_\alpha)] = \bigcap_{\alpha \neq 1} [\alpha \cup U(A)] = [\bigwedge_{\alpha \neq 1} \alpha] \cup U(A) = U(A)$

★ (b) : il suffit de prouver que $D_{U^{-1}} \subset (D_U^\circ)^{-1}$, donc quepour $\mu \in I^X$:

$$D_{U^{-1}}(\mu) \subset \bigcap_{D_U^\circ(\overset{\star}{\rho}) \subset \overset{\star}{\mu}} \rho ,$$

c'est-à-dire que $D_U^\circ(\overset{\star}{\rho}) \subset \overset{\star}{\mu} \to D_{U^{-1}}(\mu) \subset \rho$ (i)

Or on peut faire la remarque suivante : $D_{U^{-1}}(\mu) \subset \bigcap_{D_U(\overset{\star}{\xi}) \subset \overset{\star}{\mu}} \xi$ (ii)

En effet, soit $\xi \in I^X$ telle que $D_U(\xi^\star) \subset \mu^\star$

$$\bigcap_\alpha [\alpha \cup U(\overset{\star}{\xi}'_\alpha)] \subset \overset{\star}{\mu}$$

$\forall x \in X : \bigwedge_\alpha [\alpha \vee U(\overset{\star}{\xi}'_\alpha)(x)] \leqslant 1-\mu(x)$.

Or $U(\overset{\star}{\xi}'_\alpha)(x) = 0 \leftrightarrow \forall z \in \overset{\star}{\xi}'_\alpha : (z,x) \notin U \leftrightarrow [\xi(z) < 1-\alpha \rightarrow (z,x) \notin U]$

D'où $\forall x \in X : \bigwedge \{\alpha \ / \ \xi(z) < 1-\alpha \rightarrow (z,x) \notin U\} \leqslant 1-\mu(x)$

$\bigwedge \{\alpha / (z,x) \in U \rightarrow \xi(z) \geqslant 1-\alpha\} \leqslant 1-\mu(x)$

$\bigwedge \{\alpha / \bigwedge_{(z,x) \in U} \xi(z) \geqslant 1-\alpha\} \leqslant 1-\mu(x)$

$1 - \bigwedge_{(z,x) \in U} \xi(z) \leqslant 1-\mu(x)$, et donc $\mu(x) \leqslant \bigwedge_{(z,x) \in U} \xi(z)$ (iii)

Or $D_{U^{-1}}(\mu)(x) = \bigwedge_\alpha [\alpha \vee U^{-1}(\mu'_\alpha)(x)]$, et comme

$U^{-1}(\mu'_\alpha)(x) = 0 \leftrightarrow \forall z \in \mu'_\alpha : (z,x) \notin U^{-1} \leftrightarrow (\mu(z) > \alpha \rightarrow (z,x) \notin U^{-1})$.

$D_{U^{-1}}(\mu)(x) = \bigwedge \{\alpha / \mu(z) > \alpha \rightarrow (z,x) \notin U^{-1}\} = \bigwedge \{\alpha / (z,x) \in U^{-1} \rightarrow \mu(z) \leqslant \alpha\} =$

$= \bigwedge \{\alpha \ / \alpha \geqslant \bigvee_{(z,x) \in U^{-1}} \mu(z)\} = \ldots$

$= \bigvee_{(z,x) \in U^{-1}} \mu(z)$

De sorte que si $\xi \in I^X$ est telle que $D_U(\overset{\star}{\xi}) \subset \overset{\star}{\mu}$:

pour tout $z \in X$ tel que $(z,x) \in U^{-1}$: $\mu(z) \leqslant \bigwedge_{(t,z) \in U} \xi(t)$

(d'après iii)

$\mu(z) \leqslant \xi(x)$

d'où $D_{U^{-1}}(\mu)(x) = \bigvee_{(z,x) \in U^{-1}} \mu(z) \leqslant \xi(x)$, ce qui prouve la remarque (ii)

Alors si $D^{\circ}_{U}(\overset{\star}{\rho}) \subset \overset{\star}{\mu}$:

Soit $B_{\overset{\star}{\rho}}$ une partie de I telle que $\bigvee B_{\overset{\star}{\rho}} = \overset{\star}{\rho}$ et telle que pour toute partie Γ de I telle que $\bigvee \Gamma = \overset{\star}{\rho}$ on ait :

$$\forall \beta \in B_{\overset{\star}{\rho}} \ , \ \exists \gamma \in \Gamma \ , \ \beta \leqslant \gamma \ : D^{\circ}_{U}(\overset{\star}{\rho}) = \bigcup_{\lambda \in B_{\overset{\star}{\rho}}} D_U(\lambda)$$

donc par hypothèse, pour tout $\lambda \in B_{\overset{\star}{\rho}}$: $D_U(\lambda) \subset \overset{\star}{\mu}$, càd $D_U(\lambda^{\star\star}) \subset \overset{\star}{\mu}$ et-d'après la remarque (ii) : $D_{U^{-1}}(\mu) \subset \lambda^{\star}$.

De sorte que : $D_{U^{-1}}(\mu) \subset \bigcap_{\lambda \in B_{\overset{\star}{\rho}}} \lambda^{\star} = (\bigcup_{\lambda \in B_{\overset{\star}{\rho}}} \lambda)^{\star} = \overset{\star\star}{\rho} = \rho$, cqfd.

D'autre part :

$U \subset V \to D_U \subset D_V \to D^{\circ}_{U} \subset D_V \to D^{\circ}_{U} \subset D^{\circ}_{V}$ (D°_{V} étant la plus grande application $I^X \to I^X$ à être extensive, respectueuse des réunions et moindre que D_V).

Donc $D^{\circ}_{U_1 \cap \ldots \cap U_n} \subset D^{\circ}_{U_1} \cap \ldots \cap D^{\circ}_{U_n}$, et par suite

$D^{\circ}_{U_1 \cap \ldots \cap U_n} \subset (D^{\circ}_{U_1} \cap \ldots \cap D^{\circ}_{U_n})^{\circ} = D^{\circ}_{U_1} \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} D^{\circ}_{U_n}$.

$\star$(c) Soit $\mathcal{D} = \{D \in (I^X)^{(I^X)} \ / \ D$ extensive ; D respecte les réunions ; $\exists U \in \mathcal{U}, D \supset D^{\circ}_{U}\}$, et soit $B = \{D^{\circ}_{U} \ / \ U \in \mathcal{U}\}$

Si $D \in B$, $\exists E \in B$ telle que $E o E \subset D$. En effet,

$\to$ Remarque : Si $V \in \mathcal{U}$ et si $W \in \mathcal{U}$: $D^{\circ}_{VoW} \supset D^{\circ}_{V} \circ D^{\circ}_{W}$

En effet, si $\alpha \in I$ et $A \in 2^X$: $D_V(\alpha \cup A) = \bigcap_{\beta \in I} \{\beta \cup V[(\alpha \cup A)'_{\beta}]\} = \alpha \cup V(A)$, de sorte que

$D_{VoW}(\mu) = \bigcap_{\alpha} [\alpha \cup VoW(\mu'_{\alpha})] = \bigcap_{\alpha} D_V[\alpha \cup W(\mu'_{\alpha})] \supset D_V\{\bigcap_{\alpha} [\alpha \cup W(\mu'_{\alpha})]\} = D_V[D_W(\mu)] = \ldots$

$\mu = D_V o D_W(\mu)$.

Donc $D_V^\circ o D_W^\circ \subset D_V o D_W \subset D_{VoW}$ et -comme $D_V^\circ o D_W^\circ$ est extensive et respecte les réunions-

$D_V^\circ o D_W^\circ \subset D_{VoW}^\circ$.

→ D'où si $U \in \mathcal{U}$, il existe $V \in \mathcal{U}$ telle que $VoV \subset U$, et alors

$D_U^\circ \supset D_{VoV}^\circ \supset D_V^\circ o D_V^\circ$

$\mathcal{D}$ est donc (cf Hutton : [5]) une "quasi"-uniformité floue sur X , de base B

Enfin, $\mathcal{D}$ est une uniformité sur X car $D \in \mathcal{D} \to D^{-1} \in \mathcal{D}$. En effet,

$D \in \mathcal{D} \to \exists\, U \subset \mathcal{U}$, $D \supset D_U^\circ \to D^{-1} \supset (D_U^\circ)^{-1} \supset D_{U^{-1}}^\circ \to D^{-1} \in \mathcal{D}$.

• <u>Proposition 5 :</u>

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, mapsto, "(8)"] & \mathcal{D} \arrow[r, "(5)"] \arrow[rr, "(4)"] & \delta' \arrow[r, "(5)"] & \tau' \end{tikzcd}$$

(commutatif d'après la proposition 3).

Alors τ' est une topologie floue au sens de Lowen.

<u>Preuve</u>

★Si $\alpha \in I$ et $U \in \mathcal{U}$: $D_U(\alpha) = \bigcap_{\beta \in I} [\beta \cup U(\alpha'_\beta)] = \bigwedge_{\beta \geq \alpha} \beta = \alpha$

★Si $\alpha \in I$ et $U \in \mathcal{U}$: $D_U^\circ(\alpha) = \alpha$

d'abord $D_U^\circ(\alpha) \leq \alpha$; d'autre part : $D_U^\circ(\alpha) \subset D_U(\alpha) = \alpha$

★ Si $\alpha \in I$: $\bar{\alpha}^{\tau'} = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D(\alpha)$ (d'après la proposition 3)

Donc si $U \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U} \neq \emptyset$) : $\bar{\alpha}^{\tau'} = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D(\alpha) \subset D_V^\circ(\alpha) = \alpha$, et finalement $\bar{\alpha}^{\tau'} = \alpha$

• Une proximité floue associée à une proximité :

Dans [4], Katsaras associe à toute proximité Δ sur X une proximité floue δ par :

$$\mu \delta \nu \leftrightarrow \forall A \supset \mu \ , \ \forall B \supset \nu : A \,\Delta\, B \qquad (9)$$

Remarques :

★ δ est a fortiori une L-P proximité floue

★ $\mu\delta\nu \leftrightarrow \mu'_0 \,\Delta\, \nu'_0$ (proximité -au sens usuel- des supports).

§3 VARIATIONS FLOUES A PARTIR D'UNE UNIFORMITE

• Soit $\mathcal{U}$ uue uniformité sur X.

★ 1) on peut considérer le cheminement $\mathcal{U} \xrightarrow{(3)} \Delta \xrightarrow{(2)} \delta \xrightarrow{(1)} \tau$ qui, à partir de $\mathcal{U}$, nous conduit à une topologie floue (au sens de Chang) via une proximité et une proximité floue (au sens de Katsaras). Décrivons ce premier itinéraire :

$$A \,\Delta\, B \leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} : U(A) \cap U(B) \neq \emptyset$$

$$\mu\delta\nu \leftrightarrow \forall A \supset \mu \,,\ \forall B \supset \nu \,,\ \forall U \in \mathcal{U} : U(A) \cap U(B) \neq \emptyset \leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} : U(\mu'_0) \cap U(\nu'_0) \neq \emptyset$$

$$\bar{\mu}^{\tau} = \bigcap_{\rho \not\delta \mu} \overset{\star}{\rho} = \bigcap_{\rho / \exists\, U \in \mathcal{U},\, U(A) \cap U(B) = \emptyset} \overset{\star}{\rho} = \bigcap_{\rho / \exists U \in \mathcal{U},\ U(\rho'_0) \cap U(\mu'_0) = \emptyset} \overset{\star}{\rho}$$

★ 2) On peut considérer

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "(8)"] & \mathcal{D} \arrow[r, "(6)"] \arrow[dr, "(4)"'] & \delta' \arrow[d, "(5)"] \\
 & & \tau'
\end{tikzcd}$$

qui nous emmène de $\mathcal{U}$ à une topologie floue via une uniformité floue et éventuellement via une L-P proximité floue. La proposition 5 nous a prouvé que ce diagramme est commutatif et que τ' est une topologie floue au sens de Lowen.

Décrivons cette pérégrination :

$$D \in \mathfrak{D} \leftrightarrow \begin{cases} D : I^X \to I^X \text{ est extensive et respecte les réunions} \\ \exists U \in \mathfrak{U} \ , \ D \supset D_U^\circ \end{cases}$$

$$\mu\delta'\nu \leftrightarrow \forall D \in \mathfrak{D},\ D(\mu) \not q\, D(\nu) \leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U} : D_U^\circ(\mu) \not q\, D_U^\circ(\nu)$$

$$\leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U} : [\bigcup_{\lambda \in B_\mu} D_U(\lambda)] \not q [\bigcup_{t \in B_\nu} D_U(t)]$$

$$\leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}, \exists \lambda \in B_\mu \ , \exists t \in B_\nu : D_U(\lambda) \not q\, D_U(t)$$

$$\bar{\mu}^{T'} = \bigcap_{D \in \mathfrak{D}} D(\mu) = \bigcap_{D \in \mathfrak{D},\ D(\rho) \subset D(\mu)^\star} \overset{\star}{\rho} = \bigcap_{D \in \mathfrak{D},\ D(\rho) \subset \overset{\star}{\mu}} \overset{\star}{\rho}$$

* 3) Un troisième cheminement est $\mathfrak{U} \xrightarrow{(\underline{I})} T \xrightarrow{(\underline{\omega})} \tau''$, où $(\underline{\omega})$ est l'engendrement au sens de Lowen (cf [3]), et qui nous conduit à une topologie floue au sens de Lowen via une topologie.

Description :

$$\begin{cases} \bar{A}^T = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U(A) \\ \mu \text{ est } \tau''\text{-fermée} \leftrightarrow \forall \alpha \in I : \mu_\alpha \text{ est T-fermé.} \end{cases}$$

* 4) Rappels :

Dans [9] nous avons introduit une notion de proximité floue à valeurs dans I que nous appellerons ici une <u>proximité totalement floue</u> :

C'est une application $\hat{\delta} : I^X \times I^X \to I$ (donc une <u>relation floue</u>) telle que :

1. $\hat{\delta}(\mu,\nu) = \hat{\delta}(\nu,\mu)$
2. $\hat{\delta}(\mu \cup \nu, \rho) = \hat{\delta}(\mu,\rho) \vee \hat{\delta}(\nu,\rho)$
3. Si $x \in X$ et $\alpha \in I$: $\hat{\delta}(x,\alpha)=\alpha$ (x mis pour $\{x\}$, α désigne tantôt un élément de I tantôt la partie floue constante $x \to \alpha$)
4. Si $\mu_{\hat{\delta}}$ désigne $x \to \hat{\delta}(x,\mu)$, $\hat{\delta}(x,\mu_{\hat{\delta}}) = \hat{\delta}(x,\mu)$

⋮

5. Si $x \in X$: $\hat{\delta}(x,\mu) \geqslant \mu(x)$

Rappelons ces résultats (nous les avons prouvés dans [9])

α) $\Delta \xrightarrow{(10)} \hat{\delta}$: $\hat{\delta}(\mu,\nu) = \bigvee\{\alpha \in I / \mu_\alpha \Delta \nu_\alpha\}$ associe à toute proximité une proximité totalement floue (dite engendrée par Δ).

β) $\hat{\delta} \xrightarrow{(11)} \lambda$: μ est λ fermé $\Leftrightarrow \mu_{\hat{\delta}} = \mu$ associe à toute proximité totalement floue une topologie floue au sens de Lowen.

γ) on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\delta} \arrow[dr, "(11)"] & \\
\Delta \arrow[ur, "(10)"] \arrow[dr, "(2)"'] & & \lambda \\
 & T \arrow[ur, "(\omega)"'] &
\end{tikzcd}$$

De sorte qu'un quatrième chemin est $\mathcal{U} \xrightarrow[(3)]{} \Delta \xrightarrow[(10)]{} \delta \xrightarrow[(11)]{} \lambda$ qui conduit de $\mathcal{U}$ à une topologie floue engendrée au sens de Lowen qui n'est autre -d'après γ) - que τ ".

• <u>Proposition 6</u>

Soit $\mathcal{U}$ une uniformité sur X.

<u>On a le diagramme commutatif</u> :

$$\begin{tikzcd}
 & & \delta' \arrow[dr, "(5)"] & \\
 & \mathcal{D} \arrow[ur, "(6)"] \arrow[rr, "(4)"] & & \tau' = \tau'' = \lambda \\
\mathcal{U} \arrow[ur, "(8)"] \arrow[rr] \arrow[dr, "(3)"'] & & T \arrow[ur] & \\
 & \Delta \arrow[uur, "(1)"] \arrow[uurr, "(10)"] \arrow[r, "(9)"] & \delta \arrow[r, "(5)"] & \tau \arrow[uu, "(11)"']
\end{tikzcd}$$

avec ces commentaires : | τ est une topologie floue au sens de Chang
| τ n'est jamais une topologie floue au sens de Lowen

δ est une proximité floue au sens de Katsaras

$\tau' = \tau'' = \lambda$ est un topologie floue au sens de Lowen, engendrée (au sens de Lowen)

par T , et contenant τ

$\mathfrak{D}$ est une uniformité floue au sens de Hutton, engendrée (à notre sens) par $\mathfrak{U}$.

δ' est une L.P. proximité floue (à notre sens)

δ' n'est jamais une proximité floue au sens de Katsaras (la généralisation était donc nécessaire).

$\hat{\delta}$ est une proximité totalement floue (à notre sens), engendrée (à notre sens) par Δ .

Preuve

a $\underline{\mu \in \tau' \rightarrow \forall \alpha \in I : \mu_\alpha \in T}$

Si $\mu \in \tau'$, $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} D_U^\circ(\mu) = \bigcap_{D \in \mathfrak{D}} D(\mu) = \mu$

de sorte que pour tout $x \in X$: $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{\lambda \in B_\mu} D_U(\lambda)(x) = \mu(x)$

$$\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{\lambda \in B_\mu} \bigwedge_{\alpha \in I} [\alpha \vee U(\lambda'_\alpha)(x)] = \mu(x)$$

mais $U(\lambda'_\alpha)(x) = 0 \leftrightarrow [(z,x) \in U \rightarrow \lambda(z) \leqslant \alpha]$

d'où $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{\lambda \in B_\mu} \bigwedge \{\alpha \in I / (z,x) \in U \rightarrow \lambda(z) \leqslant \alpha\} = \mu(x)$

$$\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{\lambda \in B_\mu} \bigvee_{(z,x) \in U} \lambda(z) = \mu(x)$$

$$\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{(z,x) \in U} \mu(z) = \mu(x).$$

Alors, si pour tout $U \in \mathfrak{U}$ $x \in U(\mu_\alpha)$, pour tout $U \in \mathfrak{U}$ il existe $z \in \mu_\alpha$ tel que $(z,x) \in U$, de sorte que

$$\mu(x) = \bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{(z,x) \in U} \mu(z) \geqslant \alpha$$

D'où $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U(\mu_\alpha) = \mu_\alpha$ et μ_α est T-fermée.

b $\underline{\tau' \subset \tau''}$:

En effet, si $\mu \in \tau'$, d'après ce qui précède $\forall \alpha \in I : \mu_\alpha \in T$, de sorte que $\mu \in \omega\ (T) = \tau''$.

c $\underline{\tau'' \subset \tau'}$:

* <u>Lemme</u> : <u>Si μ est τ''-fermée , $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} D_U(\mu) = \mu$</u>

En effet, si μ est τ''-fermée :

remarquons d'abord que $\forall \alpha \in I : \mu_\alpha$ est T-fermée, de sorte que

$\forall \alpha \in I : \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U(\mu_\alpha) = \mu_\alpha$ (R) .

Alors $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} D_U(\mu) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \bigcap_{\alpha \in I} [\alpha \cup U\ (\mu'_\alpha)] = \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$, où

$G_\alpha = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} [\alpha \cup U(\mu'_\alpha)]$;

mais pour tout $\alpha \in I$:

$G_\alpha = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} [\alpha \cup U(\bigcup_{\beta > \alpha} \mu_\beta)] = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} [\alpha \cup \bigcup_{\beta > \alpha} U(\mu_\beta)] = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \bigcup_{\beta > \alpha} [\alpha \cup U(\mu_\beta)] = \ldots$

= (par distributivité totale)...

$\ldots = \bigcup_{F \in I^{\mathfrak{U}}} \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} [\alpha \cup U(\mu_{F(U)})] = \bigcup_F \{\alpha \cup [\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U(\mu_{F(U)})]\} =$

$\forall U \in \mathfrak{U} : F(U) > \alpha$

= (d'après la remarque (R))...

$\ldots = \bigcup_F [\alpha \cup \mu_{F(U)}] = \alpha \cup \bigcup_F \mu_{F(U)} \subset \alpha \cup \bigcup_{\beta > \alpha} \mu_\beta = \alpha \cup \mu'_\alpha$

de sorte que :

$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} D_U(\mu) \subset \bigcap_{\alpha \in I} [\alpha \cup \mu'_\alpha] = \mu$ et on a en fait l'égalité annoncée.

* Alors, si μ est τ''-fermée :

$$\bar{\mu}^{\tau'} = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} D^\circ_U(\mu) \subset \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} D_U(\mu) = \mu \text{ et } \mu \text{ est } \tau'\text{-fermée .}$$

d <u>$\tau' = \tau'' = \lambda$:</u>

Puisque (comme il est prouvé dans [9]) $\tau'' = \lambda$, on a $\tau' = \tau'' = \lambda$

e <u>$\tau \subset \tau' = \tau'' = \lambda$</u>

Rappelons que $\bar{\mu}^{\tau} = \bigcap_{\exists U \in \mathfrak{U},\ U(\rho'_o) \cap U(\mu'_o) = \emptyset} \rho^\star$

Soit $\rho \in I^X$ telle qu'il existe $U \in \mathfrak{U}$ telle que $U(\rho'_o) \cap U(\mu'_o) = \emptyset$;

alors $D^\circ_U(\rho) \subset D^\circ_U(\rho'_o) \subset D_U(\rho'_o) = U(\rho'_o) \subset U(\mu'_o)^\star = D_U(\mu'_o)^\star \subset D_U(\mu)^\star \subset D^\circ_U(\mu)^\star$

donc $\bar{\mu}^{\tau} \supset \bigcap_{\exists D \in \mathfrak{D}, D(\rho) \subset D(\mu)^\star} \rho^\star = \bar{\mu}^{\tau'}$, ce qui prouve que $\tau \subset \tau'$

f <u>τ n'est jamais une topologie au sens de Lowen, et $\tau \subsetneq \tau' = \tau'' = \lambda$</u>

en effet, une topologie associée (par le procédè (5)) à une proximité floue au sens de Katsaras n'est jamais une topologie floue au sens de Lowen (d'où précisément l'introduction de la notion de L-P-proximité floue). En effet, si $0 < \alpha < 1$: $\bar{\alpha}^{\tau} = \bigcap_{\rho \not\delta \alpha} \rho^\star = \emptyset^\star = X$

g <u>La L-P-proximité floue δ' n'est jamais une simple proximité floue au sens de Katsaras</u> :

puisque -par (5)- on lui associe une topologie floue (τ') qui est une topologie floue au sens de Lowen.

§ 4 Utilisation d'une proximité totalement floue :

- Dans [9] nous avons introduit une notion de proximité floue à valeurs dans I que nous appellerons ici une <u>proximité totalement floue</u>.

  C'est une application $\hat{\delta} : I^X \times I^X \to I$ telle que

  1. $\delta(\mu,\nu) = \delta(\nu,\mu)$
  2. $\delta(\mu \cup \nu,\rho) = \delta(\mu,\rho) \vee \delta(\nu,\rho)$
  3. Si $x \in X$ et si $\alpha \in I$: $\delta(x,\alpha) = \alpha$ (x mis pour $\{x\}$, α désigne tantôt un élément de I , tantôt la partie floue constante $x \to \alpha$)
  4. Si μ_δ désigne $x \to \delta(x,\mu)$: $\delta(x,\mu_\delta) = \delta(x,\mu)$
  5. Si $x \in X$: $\delta(x,\mu) \geqslant \mu(x)$.

- Rappelons ces résultats (nous les avons prouvés dans [9]) :

1) $\Delta \xrightarrow{(\underline{10})} \hat{\delta}$: $\hat{\delta}(\mu,\nu) = \bigvee \{\alpha \in I \ / \ \mu_\alpha \ \Delta \ \nu_\alpha \}$ associe à toute proximité totalement floue.

2) $\hat{\delta} \xrightarrow{(\underline{11})} \lambda$: μ est λ-fermé $\Leftrightarrow \mu_{\hat{\delta}} = \mu$ associe à toute proximité totalement floue une topologie floue au sens de Lowen.

3) on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\delta} \arrow[dr, "(\underline{11})"] & \\
\Delta \arrow[ur, "(\underline{10})"] \arrow[dr, "(\underline{2})"'] & & \lambda \\
 & T \arrow[ur, "(\underline{\omega})"'] &
\end{tikzcd}$$

- <u>Propositon 7</u> :

  Soit $\mathcal{U}$ une uniformité sur X.

  on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & \delta' \arrow[dr, "(\underline{4})"] & \\
 & \mathcal{D} \arrow[ur, "(\underline{6})"] \arrow[rr, "(\underline{5})"] & & \tau' = \tau'' = \lambda \\
\mathcal{U} \arrow[ur, "(\underline{8})"] \arrow[dr, "(\underline{1})"] \arrow[ddr, "(\underline{3})"'] & & & \\
 & T \arrow[uurr, "(\underline{\omega})"] & & \hat{\delta} \text{ (proximité totalement floue)} \arrow[uur, "(\underline{11})"'] \\
 & \Delta \arrow[u, "(\underline{2})"] \arrow[uurr, "(\underline{10})"] \arrow[r, "(\underline{9})"'] & \delta \arrow[r, "(\underline{5})"'] & \tau
\end{tikzcd}$$

  avec une nouvelle façon de calculer $\bar{\mu}^{\tau'}$:

  une proximité

$\bar{\mu}^{\tau}(x) = \bar{\mu}^{\hat{\delta}}(x) = \mu_{\hat{\delta}}(x) = \hat{\delta}(x,\mu) = \vee\{\alpha / x \Delta \mu_\alpha\} = \vee\{\alpha / \forall\, U \in \mathfrak{U};\ U(x) \cap U(\mu_\alpha) \neq \emptyset\}.$

§5 Exemples "extrêmes"

• <u>1er exemple</u> $\mathfrak{U} = \{X \times X\}$ (c'est le cas le plus "grossier")

Alors

1) $A \Delta B \leftrightarrow A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$

2) $\mu\delta\nu \leftrightarrow \mu \neq \emptyset$ et $\nu \neq \emptyset$

3) $\tau = \{\emptyset, X\}$

4) $\mathfrak{D} = \{D / D$ respecte les réunions, et $D \supset \underline{\Delta}\}$, où

$\underline{\Delta}(\mu) = V\mu : x \to \bigvee_{x \in X} \mu(x)$

5) $\mu\delta'\nu \leftrightarrow V\mu + V\nu > 1$

6) $\hat{\delta}(\mu,\nu) = (V\mu) \wedge (V\nu)$

7) $\tau' = \tau'' = \lambda = \{\alpha / \alpha \in I\}$

En effet :

1) Si $A \neq \emptyset$, $U(A) = X$

2) $\mu\delta\nu \leftrightarrow \mu'_o \Delta \nu'_o \leftrightarrow \mu'_o \neq \emptyset$ et $\nu'_o \neq \emptyset \leftrightarrow \mu \neq \emptyset$ et $\nu \neq \emptyset$

3) Si $\mu \neq \emptyset$, $\bar{\mu}^{\tau} = \bigcap_{\rho \not\emptyset \mu} \overset{\star}{\rho} = \overset{\star}{\emptyset} = X$

4) Soit $U = X \times X$: $U(\mu'_\alpha) = \emptyset \leftrightarrow \mu'_\alpha = \emptyset \leftrightarrow \mu \subset \alpha$

X sinon

$D_U(\mu) = \bigwedge_{\alpha \supset \mu} \alpha = V\mu$

Comme D_U respecte ici les réunions : $D^{\circ}_U(\mu) = D_U(\mu) = V_\mu$

5) trivial

6) $\hat{\delta}(\mu,\nu) = \vee\{\alpha \in I / \mu_\alpha \Delta \nu_\alpha\} = \vee\{\alpha \in I / \mu_\alpha \neq \emptyset$ et $\nu_\alpha \neq \emptyset\} = (V_\mu) \wedge (V_\nu)$

7) on sait que $\omega(\{\emptyset, X\}) = \{\alpha / \alpha \in I\}$.

• <u>2ème exemple</u> :

$\mathfrak{U} = \{U \supset \Delta_X\}$, où $\Delta_X = \{(x,x) / x \in X\}$ ("diagonale de X")

(c'est le cas le plus "fin").

Alors:

1) $A \Delta B \leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

2) $\mu\delta\nu \leftrightarrow \mu \cap \nu \neq \emptyset$

3) $\tau = 2^X$

4) $\mathcal{D}$ est l'ensemble des applications : $I^X \to I^X$ extensives et respectueuses des réunions.

5) $\mu\delta'\nu \leftrightarrow \mu \not\subset \nu^\star$

6) $\hat{\delta}(\mu,\nu) = V(\mu \cap \nu)$

7) $\tau' = \tau'' = \lambda = I^X$

En effet,

1) $A \Delta B \leftrightarrow \Delta_X(A) \cap \Delta_X(B) \neq \emptyset \leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

2) $\mu\delta\nu \leftrightarrow \mu'_o \Delta \nu'_o \leftrightarrow \mu'_o \cap \nu'_o \neq \emptyset \leftrightarrow \mu \cap \nu \neq \emptyset$

3) $\bar{\mu}^\tau = \bigcap_{\rho \not\subset \mu} \rho^\star = \bigcap_{\rho \cap \mu = \emptyset} \rho^\star = \left(\bigcup_{\rho \cap \mu = \emptyset} \rho\right)^\star = \left(\bigcup_{\rho \subset \mu'^\star_o} \rho\right)^\star = \mu'^{\star\star}_o = \mu'_o$

Alors μ τ-fermé $\leftrightarrow \mu = \mu'_o \leftrightarrow \mu$ nette . Donc $\tau = 2^X$.

4) car $D^\circ_{\Delta_X} = D_{\Delta_X} = 1_{I^X}$

5) évident

6) $\hat{\delta}(\mu,\nu) = V\{\alpha \in I/\mu_\alpha \Delta \nu_\alpha\} = V\{\alpha \in I/\mu_\alpha \cap \nu_\alpha \neq \emptyset\} =$

$= V\{\alpha \in I/(\mu \cap \nu)_\alpha \neq \emptyset\} = V(\mu \cap \nu)$.

7) on sait que $\omega(2^X) = I^X$

Moralité de l'histoire (s'il en faut une !) : Ces variations donnent diverses approches d'une topologie floue au sens de Lowen engendrée par une topologie uniformisable.

Bibliographie : Elle a été fournie à la fin de la première partie de l'article.